

Государственный университет – Высшая школа экономики

На правах рукописи

Антонов Павел Юрьевич

**ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ
МЕТОДОВ НЕСОВЕРШЕННОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ
ФИНАНСОВЫХ ОПЦИОНОВ**

Специальность 08.00.10 "Финансы, денежное обращение и кредит"

Диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук

Научный руководитель проф., д.э.н. Н.И. Берзон

Москва – 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ СРОЧНОГО РЫНКА И МЕТОДОВ ХЕДЖИРОВАНИЯ.....	11
1.1. ЗНАЧЕНИЕ РЫНКА ПРОИЗВОДНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ ДЛЯ ЭКОНОМИКИ СТРАНЫ И ИСТОРИЯ ЕГО РАЗВИТИЯ	11
1.2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ХЕДЖИРОВАНИЯ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЦИОНОВ	35
1.3. МЕТОДЫ НЕСОВЕРШЕННОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ.....	54
ГЛАВА 2. КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ	61
2.1. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ВЫПЛАТ ХЕДЖИРУЮЩЕЙ СТРАТЕГИИ.....	61
2.2. АНАЛИЗ МЕТОДА КВАНТИЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛСА.....	73
2.3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА КВАНТИЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ.....	84
ГЛАВА 3. ХЕДЖИРОВАНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ПОТЕРЬ	99
3.1. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ХЕДЖИРУЮЩЕГО ПОРТФЕЛЯ	99
3.2. АНАЛИЗ МЕТОДА ХЕДЖИРОВАНИЯ ОЖИДАЕМЫХ ПОТЕРЬ В РАМКАХ МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛСА	106
3.3. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ХЕДЖИРОВАНИЯ ОЖИДАЕМЫХ ПОТЕРЬ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ.....	119

ГЛАВА 4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДОВ НЕСОВЕРШЕННОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ	127
4.1. Сравнительный анализ метода квантильного хеджирования и метода хеджирования ожидаемых потерь	127
4.2. Оценка эффективности методов несовершенного хеджирования опционных позиций на российском фондовом рынке.....	134
4.3. Механизм реализации методов квантильного хеджирования и метода хеджирования ожидаемых потерь при принятии инвестиционных решений	145
ВЫВОДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИССЛЕДОВАНИЯ	173
ЛИТЕРАТУРА	176
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	188

Введение

Важным результатом проводимых в стране структурных преобразований стал существенный рост интереса хозяйствующих субъектов к срочному рынку. Участники экономических отношений начали осознавать важность механизма хеджирования как средства управления риском, а некоторые из них стали использовать производные финансовые инструменты для защиты своих инвестиций от возможных потерь. Во многом это стало возможным благодаря законодательным изменениям в налогообложении прибыли организаций, в том числе полученной по операциям с финансовыми инструментами срочных сделок. Конкуренция среди организаторов торговли в процессе формирования инфраструктуры и порядка функционирования срочного рынка способствовала возникновению технически эффективного механизма ведения торгов и расширению номенклатуры торгуемых инструментов.

Проблема хеджирования операций с производными инструментами особенно актуально стоит перед отечественной финансовой наукой. Реальные экономические потребности требуют от организаторов и ведущих операторов срочного рынка конструирования значительного числа новых финансовых инструментов, позволяющих осуществлять хеджирование большинства операций, совершаемых на кассовом рынке. В то время как российский рынок фьючерсов уже в достаточной степени сформировался, рынок финансовых опционов, дающих более гибкие возможности для управления риском, еще находится в самом начале своего развития. Необходимость расширения круга инструментов риск-менеджмента и внедрения в практику работы профессиональных участников российского срочного рынка методов научного управления риском, основанных на строгой формализации

инвестиционных решений, определяет **актуальность темы диссертационного исследования.**

Классическое решение проблемы хеджирования финансовых опционов дается в рамках концепции совершенного хеджирования. Ее основы были заложены широко известными работами Блэка и Шоулса [66], Мертона [108], Кокса, Росса и Рубинштейна [75]. Концепция совершенного хеджирования нацелена на конструирование некоторого портфеля рыночных активов, который генерирует платежи, соответствующие выплатам производного финансового инструмента. В отсутствие арбитража стоимость этого портфеля определяет стоимость производного инструмента.

В настоящее время стратегии совершенного хеджирования утвердились в качестве стандартного подхода финансовой инженерии, нашедшего широкое признание в теории и практике управления риском. Их главная особенность состоит в том, что стоимость финансового опциона определяется вне зависимости от предпочтений и характеристик его владельца. Методы совершенного хеджирования не учитывают ожиданий держателя срочной позиции, его отношение к риску, а также особенности его инвестиционной стратегии.

Новый подход к управлению риском срочной позиции предлагают методы несовершенного хеджирования (*imperfect hedge*). Отличительная черта методов несовершенного хеджирования состоит в том, что конструирование хеджирующей стратегии сознательно допускает возможность возникновения потерь. За счет этого на контролируемом уровне риска высвобождается капитал для новых финансовых операций, что открывает дополнительные возможности для управления риском совокупной инвестиционной стратегии.

Несомненное достоинство методов несовершенного хеджирования заключаются в возможности учитывать ожидания участника рынка и его

отношение к риску. В практическом смысле, для экономического агента, склонного к активным действиям на срочном рынке и готового подвергать себя контролируемому риску, методы несовершенного хеджирования представляют новые инструменты поддержки инвестиционных решений.

Несмотря на перечисленные достоинства методов несовершенного хеджирования, первые шаги на пути их теоретического осмысления были сделаны лишь в 1990-е годы в работах Даффи и Ричардсона (1991) [83], Мельникова и Нечаева (1998) [31], и Феллмера и Лейкерта (1999, 2000) [86, 87]. Более того, исследования были направлены на нахождение математического решения проблемы построения несовершенного хеджа, а обоснование экономической эффективности и целесообразности его применения вообще не проводилось.

Это определило потребность в теоретических разработках, опирающихся на математические модели методов несовершенного хеджирования, но одновременно учитывающих их экономическое содержание, а также в эмпирических исследованиях, посвященных вопросам практического применения этих методов. Осуществление данных исследований является необходимым условием взвешенного внедрения методов научного управления риском в практику работы профессиональных участников российского рынка производных финансовых инструментов.

Вышеизложенное позволяет заключить, что методы несовершенного хеджирования на современном этапе еще недостаточно изучены и требуют активного внимания. Объективная необходимость научного осмысления и комплексного анализа этих методов определили выбор темы диссертационного исследования, а также ее цель, задачи, структуру и содержание исследования.

Целью исследования является изучение новых подходов к ценообразованию и хеджированию финансовых опционов, сравнение этих подходов с традиционно используемыми в финансовой индустрии методами и анализ возможностей их применения на российском срочном рынке.

Для достижения указанной цели были сформулированы следующие **основные задачи**:

- 1) определить роль и место методов несовершенного хеджирования в теории и практике хеджирования финансовых опционов;
- 2) установить экономические преимущества и недостатки различных критериев оптимальности хеджирующей стратегии;
- 3) уточнить область применения методов несовершенного хеджирования и определить оптимальные условия для их использования;
- 4) разработать пошаговый алгоритм для практической реализации методов несовершенного хеджирования в применении к финансовым опционам различного типа и их комбинациям;
- 5) создать компьютерную программу для анализа, сравнения и практического применения методов несовершенного хеджирования;
- 6) разработать механизм поддержки решений о хеджировании с учетом ожиданий экономического агента и его склонности к риску;
- 7) выявить особенности применения этих методов на российском срочном рынке.

Объектом исследования является российский рынок производных финансовых инструментов. В качестве **предмета исследования** выступают ценовые риски держателя срочной позиции.

Информационная база исследования включает данные Фондовой биржи РТС, Московской межбанковской валютной биржи, Банка международных расчетов (Bank for International Settlement), Банка России.

В качестве **методологической основы исследования** были использованы системный подход, методы обобщения и сравнения, методы статистического и стохастического анализа.

Теоретической основой работы являются общепризнанные положения теории хеджирования и ценообразования производных инструментов, а также финансовой инженерии, теории управления риском, теории финансовых рынков и рынка ценных бумаг. При решении конкретных задач использовались методы теории вероятности, в особенности, теории стохастических процессов, а также концепции компьютерного моделирования финансовых рынков, предложенные и обоснованные рядом ученых и практиков фондового рынка (трейдерами, аналитиками и компьютерными специалистами).

Особую роль в выделении проблемной области сыграли труды Ф. Блэка, М. Шоулса, Р. Мертона, А.Н. Ширяева, А.В.Мельникова, Д.О. Крамкова, Н.И. Берзона, В.А. Галанова, Я.М. Миркина, М. Харрисона, Д. Крепса, С. Плиски, Г. Феллмера, С.Н. Волкова и др.

Научная новизна исследования определяется развитием теоретических взглядов в области хеджирования финансовых опционов и экономическим обоснованием возможности применения методов несовершенного хеджирования на практике.

Наиболее существенные элементы приращения научного знания состоят в следующем:

1. Определена роль и место методов несовершенного хеджирования в теории и практике хеджирования срочных позиций.
2. Уточнена область применения методов несовершенного хеджирования и выявлены оптимальные условия для их применения.
3. Разработан пошаговый алгоритм практической реализации методов несовершенного хеджирования в применении к различным опционным позициям.
4. Разработана модель поддержки принятия решений, позволяющая определить оптимальный хеджирующий портфель на основе выбранного критерия оптимальности и информации о характере прогнозов инвестора и его отношении к риску.
5. Создана компьютерная программа, позволяющая проводить сравнительный анализ методов несовершенного хеджирования и оценку их эффективности на примере финансовых опционов различных типов и их комбинаций, а также выполняющая расчет рабочих параметров для применения указанных методов на практике.
6. Проведен сравнительный анализ концепций квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь и выявлены достоинства и недостатки каждого из критериев оптимальности хеджирующей стратегии. Численно показано нарушение свойства аддитивности в методах квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь.
7. Апробированы методы несовершенного хеджирования на возможность их использования в российской практике.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что оно прояснило экономическое содержание методов несовершенного хеджирования и обосновало их выбор в зависимости от ожиданий и отношения к риску экономического агента и от особенностей рынка. Основные положения и

выводы, содержащиеся в диссертации, могут быть использованы при дальнейшем развитии теории хеджирования и ценообразования финансовых опционов, а также теории управления рисками и финансовой инженерии.

Практическая значимость исследования состоит в том, что полученные результаты могут применяться российскими операторами срочного рынка в процессе хеджирования и управления портфелем производных инструментов. В диссертации в развернутом виде описан пошаговый механизм использования методов несовершенного хеджирования для защиты от риска опционных позиций. Кроме того, результаты исследования могут быть использованы при преподавании курсов "Операции с ценными бумагами", "Финансовый инжиниринг", "Производные финансовые инструменты" и для повышения квалификации специалистов срочного рынка.

Апробация результатов исследования. Основные положения работы активно обсуждались на научно-методологических дискуссиях в Государственном университете – Высшей школе экономики и в Университете им. Гете г. Франкфурт-на-Майне (2002-2003 гг.). Практические аспекты исследования были широко обсуждены со специалистами по срочному рынку Российской торговой системы РТС. Ряд положений диссертации был использован при подготовке учебно-методического пособия "Квантильное хеджирование" и нашел применение в учебном процессе Государственного университета – Высшей школы экономики. По теме диссертации автором опубликованы три печатные работы общим объемом 2,5 п.л.

Глава 1. Теоретические аспекты развития срочного рынка и методов хеджирования

1.1. Значение рынка производных инструментов для экономики страны и история его развития

Значение срочного рынка для экономики страны

Рыночная экономика представляет собой совокупность различных рынков. Одним из них является финансовый рынок, на котором осуществляется распределение денежных средств между участниками экономических отношений. Если посмотреть на финансовый рынок во временном разрезе, его можно разделить на два сегмента: кассовый и срочный рынок [11].

Кассовый рынок – это рынок, на котором заключение сделки нацелено на ее незамедлительное исполнение. Момент исполнения преднамеренно не отделяется во времени от момента заключения сделки. В реальности иногда возникает некоторая задержка между ними в силу технических причин, но как правило, она не превышает двух дней. На срочном рынке заключаются срочные сделки. Срочная сделка представляет собой договор между двумя или несколькими сторонами, исполнение которого умышленно отделено во времени от момента его заключения, что непосредственно в нем и зафиксировано [14]. Обычно дата исполнения отстоит от момента заключения сделки более чем на два дня. Важная особенность срочной сделки заключается в том, что условия исполнения оговариваются в момент ее заключения.

На срочном рынке обращаются производные инструменты. Они представляют собой финансовые инструменты, стоимость которых напрямую зависит от цены некоторого базового актива (товара, валюты, акции,

облигации), процентной ставки, фондового индекса, температуры или иного количественного показателя, в общем случае называемого основой (underlying) [4]. В российской терминологии утвердилось понятие "базовый актив", которое используется в расширенном смысле как синоним основы. Как правило, реализация прав по производному инструменту отделена во времени от момента заключения сделки, поэтому в профессиональной литературе производные инструменты часто называют срочным инструментам [11].

По форме реализации прав различают поставку (delivery) и расчет денежными средствами (cash settlement). В первом случае речь идет о поставочных производных инструментах, во втором – о расчетных. Под поставкой понимается смена собственника базового актива путем его передачи или выполнения процедуры перерегистрации права собственности на него. В случае расчетного производного инструмента исполнение сводится к перечислению одной стороной некоторой суммы другой стороне. Размер этой суммы или способ ее расчета оговаривается сторонами в момент заключения сделки.

Срочный рынок является высокодоходным, хотя и очень рискованным полем для инвестирования [26]. На первый взгляд, экономическая польза от срочного рынка кажется совсем незначительной. Сделки по производным инструментам являются для общества игрой с нулевым номинальным исходом – при исполнении контракта проигрыш одной стороны возмещается выигрышем другой. Однако операции с производными инструментами открывают не только огромные возможности для спекулятивной игры, но и приносят реальную пользу всему обществу [23].

Рынок производных инструментов повышает эффективность всего финансового рынка. В широком смысле это означает, что уменьшаются

издержки распределения финансовых ресурсов между участниками экономических отношений. Стоимость осуществления инвестиций снижается, что способствует повышению темпов экономического роста. Особенно следует выделить следующие общественные блага, связанные с использованием производных инструментов.

Во-первых, производные финансовые инструменты открывают участникам рынка новые возможности для управления риском экономической деятельности. Они позволяют разложить его на составляющие. Посредством покупки или продажи этих компонентов компания может сосредоточиться на управлении только определенными видами риска, а остальные риски переложить на других участников рынка, более склонным к ним или способным лучше справиться с ними. С макроэкономической точки зрения производные инструменты способствуют эффективному распределению рисков среди участников экономических отношений.

Во-вторых, участники рынка могут использовать производные инструменты в спекулятивных целях. Спекулянт принимает на себя риски, стремясь получить определенную прибыль на основании своих ожиданий. Он выполняет важную функцию поддержки ликвидности срочного рынка. Поскольку базовые активы многих производных инструментов являются инструментами кассового рынка, срочные операции также увеличивают ликвидность кассового рынка.

В-третьих, рынок производных инструментов открывает новые возможности для арбитражеров [12]. Эти участники рынка стремятся извлечь прибыль за счет одновременного открытия длинной и короткой позиции, у которых стоимости одинаковы, но одна из функций выплат однозначно предпочтительнее другой. Возможны и иные конструкции арбитража, но их идея, как минимум, теоретически всегда может быть сведена описанному

варианту. Помимо поддержания ликвидности, арбитражные операции с использованием производных инструментов способствуют установлению непротиворечивых цен на всем финансовом рынке.

В-четвертых, производные инструменты открывают инвестиционные возможности, которые невозможно осуществить каким-либо иным способом. При помощи финансовой инженерии участники рынка могут разрабатывать индивидуальные решения для конкретных задач экономической деятельности. В частности, производные инструменты дают возможность действовать более гибко в условиях регуляторных ограничений [44].

В-пятых, производные инструменты позволяют достаточно легко и за относительно низкую стоимость использовать эффект финансового рычага (leverage). Это дает возможность достигнуть совершенно новый уровень соотношения между доходностью и риском, который не способна реализовать позиция в инструментах кассового рынка [48].

В-шестых, инструменты срочного рынка понижают транзакционные издержки, в особенности, средних и мелких участников рынка на достижение определенной структуры выплат [108, 109]. Как правило, стандартные модели оценки определяют стоимость производного инструмента как стоимость самофинансируемой стратегии динамического хеджирования, воспроизводящей его выплаты. Однако не каждый участник рынка в состоянии самостоятельно реализовать такую стратегию в силу транзакционных издержек, включающих комиссионные сборы, расходы на зарплату специалистов по хеджированию, техническое обеспечение и прочее. Только крупные компании могут эффективно осуществлять динамическое хеджирование производных инструментов, так как у них обычно имеется сложившаяся инфраструктура, а высокий объем операций позволяет снизить затраты на комиссионные сборы. Как правило, в действительности именно

такие фирмы являются надписателями срочных контрактов, а более мелкие компании выступают в роли покупателей. К примеру, покупка производного инструмента с несколькими базовыми активами позволяет понизить расходы на диверсификацию инвестиционного портфеля.

В-седьмых, срочный рынок выполняет информационную функцию. Многие институты, задействованные в анализе или проведении денежной политики, постоянно анализируют информацию, заложенную в ценах финансовых активов. Благодаря свойственной производным инструментам нацеленности на будущие события, их цены отражают ожидания участников рынка о динамике базового актива в будущем. По сравнению с инструментами кассового рынка, они содержат качественно новую информацию [79, 101]. К примеру, индуцированная волатильность (*implied volatility*) представляет собой рыночную оценку волатильности базового актива в течение срока действия срочного контракта [112]. Кроме того, особые производные инструменты позволяют участникам рынка заключать сделки относительно публикуемых показателей экономической статистики.¹ Цена таких контрактов служит индикатором экономических ожиданий инвесторов.

Эмпирические исследования подтвердили, что применение методов риск-менеджмента на практике способствует успеху коммерческой деятельности компаний. К примеру, в работе Гечи, Минтона и Шранда (1997) [88] изучалось хеджирование валютных рисков 500 наиболее крупных фирм из ежегодного рейтинга журнала "Fortune". Авторы пришли к заключению, что использование валютных производных инструментов оказывает

¹ В октябре 2002 г. Дойче Банк (Deutsche Bank) и Голдман Сакс (Goldman Sachs) внедрили на внебиржевой рынок новый вид опционов, позволяющих заключать сделки на показатели экономической статистики США, такие как индекс промышленного производства, индекс потребительских цен и др.

положительное влияние на потенциал роста компании, измеряемый расходами на научно-исследовательские и конструкторские разработки.

Работа Аллейанниса и Вестона (1998) [57] подтверждает прямую зависимость между применением методов хеджирования и стоимостью компании. Авторы рассматривали использование валютных производных инструментов на выборке из 720 крупных нефинансовых фирм США за период с 1990 по 1995 годы и его воздействие на стоимость компании, выраженной посредством коэффициента Q Тобина. Этот коэффициент представляет собой отношение рыночной стоимости заемного и собственного капитала к текущей восстановительной стоимости активов предприятия [9, стр. 751]. Под восстановительной стоимостью понимается стоимость всех активов, по которой они могут быть замещены на данный момент. Эмпирическое исследование показало, что использование производных инструментов в целях хеджирования увеличивает ценность компании. Статистически значимо было установлено, что коэффициент Q Тобина компаний, хеджирующих валютные риски, в среднем на 5,7% выше, чем аналогичный показатель компаний, не использующих хеджирование. Особенно высока премия за хеджирование у интернациональных компаний.

Производные инструменты имеют важное значение как для всей экономики страны, так и для деятельности отдельных участников экономических отношений, но их применение сопряжено с определенными рисками. Производные инструменты часто используются в рамках общей стратегии управления риском. Для его оценки применяются разнообразные методы риск-менеджмента, которые обычно основываются на моделях ценообразования производных инструментов. Эти модели являются лишь приближением реальности и в некоторых случаях приводят к неверной оценке. Вероятность ошибки в оценке риска финансовой позиции в результате неверного моделирования относится к категории модельного

риска. По мере усложнения позиции в производных инструментах модельный риск увеличивается.

Владелец позиции в производных инструментах также подвержен кредитному риску, который заключается в опасности невыполнения другой стороной или сторонами обязательств по срочному контракту. У срочных контрактов, обращающихся на бирже, этот риск довольно низок благодаря системе клиринга. Большого внимания кредитные риски заслуживают на внебиржевом рынке, где стороны самостоятельно оговаривают характеристики производного инструмента, соответствующие их нуждам, и следят за его исполнением.

Производным инструментам также свойственен риск ликвидности, который отражает способность финансового инструмента быть конвертируемым в денежные средства. Риск ликвидности играет важную роль не только на срочном рынке, но и на других рынках, в особенности в периоды высокой волатильности и сильных экономических потрясений.

Производные инструменты являются важным средством, способствующим в достижении целей индивидуальной стратегии управления рисками. Но как всякие инструменты, они полезны лишь в той мере, в которой известны их возможности и границы. Поэтому чрезвычайно важно, чтобы при использовании производных инструментов участники рынка полностью понимали, как структурированы срочные контракты, какова зависимость между их доходностью и риском, как они реагируют на внезапные изменения экономических условий. Взвешенная стратегия риск-менеджмента, согласованная с целями хозяйственной деятельности компании и подтвержденная надежными эмпирическими исследованиями, является необходимым условием для применения производных инструментов. Только

в этом случае польза от применения инструментов срочного рынка будет наивысшей.

Основные этапы развития мирового рынка производных инструментов

Истоки срочного рынка уходят в историческое прошлое предпринимательской деятельности человека. Некоторые виды производных инструментов, по крайней мере, в концепции существовали еще во времена античности. Одна из самых ранних ссылок на финансовые опционы встречается у Аристотеля, когда он ссылается на историю о Фалесе Милетском в первой книге Политики [1]. Предвидя на основании астрономических данных богатый урожай оливок, Фалес еще до истечения зимы роздал в задаток имевшуюся у него небольшую сумму денег владельцам маслобоен в Милете и на Хиосе. Так как никто с ним не конкурировал, ему удалось дешево законтрактовать их. Он приобрел право за оговоренную заранее плату использовать маслобойни при сборе оливок. Когда богатый урожай привел к повышению арендной платы на маслобойни, он отдавал их на откуп на желательных для него условиях. Грамотно используя эффект рычага, Фалес получил неплохую прибыль, приобретя в современном понимании опцион на использование маслобоен.

Опционы и фьючерсы на акции начали обращаться на бирже Амстердама вскоре после ее открытия в 1611 г. [79]. Также известно, что в 17 – 18 вв. в Японии торговали фьючерсами на рис [82]. Зарождение организованной срочной торговли в США можно отнести к появлению в 1752 г. Нью-Йоркской Продовольственной Биржи. Первая срочная биржа – Чикагская Торговая Палата (СВТ) – образована в 1848 г. для торговли фьючерсными контрактами на сельскохозяйственную продукцию.

Однако действительно бурное развитие срочного рынка началось только в 70-е годы прошлого столетия. Буйный рост мирового объема операций с производными инструментами в последние десятилетия главным образом объясняется тремя причинами – повышением рыночной волатильности, либерализацией рынка и появлением новых технологий.

Отказ от Бреттон-Вудской системы фиксированных валютных курсов и переход западных стран в начале 1970-х к плавающим курсам валют послужил исходным импульсом для более активного использования производных инструментов. В то же время в большинстве стран с рыночной экономикой наблюдалось ослабление влияния правительства на установление ставки рефинансирования, завершившееся его полным отстранением от вмешательства в денежную политику. Вскоре после этого резкий рост цен на нефть в 1980-х привел к скачку инфляции и сильным колебаниям процентных ставок. Волатильность финансовых рынков достигла рекордных уровней за весь период после окончания Великой депрессии.

В ответ на изменения экономических условий финансовые институты разработали новые продукты для управления риском – производные инструменты. Они сделали возможным разложение риска на составляющие и его последующее распределение среди участников рынка, способных наилучшим образом управлять каждым из компонентов. Именно осознание необходимости более эффективной защиты от риска послужило основанием для взрывного роста срочного рынка.

Начиная с середины 1980-х годов, появление мощных и недорогих компьютеров открыло новые возможности для обработки информации и выделения компонентов риска. В целях лучшего обслуживания клиентов финансовые посредники начали предлагать им новые средства для

управления и контроля над финансовыми рисками. Компьютерные технологии ускорили разработку новых инструментов риск-менеджмента и предоставили банкам более совершенные методы для отслеживания и анализа их собственных портфелей. Совершенствование техники и технологии также упростило и удешевило сам процесс заключения сделок и способствовало повышению ликвидности финансовых рынков.

Для оценки величины срочного рынка широко применяется условный эквивалентный номинал (*nominal, notional amount*). Он представляет собой основную сумму, на основании которой определяются выплаты по производному инструменту. Для краткости эту величину часто называют просто номинал. Как правило, обязательства по срочному контракту погашаются посредством денежного перевода или иным способом, стоимость которого рассчитывается на основании условного эквивалентного номинала, но перевод или передача прав собственности на него не производится.

Для всего срочного рынка совокупный условный эквивалентный номинал равен сумме условных эквивалентных номиналов срочных сделок, которые были заключены, но еще не исполнены на определенную дату. У производных инструментов с переменным условным эквивалентным номиналом для расчетов берется основная сумма на дату составления отчета.

Однако условный эквивалентный номинал не всегда адекватно отражает величину финансового риска, перераспределяемого посредством операций на срочном рынке. Он не учитывает такие факторы риска, как курс и волатильность базового актива, ликвидность рынка, кредитоспособность сторон и другие.

Более точно размер срочного рынка позволяет определить валовая рыночная стоимость срочных позиций. Она представляет собой сумму абсолютных

значений стоимости всех открытых позиций, как с положительной, так и отрицательной ценой замещения (replacement value). Цена замещения рассчитывается по рыночным ценам на дату составления отчета и соответствует выигрышу или проигрышу, который возник бы у держателя срочного позиции при ее немедленном закрытии. Обозначение "валовая" указывает, что стоимости срочных контрактов с положительными и отрицательными ценами замещения не сокращаются. Валовая рыночная стоимость не только дает возможность более адекватно оценить размер риска, перераспределяемого посредством операций с производными инструментами, но и позволяет сравнить величины каждого сегмента срочного рынка относительно друг друга.

Сделки с производными инструментами заключаются как на биржевом, так и на внебиржевом рынке. В последние годы на обоих рынках наблюдается бурный рост, о чем свидетельствует рис. 1. На конец первого полугодия 2003 г. условный эквивалентный номинал открытых позиций на мировом биржевом рынке составил 38 триллионов долларов, а на внебиржевом – 170 триллионов.² До конца 2000 г. внебиржевой рынок рос опережающими темпами, но затем средние темпы роста биржевого рынка стали выше.

² Здесь и далее в этой главе используются данные Bank for International Settlements, представленные на сайте <http://www.bis.org/statistics/derstats.htm>

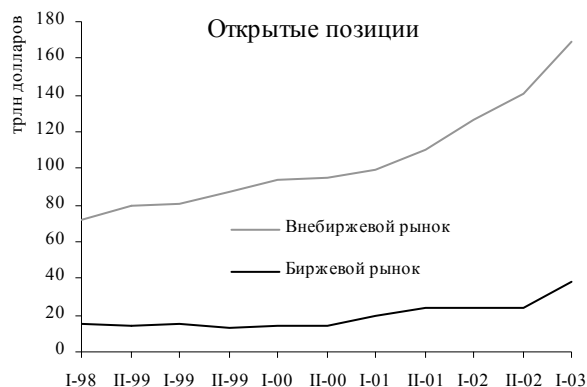


Рис. 1: Условный эквивалентный номинал открытых позиций на мировом срочном рынке

Следует отметить, что результаты измерения активности обоих сегментов срочного рынка с помощью открытых позиций нуждаются в различном толковании и не могут быть непосредственно противопоставлены друг другу. Если участник рынка открывает позицию, противоположную его начальной позиции, то на биржевом рынке это не приводит к изменению открытого интереса, так как позиции сокращаются при клиринге. На внебиржевом рынке открытие противоположной позиции зачастую осуществляется посредством сделок с новыми участниками рынка, что увеличивает величину открытых позиций.

В основном на биржевом рынке обращаются легко стандартизируемые продукты – фьючерсы и опционы. На рис. 2 представлены открытые позиции по этим контрактам на ведущих биржевых площадках мира. С момента начала наблюдений в 1986 г. совокупный условный эквивалентный номинал открытых позиций по фьючерсам увеличился с 400 миллионов до 13,5 триллионов долларов. Он возрос более чем в 35 раз, что соответствует среднегодовым темпам роста 24%.

За период с 1986 г. по третий квартал 2003 г. условный эквивалентный номинал открытых позиций по опционам вырос в 110 раз. В то время как открытые позиции по фьючерсам увеличивались достаточно стабильно в

течение всей истории наблюдений, на рынке опционов в начале 2000 г. произошел качественный скачок. Если до 2000 г. открытые позиции по опционам возрастали в среднем на 27% в год, то в последующие годы темп роста поднялся до 58%. Во втором квартале 2001 г. объем открытых позиций по опционам впервые превысил объем открытых позиций по фьючерсам. К третьему кварталу 2003 г. он достиг 26 триллионов долларов, что почти в два раза выше объема открытых позиций по фьючерсам, оцениваемого на этот момент в 13,5 триллионов долларов.



Рис. 2: Открытые позиции по фьючерсам и опционам на мировом биржевом рынке

Данные об обороте биржевой торговли также свидетельствует о бурном росте. С четвертого квартала 1986 года, объем торгов по фьючерсам вырос с 8 до 162 триллионов долларов. За 17 лет наблюдений он увеличился более чем в 20 раз, что соответствует среднегодовым темпам роста 20%. За этот же промежуток времени оборот торгов по опционам увеличился с 2 до 61 триллиона долларов. Ежегодно он возрастал на 24% и увеличился более чем в 28 раз с момента начала ведения статистики в 1986. Темпы роста не были постоянны за всю историю наблюдений. Если до конца 2000 г. обороты торгов фьючерсами и опционами росли равными, умеренными темпами в 17% в год, то с начала 2001 г. темпы роста увеличился в разы и составил 34% по фьючерсам и 59% по опционам.



Рис. 3: Оборот биржевых торгов фьючерсами и опционами в мире

Следует отметить, что качественный состав биржевой торговли по инструментам остается относительно стабильным в течение всего периода наблюдений. Так, более 96% торговли фьючерсами (как по объему торгов, так и по открытым позициям) приходится на процентные инструменты, около 4% приходится на долю акций, и оставшийся один процент составляет торговля валютными фьючерсами. В опционной торговле доля процентных опционов составляет около 85%, опционы на акции занимают около 14%, и один процент приходится на валютные инструменты.

Биржевой рынок производных инструментов высоко концентрирован географически. Существует несколько основных мировых центров торговли, на которые приходится основной объем операций. В последнее время наблюдается сдвиг торговой активности с рынков Северной Америки на европейские биржи. На рисунке 4 представлено развитие объемов торгов фьючерсами и опционами во времени. На нем отчетливо видно, что в конце 80х – начале 90х годов доля биржевой торговли в Европе и Азии увеличивалась за счет относительного сокращения объемов торгов на биржах Северной Америки. Начиная с 1992 г., доля рынка североамериканских бирж стабилизировалась на уровне около 50%, а развитие торговли в Европе происходило на фоне сокращения относительной роли Азиатских бирж.

Такая динамика во многом объясняется началом азиатского кризиса и консолидацией бирж в Европе.

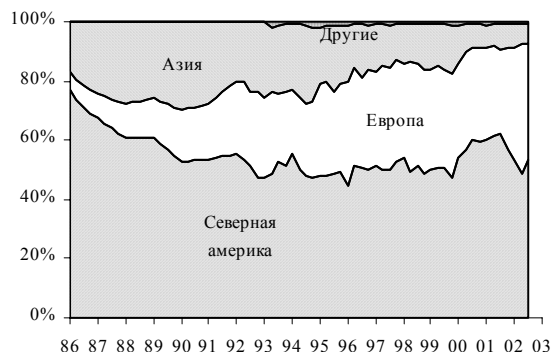


Рис. 4: Относительный объем биржевой торговли фьючерсами и опционами в мире

Значительная часть операций с производными инструментами заключается на внебиржевом рынке. Как правило, такие срочные контракты создаются под нужды клиента. Они заключаются с помощью брокеров или дилеров. Сбор данных о внебиржевой торговле достаточно сложен технически, так как исследователи вынуждены опрашивать ведущих операторов срочного рынка. Развернутое статистическое наблюдение ведется с 1998 г.

За пять лет с первого полугодия 1998 г. по первое полугодие 2003 г. условный эквивалентный номинал открытых позиций на внебиржевом рынке увеличился с 72 до 170 триллионов долларов, что соответствует среднегодовым темпам роста в 41%. На рис. 5 видно, что рост внебиржевой торговли в основном происходил благодаря сильному увеличению объема операций с производными инструментами на процентные бумаги, который возрастал на 53% в год.

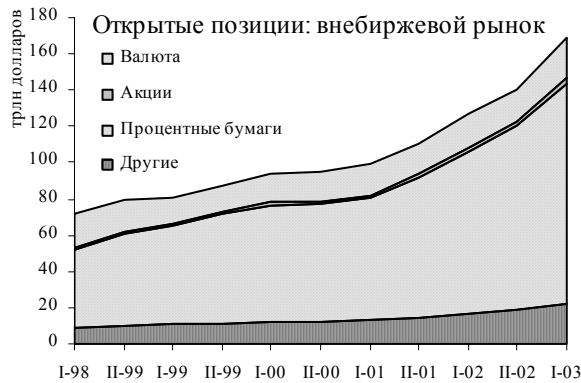


Рис. 5: Открытые позиции на мировом внебиржевом рынке производных инструментов

Как отмечалось выше, более точной мерой интенсивности перераспределения финансовых рисков является рыночная стоимость срочных позиций. На рис. 6 показано, что за пять лет ведения наблюдений она увеличилась с 2,5 до 7,8 триллионов долларов, что соответствует среднегодовым темпам роста в 57%. Особое значение для увеличения рыночной стоимости имел бурный рост операций с производными инструментами на процентные ценные бумаги, в особенности со свопами. В среднем он составлял 86% в годовом исчислении.

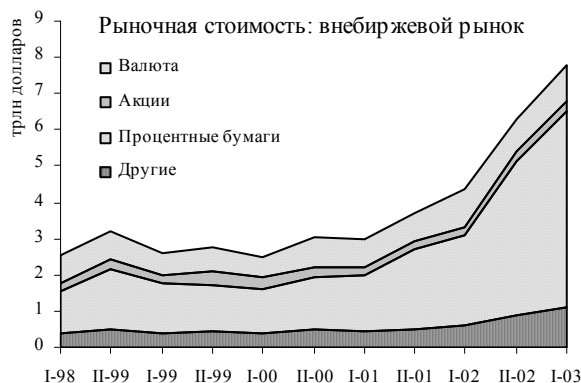


Рис. 6: Рыночная стоимость позиций мирового внебиржевого рынка производных инструментов

За весь период наблюдений стоимость рыночных позиций внебиржевого рынка возрастала неравномерно. Первые два года с начала 1998 г. по конец 1999 г. она колебалась относительно уровня в 2,7 триллиона долларов. Лишь

начиная с 2000 г. ее ежегодный рост составил 114%, и в первом полугодии 2003 г. она достигла 7,8 триллиона долларов.

Основным фактором, способствующим бурному росту срочного рынка, явилось усиление активности операций с процентными производными инструментами. Во многом оно обусловлено сильным подъемом рынка облигаций, наблюдавшимся с начала 2000 г. по середину 2003 г, а также расширению предложения ликвидных краткосрочных производных инструментов на международных рынках межбанковского кредитования.

Особенности развития срочного рынка в России

Важным результатом проводимых в стране структурных преобразований стал существенный рост интереса хозяйствующих субъектов к срочному рынку и увеличение объемов срочных сделок. Развитию данного сектора рынка способствовал стабильный экономический рост и общее улучшение макроэкономических показателей, закладывающее основы для долгосрочного финансового прогнозирования. Участники экономических отношений начали осознавать важность механизма хеджирования, а некоторые из них стали использовать производные инструменты для защиты от риска. Во многом это сделалось возможным благодаря законодательным изменениям в налогообложении прибыли организаций, в том числе полученной по операциям с финансовыми инструментами срочных сделок. Конкуренция среди организаторов торговли в процессе формирования инфраструктуры и порядка функционирования срочного рынка способствовала возникновению технически эффективного механизма ведения торгов и расширению номенклатуры торгуемых инструментов.

Реальные экономические потребности требуют от организаторов и ведущих операторов срочного рынка конструирования значительного числа новых

финансовых инструментов, позволяющих осуществлять хеджирование большинства операций, совершаемых на кассовом рынке. Всестороннее совершенствование рыночных механизмов должно сделать срочные сделки доступными для всех заинтересованных хозяйствующих субъектов.

Оценить совокупный оборот российского срочного рынка достаточно сложно. Статистические данные, позволяющие проводить мониторинг происходящих на нем процессов, большей частью отсутствуют. Публикуемая информация отражает в основном состояние биржевого сегмента рынка, а также выборочно срочные операции кредитных организаций и профессиональных участников рынка ценных бумаг.

Однако имеющиеся данные свидетельствуют о бурном развитии срочного рынка в России. На данный момент уже выделились оба сегмента рынка – биржевой и внебиржевой. Внебиржевой рынок представлен банками и инвестиционными компаниями, которые заключают между собой в основном форвардные сделки с ценными бумагами по прямым договорам без централизованного клиринга. Также в этом сегменте можно выделить внутренний рынок опционов на фондовые активы, которые крупные банки котируют для своих клиентов. Некоторые из участников выставляют котировки и для внешнего рынка [22].

Российский биржевой рынок производных инструментов большей частью сосредоточен на двух торговых площадках – Фондовая биржа РТС (торговая система FORTS) и ММВБ. Пожалуй, РТС является единственной торговой площадкой в стране, поддерживающей сформированный и вполне ликвидный "фондовый" срочный рынок. Оборот региональных бирж, организующих торги фьючерсами и опционами, остается крайне незначительным.

Бум срочного рынка в России имел место в 1997-1998 гг. Основные объемы операций со срочными контрактами в этот период проходили на пяти крупнейших биржевых площадках [6, 19, 20]. После финансового кризиса 1998 года восстановление срочной торговли началось в конце 2001 года. В 2000 году переключение интереса участников рынка ценных бумаг на маржинальную торговлю во многом стало причиной задержки в развитии срочного рынка.

В сентябре 2001 года Фондовая биржа РТС запустила проект FORTS (Futures and Options on RTS). На конец 2003 года участники системы проводят операции с 15 фьючерсными контрактами на акции РАО "ЕЭС России", ОАО "Газпром", НК "ЛУКОЙЛ", ОАО "Ростелеком", ОАО "Сургутнефтегаз" и инвестиционный индекс S&P/RUIX, а также на курс безналичного доллара США и на облигации Городского облигационного (внутреннего) займа Москвы. Опционы представлены тремя парами колл и пут на фьючерсные контракты на акции РАО "ЕЭС России", ОАО "Газпром" и НК "ЛУКОЙЛ".

За 2003 год объем операций с фьючерсами увеличился вдвое с 264 до 544 миллионов долларов, а объем торгов опционами вырос в 6,5 раз с 5 до 45 миллионов долларов. Динамика торговой активности в системе FORTS с октября 2002 по декабрь 2003 года представлена на рис. 7.

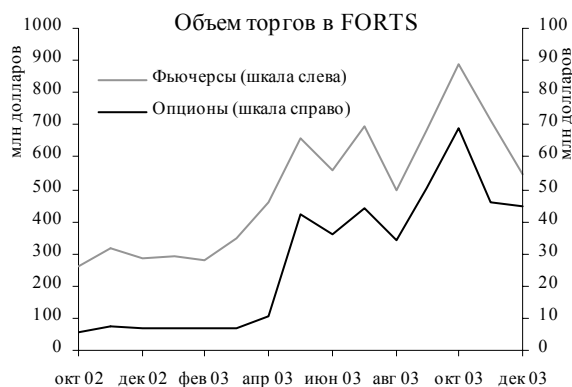


Рис. 7: Объем торгов в системе FORTS.

Фьючерсы и опционы в различной степени востребованы участниками рынка. Структура оборотов торгов в системе FORTS за первое полугодие 2003 году представлена в таблице 1.³ Основная доля оборота приходится на операции с одним единственным контрактом – фьючерсом на акции РАО "ЕЭС России". Популярность опционов находится на довольно низком уровне. Их доля в обороте торгов немногим превышает четыре процента.

Эмитент	Объем
РАО "ЕЭС России", фьючерс	70,61%
НК "ЛУКОЙЛ", фьючерс	11,98%
ОАО "Сургутнефтегаз", фьючерс	5,35%
ОАО "Газпром", фьючерс	3,53%
ОАО "Ростелеком", фьючерс	2,86%
Индекс S&P/RUIX, фьючерс	1,35%
Доллар США, фьючерс	0,34%
РАО "ЕЭС России", опцион	3,72%
ОАО "Газпром", опцион	0,14%
НК "ЛУКОЙЛ", опцион	0,12%

Таблица 1: Структура оборотов торгов в системе FORTS в 2003 году

Восстановление российского срочного рынка после финансового кризиса 1998 года началось с операций с производными инструментами на отдельные акции и валюту. Появление на рынке в конце 2001 года фьючерсных контрактов на фондовый индекс стало началом нового этапа развития "фондового" сегмента срочного рынка. Данный вид контрактов позволяет достаточно просто хеджировать риски, связанные с рыночным изменением котировок акций. Следующим качественным скачком послужило внедрение в конце 2003 г. фьючерса на облигации Городского облигационного

³ по данным Фондовой биржи РТС.

(внутреннего) займа Москвы, заново открывшее сегмент процентных производных инструментов в России.

Несмотря на сильный рост, объем торгов остается на достаточно низком уровне. Доля производных ценных бумаг в совокупном объеме торговли составляет лишь 5%, по сравнению с более 50% для западных рынков.⁴ Это свидетельствует о том, что срочный рынок в России находится на начальном этапе своего развития и указывает на огромные возможности роста.

Остановимся кратко на наиболее значимых макроэкономических последствиях развития срочного рынка для российской экономики. Прежде всего, у российских предприятий и инвесторов появляется новое средство для более эффективного управления риском. Компании могут использовать производные инструменты для защиты от риска. Хеджирование позволяет не только более эффективно распределять риски, но и согласовывать планы хозяйственной деятельности на будущее.

Наличие развитого срочного рынка позволит повысить прозрачность механизма ценообразования на товарных и финансовых рынках, вследствие чего появится возможность для свободной ценовой конкуренции. Тем самым будут снижены возможности злоупотребления доминирующим положением для монополистов, что способствует либерализации рынков нефти, газа, электроэнергии и других.

С появлением нового финансового сектора повысится комплексность развития финансового рынка, что будет способствовать повышению его устойчивости. Возникнет новый сектор финансовых инструментов, оборот

⁴ По оценкам Boston Consulting Group

которых способен отвлечь свободные финансовые ресурсы, и тем самым снизить угрозу инфляции.

С созданием на территории Российской Федерации срочных товарных рынков будет обеспечена основа для перетока срочных операций с нефтью, цветными металлами и другими биржевыми товарами на территорию Российской Федерации. Это повысит роль России в ценообразовании на мировом рынке стратегических товаров. Кроме того, концентрация срочных операций в России будет содействовать развитию финансовой инфраструктуры.

Наконец, возникнет необходимый набор макроэкономических прогнозных индикаторов, что позволит повысить качество макроэкономических прогнозов. Информация, порождаемая срочным рынком, активно используется при разработке макроэкономических прогнозов, стратегии экономического развития, стратегии поведения отдельных экономических агентов. Как для российского Правительства, так и для российских предприятий появится новый мощный источник экономической информации прогнозного характера.

Не вызывает сомнений, что российской экономике остро требуется эффективно функционирующий срочный рынок. К настоящему моменту уже сложились важные предпосылки для его развития. Но несмотря на общее осознание важности срочного рынка для эффективного управления рисками и его положительного влияния на экономику страны, существует целый ряд объективных причин, сдерживающих его развитие.

В первую очередь, к ним нужно отнести отсутствие должного правового регулирования и связанный с ним высокий юридический риск. Требуется законодательное описание основных понятий и технологий срочного рынка, определение порядка функционирования участников рынка и системы

государственного регулирования. Участники срочного рынка должны получить возможность защищать свои требования по производным инструментам в суде. Необходимо зафиксировать отличительные особенности срочных сделок, отделив их тем самым от сделок пари, которые согласно Гражданскому кодексу не являются сделками, оспаривание или востребование обязательств по которым возможно в судебном порядке. Требуется законодательное определение основополагающих понятий и терминов срочного рынка, без которых юридическая защищенность срочных сделок остается невысокой.

Государственным контрольным и надзорным органам должно быть предоставлено достаточное количество полномочий, чтобы они могли надежно обеспечить устойчивость различных сегментов срочного рынка. Вместе с тем, создавая новую правовую среду для срочных сделок, нельзя допустить избыточно жесткого регулирования. Чрезмерное регулирование этого динамичного сегмента финансового рынка неизбежно станет сдерживающим фактором в его развитии. В условиях интеграции мировых финансовых рынков это может привести к обратному результату: срочный рынок станет иностранным по отношению к России.

По причине несовершенства законодательного оформления срочных сделок в России, широкое распространение получило несколько форм ухода торговой активности за рубеж. Цены на экспортные товары России формируются на зарубежных товарных биржах – Лондонской международной нефтяной бирже (IPE), Бирже металлов (LME) и др. Европейские биржи (EUREX) организуют торговлю фьючерсными и опционными контрактами на российские акции. Современные технологии удаленного доступа и законодательные изменения позволяют трейдерам самостоятельно либо с использованием посредников участвовать в торгах на европейских и американских биржах [32].

Дальнейшее укрепление российского срочного рынка, помимо законодательных решений, предполагает комплекс мер, направленных на создание механизмов по защите прав инвесторов и повышение информационной прозрачности рынка. В первую очередь к ним нужно отнести внедрение института неттинга (netting). Он представляет собой процедуру проведения зачета встречных однородных требований и определения обязательств участников сделок. Важность института неттинга для развития срочного рынка видна на следующем примере.

Предположим, между двумя сторонами заключены две срочные сделки, по которым каждая из сторон должна произвести другой стороне некоторые выплаты. Если неттинг отсутствует, в случае банкротства одной из сторон, платежеспособная сторона обязана произвести выплаты по заключенной срочной сделке в оговоренный срок и в полном объеме. В то же время, обязательства некредитоспособной стороны выполняются в очередности, установленной законом о несостоятельности (банкротстве). Как правило, после удовлетворения требований других кредиторов выплаты по срочной сделке составляют лишь некоторую часть от причитающегося объема. В этих условиях эффективное функционирование срочного рынка чрезвычайно затруднено, а заключение срочных сделок возможно только между сторонами, абсолютно доверяющими друг другу. Неттинг дает возможность в случае наступления банкротства одной из сторон зачесть встречные требования по однородным сделкам и свести их к возмещению разности между выплатами по ним. Такая процедура позволяет существенно снизить кредитный риск операций на срочном рынке.

Важным условием повышения эффективности срочного рынка является усиление его информационной прозрачности. Необходимо принятие ряда мер, направленных на стимулирование раскрытия информации о финансовом положении участников рынка, в особенности, сведений об обеспеченности

выполнения обязательств по срочным сделкам. Разработка и внедрение основных принципов договорного оформления срочных сделок и содействие возникновению и распространению устойчивых деловых обычаев работы на срочном рынке весьма важны для слаженного функционирования рынка производных инструментов.

Также следует способствовать повышению капитализации биржевых посредников и снижению рисков, связанных с их услугами. Требуется принять комплекс организационных и технологических мер, направленных на обеспечение финансовой безопасности биржи / клиринговой организации, финансовых посредников и участников рынка посредством гарантий исполнения сделок и прозрачной процедуры урегулирования дефолтов.

Подводя итог положению дел на российском рынке срочных инструментов, следует отметить, что потребность в срочном рынке в нашей стране, безусловно, существует. Пока он находится в тени других сегментов финансового рынка, но его потенциал чрезвычайно велик. К настоящему времени уже заложена серьезная основа для его развития, и в ближайшее время следует ожидать уверенного роста рынка производных инструментов.

1.2. Основные этапы развития теории хеджирования и ценообразования финансовых опционов

О понятии финансового опциона

Под финансовым опционом понимается достаточно широкий круг производных инструментов, который непрерывно увеличивается по мере развития срочного рынка. Финансовый опцион – это ценная бумага (контракт), выпускаемая фирмами, корпорациями, банками и финансовыми институтами и дающая покупателю право купить или продать определенную

ценность (например акцию, облигацию, валюту) в установленный период или момент времени на заранее оговоренных условиях [55, стр. 27]. В широком смысле, финансовый опцион представляет собой вид срочного договора, одна из сторон которого – покупатель – приобретает за вознаграждение право на получение денежных средств или иных выгод, величина и вид которых определяется на основании изменения цены базового актива оговоренным в момент заключения сделки способом. Другая сторона сделки – продавец – обязана исполнить договор по требованию покупателя.

В последнее время повышенное внимание как со стороны теоретиков, так и практиков вызывают реальные опционы [113]. В отличие от финансовых опционов, которые дают их владельцу право на некоторые преимущества в зависимости от изменения цены базового актива, реальные опционы предоставляют право на изменение хода реализации проекта. Например, опцион на отсрочку позволяет владельцу отложить решение по поводу выполнения определенного этапа проекта до некоторого момента времени в будущем. Опцион на изменение масштаба проекта дает возможность увеличить или уменьшить инвестиции в проект, что позволяет гибко реагировать на изменения экономической конъюнктуры. Опцион на выход позволяет компании оставить проект при резком ухудшении рыночных условий. Реальным опционам посвящен обширный круг научных работ, всестороннее рассмотрение которых требует отдельного исследования (см. [58], [72], [73] и [78]). Методы, изучаемые в настоящей работе, могут применяться и по отношению к некоторым видам реальных опционов, но в развернутом виде эта проблематика не рассматривается. В дальнейшем изложении под термином опцион понимается финансовый опцион.

Некоторые опционы могут быть реализованы лишь в определенный момент времени. Их называют опционами Европейского типа. Если владелец

опциона может реализовать его в течение всего срока исполнения, то такой опцион относится к опционам Американского типа.

Наиболее широко известны два вида опционов – колл и пут [4]. Опцион колл (пут) дает его владельцу право, но не обязательство, купить (продать) базовый актив в установленные сроки у продавца опциона по заранее оговоренной цене, называемой ценой исполнения. Они относятся к так называемым простым опционам (plain vanilla options). На эти контракты приходится значительный оборот торгов, но качественно они составляют лишь малую часть всего многообразия опционных продуктов.

Наряду с простыми опционами, на западном рынке широкое распространение получили экзотические опционы. Это еще более гибкие, чем простые опционы, финансовые инструменты, позволяющие конструировать для каждого покупателя индивидуальный профиль выплат (customized payoffs). Первоначально, подобные структуры выплат строились синтетически с помощью линейной комбинации из выплат простых опционов. Но такие построения оказывались слишком дорогими, что привело к выделению экзотических опционов в самостоятельные инструменты срочного рынка.

К экзотическим опционам относятся траекторные опционы (path dependent options), стоимость которых зависит от динамики цены базового актива за весь срок действия опциона. К примеру, опцион лукбек (lookback) дает его владельцу право приобрести или продать базовый актив по наилучшей цене, которая была достигнута в период до исполнения опциона. У азиатского опциона (Asian option) выплаты на момент исполнения определяются разностью между ценой исполнения и усредненным значением цен базового актива на протяжении всего периода до исполнения опциона. Усреднение

может проводиться посредством арифметического, геометрического или взвешенного среднего.

В отдельную группу можно выделить экзотические опционы с нетривиальными функциями выплат, но которые не зависят напрямую от динамики цены базового актива за весь срок действия опционов. К примеру, опцион чужер (chooser) дает его держателю право, в некоторый момент времени в будущем выбирать, будут ли выплаты по нему соответствовать выплатам опциона колл или выплатам опциона пут с одинаковыми сроками и ценами исполнения на оговоренный базовый актив. По бинарному опциону выплачивается фиксированная сумма, если курс базового актива на момент исполнения выше (бинарный колл) или ниже (бинарный пут) оговоренного уровня.

Рынок опционов находится в постоянном развитии, приводящем к возникновению все новых видов опционов. Их разработкой занимается самостоятельная отрасль теории производных инструментов – финансовая инженерия. В настоящей работе основное внимание уделяется простым опционам и их комбинациям. Подробный обзор экзотических опционов и способов их оценки можно найти в [93], [109], [117], [123] и [124].

Истоки теории оценки опционов

Первые упоминания об использовании финансовых опционов встречаются у Аристотеля в истории об античном философе Фалесе Милетском, который более 2500 лет назад заключил в современном понимании опцион колл на использование маслобоен. Правда, Аристотель не оговаривает, в каком размере Фалес уплатил задаток и каким образом он был рассчитан. Это неудивительно, так как до опубликования знаменитой формулы Блэка-Шоулса (1973) [66] отсутствовала теоретически непротиворечивая система

определения стоимости опциона, пригодная к практическому использованию. Однако было бы не совсем правильно относить возникновение теории оценки опционов исключительно к фундаментальным работам Блэка и Шоулса (1973) [66] и Мертона (1973) [108]. Многочисленные ученые трудились над построением теории оценки опционов и производных инструментов в течение многих десятилетий.

Основы теории оценки опционов прослеживаются в трудах французского математика Луи Башелье [60]. Он вывел замкнутую формулу для оценки стандартных опционов колл и пут в своей, ставшей теперь знаменитой диссертации, представленной к защите в Университете Сорбонны в 1900 году. Башелье сделал революционное для своего времени предположение о том, что динамика базового актива может быть описана на основе арифметического броуновского движения. Этим он предвосхитил применение броуновского движения в физике, которое было независимо предложено Эйнштейном спустя пять лет.

Башелье показал, что если процентная ставка равна нулю, стоимость опциона колл на бездивидендную акцию рассчитывается по формуле:

$$C(S, T) = S \cdot \Phi\left(\frac{S - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K \cdot \Phi\left(\frac{S - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \sigma\sqrt{T} \cdot \varphi\left(\frac{S - K}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad (1)$$

где S – курс акции, K – цена исполнения опциона, σ – стандартное отклонение непосредственно курса акции (в противоположность стандартному отклонению доходности), T – срок исполнения опциона. $\Phi(x)$ обозначает функцию стандартного нормального распределения, а $\varphi(x)$ – плотность стандартного нормального распределения.

Башелье намного опередил свое время. Потребовалось более 60 лет исследовательской работы, чтобы появились новые методы оценки опционов. Серьезный недостаток модели Башелье заключается в том, что

дисконтирование будущих платежей в ней не проводится. Также предположение об арифметическом броуновском движении подразумевает, что доходность базового актива следует нормальному распределению. Это означает, что в модели курс базового актива может принимать негативные значения. Поэтому, строго говоря, область ее применения ограничивается оценкой опционов на спреды и другие основы (underlying), которые могут принимать отрицательные значения. Для оценки же опционов на акции, облигации, товары, процентные ставки и другие основы, имеющие только положительные значения, модель Башелье непригодна.

Тем не менее, различные варианты арифметического броуновского движения могут быть использованы для моделирования динамики финансовых инструментов за короткий период времени, в течение которого вероятность резких отклонений в сторону отрицательных значений предполагается пренебрежительно малой. В частности, в настоящее время многие финансовые учреждения применяют концепцию VaR (Value at Risk), стандартный вариант которой основывается на модели Башелье.

Спренкл (1961) [121] одним из первых сделал попытку приспособить подход Башелье к моделированию динамики неотрицательных курсов, предложив использовать логнормальную доходность. Для моделирования динамики базового актива использовалось геометрическое броуновское движение. Спренкл на основании предположения о неприятии риска инвесторами (risk aversion) вывел следующую формулу для оценки опциона колл:

$$C(S, T) = e^{\rho T} S \Phi(d_1) - (1 - A) K \Phi(d_2), \quad (2)$$

$$\text{где } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\rho + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ и } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Параметр ρ обозначает средний темп роста курса акции, а A – коэффициент неприятия риска. Эта формула, хотя внешне и очень близка к формуле Блэка-

Шоулса, не получила широкого распространения, так как требовала оценки слишком многих параметров. Для ее применения необходимо знать коэффициент неприятия риска A и средний темп роста курса акции ρ . В своей статье Спренкл не уделяет вопросам их определения особого внимания.

Вскоре Бонесс (1964) [67] усовершенствовал эту формулу. Он принял во внимание временную стоимость денег и ввел в рассмотрение дисконтирование курса базового актива, используя для этой цели его ожидаемую доходность. Формула преобразилась в следующий вид:

$$C(S, T) = S\Phi(d_1) - K \cdot e^{-\rho T} \Phi(d_2) \quad (3)$$

с такими же d_1 и d_2 , как и в формуле Спренкла (2).

Дальнейший вклад в ее развитие был внесен работой Самуэльсона (1965) [118]. Он предположил, что риск опциона может отличаться от риска базового актива. Обозначив средний темп роста стоимости опциона колл через α , он пришел к следующей зависимости:

$$C(S, T) = S \cdot e^{(\rho - \alpha)T} \Phi(d_1) - K \cdot e^{-\alpha T} \Phi(d_2), \quad (4)$$

где d_1 и d_2 , совпадают с соответствующими показателями формулы Спренкла (2). Модель требует оценки двух экзогенных параметров – ожидаемого темпа роста базового актива ρ и ожидаемого темпа роста опциона колл α . Эти два показателя зависят от уникальных характеристик акции и опциона соответственно. Поскольку ни один из них не наблюдается на рынке, различные участники рынка по-своему оценивают их в зависимости от степени неприятия риска. Таким образом, формула Самуэльсона в значительной степени произвольна. Она не дает ответа, каким образом покупатель и продавец с различным неприятием риска могут договориться о цене опциона.

Несмотря на то, что результаты вышеперечисленных подходов достаточно близки к формуле Блэка-Шоулса, только революционная идея Блэка, Шоулса и Мертона о том, что цена опциона напрямую связана со стоимостью его хеджирования, позволила создать теоретически непротиворечивую модель. Ученые продемонстрировали, что опционная позиция может быть полностью защищена от риска при помощи самофинансируемой стратегии динамического хеджирования, которая в каждый момент времени генерирует выплаты, равные выплатам опциона. Стратегия называется самофинансируемой, если в течение всего срока ее выполнения не вносятся и не высвобождаются дополнительные средства [99]. Простые экономические аргументы показывают, что для продавца и покупателя опциона отсутствуют арбитражные возможности (т.е. способы получить прибыль без риска) тогда и только тогда, когда во всякий момент времени цена опциона равна капиталу самофинансируемой стратегии динамического хеджирования [66, 29, 13, 55].

Блэк и Шоулс показали, что если выполняются некоторые упрощающие предположения, то эта стоимость может быть рассчитана до заключения сделки. Для опциона колл его стоимость определяется по формуле:

$$C(S, T) = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \text{ где} \quad (5)$$

$$\text{где } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ и } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Ключевые преимущества формулы Блэка-Шоулса по сравнению с предыдущими моделями можно выделить в три группы. Во-первых, она позволяет определить динамическую хеджирующую стратегию, воспроизводящую выплаты опциона, которая зависит только от волатильности базового актива и других наблюдаемых параметров, таких как

безрисковая процентная ставка, срок к исполнению опциона, цена исполнения, цена базового актива.

Во-вторых, цена опциона зависит только от волатильности базового актива и величины безрисковой процентной ставки. Блэк и Шоулс показали, что стоимость опциона не зависит степени неприятия риска. Она единственна для всех инвесторов, поскольку опционная позиция может быть полностью защищена от риска. Это решительно отличает формулу Блэка-Шоулса от предыдущих моделей, в которых цена опциона находилась в зависимости от рискованных предпочтения инвесторов.

В-третьих, формула проста для практического применения. Единственным параметром, который нуждается в оценке, является волатильность базового актива.

Как это нередко случается с великими научными открытиями, потребовалось более тридцати лет, чтобы академическое сообщество осознало революционность идей, легших в основу формулы Блэка-Шоулса. Только в 1997 году Шоулсу и Мертону была присуждена нобелевская премия по экономике. Блэк скончался в 1995 году и не смог разделить радость от присуждения высшей научной награды и широкого общественного признания.

Метод Блэка-Шоулса и его обобщения основываются на применении дифференциальных уравнений в частных производных, за счет чего его нередко называют методом оценки при помощи дифференциальных уравнений (differential equations approach). В некоторых случаях дифференциальные уравнения имеют замкнутое решение, что приводит к достаточно простым формулам вроде знаменитой формулы Блэка-Шоулса (5). Однако зачастую дифференциальные уравнения могут быть решены только при помощи численных методов.

Развитие теории хеджирования и ценообразования опционов после открытия модели Блэка-Шоулса

Через несколько лет после открытия модели Блэка-Шоулса Кокс и Росс (1976) [74] представили метод риск-нейтральной оценки (risk neutral valuation). Он открыл путь для разработки множества подходов к оценке опционов с использованием метода биномиального дерева или метода статистических испытаний (метод Монте-Карло) для моделирования стоимости активов в будущем. Риск-нейтральный метод обходит проблему оценки "истинной" ожидаемой доходности и "истинной" ставки дисконтирования. В рамках модели он позволяет принять ожидаемую доходность всех финансовых активов и ставку дисконтирования равными безрисковой процентной ставке. В действительности отношение инвесторы к риску нельзя назвать нейтральным, но при взвешенном моделировании такое предположение приводит к обоснованной оценке стоимости опциона.

Биномиальная модель Кокса-Росса-Рубенштейна основывается на упрощающем предположении о том, что за каждый достаточно короткий период времени курс базового актива может перейти из исходного состояния только в одно из двух возможных состояний. В стандартной модели используется рекомбинационное биномиальное дерево (решетка) с постоянной волатильностью и процентной ставкой. Формула для оценки стоимости опциона выводится при помощи метода обратной индукции. В предельном случае, если устремить длительность каждого периода времени к нулю, полученный результат совпадает с формулой Блэка-Шоулса.

В настоящей работе биномиальная модель Кокса-Росса-Рубенштейна служит основой для представления методов хеджирования опционов, поэтому имеет смысл рассмотреть ее более подробно. Предположим, на рынке имеется два актива – безрисковый банковский счет B_t и рисковый актив S_t . Банковский

счет представляет собой возможность вложения и кредитования под фиксированную процентную ставку r , известную заранее. В роли рискового актива может выступать акция, облигация, товар, валюта или другие торгуемые ценности. Его динамику можно представить с помощью биномиальной модели. В каждый интервал времени стоимость рискового актива может принять только одно из двух значений. Такая процедура моделируется посредством факторов прыжка u и d ($u > d$), на которые умножается курс рискового актива.⁵

$$S_{t+1} = \begin{cases} u \cdot S_t \\ d \cdot S_t \end{cases}$$

Используя мультипликативную зависимость будущего курса рискового актива от его настоящего значения, все возможные в каждый момент времени курсы могут быть изображены с помощью рекомбинационного биномиального дерева (решетки).

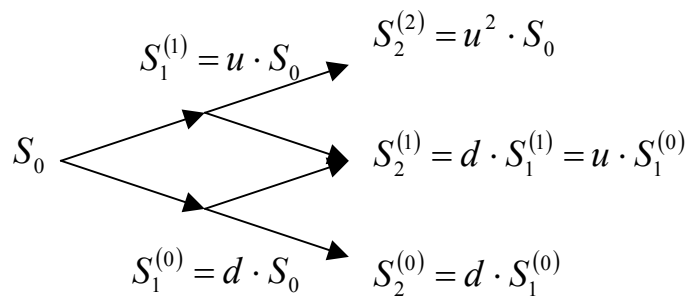


Рис. 8: Биномиальная решетка

Отличительной особенностью биномиальной решетки является наличие узлов, которые могут быть достигнуты различными путями. К примеру, на рисунке 8 курс $S_2^{(1)}$ в момент времени $t=2$ может быть реализован двумя

⁵ Выбор обозначений происходит от английских слов up (вверх) и down (вниз).

способами – либо сначала прыжок вверх, а потом вниз, либо сначала вниз, а потом вверх:

$$S_2^{(1)} = u \cdot d \cdot S_0 = d \cdot u \cdot S_0. \quad (6)$$

Такое свойство биномиальной модели называется независимостью пути (path independence). Она достигается благодаря использованию мультипликаторов u и d для установления зависимости будущего курса от стартового значения. Независимость пути дает возможность однозначно определить каждый узел биномиальной решетки, задав момент времени и количество прыжков в одном направлении, совершенных с момента старта. На рисунке 8 верхний индекс в обозначении курса соответствует количеству прыжков вверх, а нижний индекс указывает на момент времени.

Добавим в рассматриваемую модель рынка производный инструмент C_t со сроком исполнения T , выплаты которого зависят от стоимости рискового актива. Стоимости трех активов рынка в последующие моменты времени T и $T-1$ представлены на фрагменте биномиальной решетки на рисунке 9.

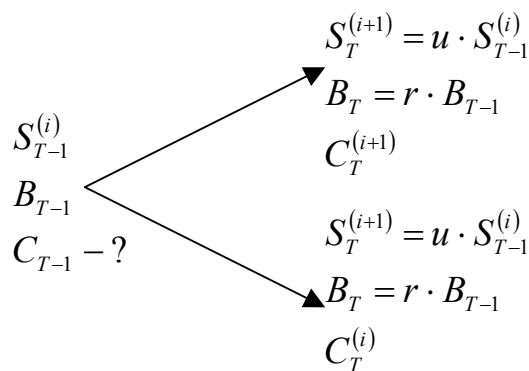


Рис. 9: Фрагмент биномиального дерева

Стоимость рискового актива $S_{T-1}^{(i)}$ и банковского счета B_{T-1} на настоящий момент времени $T-1$ известны. К моменту времени T курс рискового актива может принять два значения, для каждого из которых можно рассчитать выплаты производного инструмента C_T . Задача заключается в определении

стоимости производного инструмента в момент времени $T-1$. Для этой цели построим портфель из рискового актива и банковского счета, выплаты которого в момент времени T совпадают с выплатами производного инструмента в каждом из состояний. Должны выполняться следующие условия:

$$\alpha_{T-1}^{(i)} \cdot S_T^{(i+1)} + \beta_{T-1}^{(i)} \cdot B_T = C_T^{(i+1)} \quad (\text{прыжок вверх})$$

$$\alpha_{T-1}^{(i)} \cdot S_T^{(i)} + \beta_{T-1}^{(i)} \cdot B_T = C_T^{(i)} \quad (\text{прыжок вниз})$$

где $\alpha_{T-1}^{(i)}$ и $\beta_{T-1}^{(i)}$ обозначают количество единиц рискового актива и банковского счета соответственно. Используя зависимости $S_T^{(i+1)} = u \cdot S_{T-1}^{(i)}$ и $S_T^{(i)} = d \cdot S_{T-1}^{(i)}$, приходим к следующим значениям коэффициентов веса:

$$\alpha_{T-1}^{(i)} = \frac{C_T^{(i+1)} - C_T^{(i)}}{S_{T-1}^{(i)} \cdot u - d} \quad (7)$$

$$\beta_{T-1}^{(i)} = \frac{1}{B_T} \cdot \frac{u \cdot C_T^{(i+1)} - d \cdot C_T^{(i)}}{u - d} \quad (8)$$

Выплаты портфеля из $\alpha_{T-1}^{(i)}$ единиц рискового актива и $\beta_{T-1}^{(i)}$ единиц банковского счета совпадают с выплатами производного инструмента в момент времени T . Следовательно, при отсутствии арбитража их стоимости в момент времени $T-1$ равны и составляют:

$$\begin{aligned} C_{T-1}^{(i)} &= \alpha_{T-1}^{(i)} \cdot S_{T-1}^{(i+1)} + \beta_{T-1}^{(i)} \cdot B_{T-1} \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \left[\frac{(1+r) - d}{u - d} \cdot C_T^{(i+1)} + \frac{u - (1+r)}{u - d} \cdot C_T^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Описанную процедуру можно повторить для каждого узла, передвигаясь обратно во времени от конца биномиальной решетки к ее началу. Этот подход лег в основу метода риск-нейтральной оценки.

Выделив в отдельную константу q постоянные факторы прыжка u и d и постоянную процентную ставку по банковскому счету r , формулу для оценки стоимости реплицирующего портфеля можно преобразовать в следующий вид:

$$C_t^{(i)} = \frac{1}{1+r} \cdot [q \cdot C_{t+1}^{(i+1)} + (1-q) \cdot C_{t+1}^{(i)}], \quad (10)$$

$$\text{где } q = \frac{(1+r) - d}{u - d}.$$

Константа q представляет собой искусственную вероятность. Она не несет какого-либо экономического содержания, а выполняет исключительно техническую функцию. Если рынок свободен от арбитража и выполняется условие $u > 1+r > d$, искусственные вероятности принадлежат интервалу от нуля до единицы, не включая границы.

Формулу (10) можно использовать для расчета стоимости производного инструмента в каждом из узлов биномиальной решетки. Для начального узла имеем:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \cdot \sum_{i=0}^T \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} \cdot C_T^{(i)}, \text{ где } \binom{T}{i} = \frac{T!}{i!(T-i)!} \quad (11)$$

Каждое слагаемое i в формуле (11) представляет произведение из искусственной вероятности, что курс базового актива до момента исполнения совершит ровно i прыжков вверх, и выплат производного инструмента в этом случае. Иными словами, стоимость производного инструмента равна дисконтированному математическому ожиданию выплат производного инструмента при искусственной мере вероятности. Вероятность q часто называют риск-нейтральной.

В настоящее время методы Блэка-Шоулса и риск-нейтральной оценки нашли широкое применение для определения стоимости опционов и других

производных инструментов. Они породили новую научную отрасль на стыке экономики, теории вероятностей и математики - финансовую инженерию (financial engineering), специалисты которой занимаются разработкой моделей для оценки производных инструментов.

Метод риск-нейтральной оценки широко использует положения стохастического исчисления для смены вероятностной меры и перехода из реального "физического" мира в мир "риск-нейтральный" и обратно. По этой причине его часто называют методом оценки при помощи стохастического исчисления (stochastic calculus approach). Иногда он приводит к замкнутым решениям, но обычно применяются численные методы. Риск-нейтральный метод более гибок, нежели метод Блэка-Шоулса, что в некоторых случаях позволяет оценить такие производные инструменты, стоимость которых не может быть определена по методу Блэка-Шоулса.

Следует сразу отметить, что реализовать самофинансируемую стратегию репликации не всегда возможно. Финансовые рынки, обладающие тем свойством, что платежная функция всякого опциона воспроизводима в виде капитала некоторой самофинансируемой стратегии, называются *полными* [13]. Указанное свойство позволяет противопоставить опциону эквивалентный набор базовых активов, что чрезвычайно удобно на практике.

В работах Харрисона и Крепса (1979) [90] и Гаррисона и Плиски (1981 и 1983) [91, 92] было показано, что финансовый рынок является полным тогда и только тогда, когда помимо физической меры вероятности существует единственная эквивалентная ей мартингальная вероятностная мера, относительно которой дисконтированные цены активов являются локальными мартингалами. Эти работы вскрыли "мартингальную" структуру свойства рынка быть полным [21, 25].

Основная сложность работы с моделями полного рынка заключается в том, что необходимо точно знать параметры модели. Например, для применения модели Блэка-Шоулса необходимо точное знание краткосрочной процентной ставки и волатильности в каждый момент времени в будущем, что в принципе невозможно. Учет же стохастического характера этих двух переменных приводит к тому, что модель становится неполной, то есть хеджирующая стратегия уже не является самофинансируемой. В этом случае применяется стратегия сверх-хеджирования (суперрепликации), стоимость которой задается как супремум математического ожидания выплат при всех эквивалентных мартингальных вероятностных мерах [86].

Одной из первых работ, посвященных проблематике хеджирования опционов в неполных финансовых рынках, является работа Эль-Каруи и Кунез (1995) [85]. Ученые показали, что общая методика хеджирования производных инструментов на неполных финансовых рынках требует применения достаточно нетривиальных методов стохастической теории. Поскольку многочисленные эмпирические исследования выявили, что волатильность не является постоянной величиной, целый ряд научных работ направлен на ее моделирование. В некоторых работах предполагается зависимость волатильности от цены акции. Целое направление научных исследований посвящено моделированию волатильности как решения стохастического дифференциального уравнения. Их основу составляют работы Халла и Уайта (1987) [97] и Гофмана, Платена и Швейцера (1992) [95]. В работах Андерсена (1994) [59] и Дуана (1995) [81] делается попытка моделирования волатильности как авторегрессионного процесса условной неоднородности (ARCH, GARCH, HARCH,...).

Однако, к сожалению, даже сложнейшие с математической точки зрения модели неполных рынков являются чересчур идеалистическим приближением реальности, что приводит к необходимости введения в

рассмотрение рынков с ограничениями. Примерами ограничений могут служить взимание некоторой платы за открытие короткой позиции по акции, наличие разницы в процентных ставках привлечения и размещения денежных средств, ограничение на объем привлекаемых финансовых ресурсов, законодательные ограничения, транзакционные издержки и т.д.

Для моделей с непрерывными ценами активов методика хеджирования при наличии ограничений была развита в работе Цвитаника и Каратцаса (1993) [77]. Отметим также работу Корна (1995) [106], в которой рассматривалась задача хеджирования в модели с различными процентными ставками привлечения и размещения.

Еще одна возможность приблизить модели к реальности заключается в рассмотрении транзакционных издержек как в узком (комиссионные сборы), так и в широком смысле (расходы на поддержание инфраструктуры, людские ресурсы и др.). Этим вопросам посвящены работы Ширяева А.Н [55], а также Бенседа и др. [64] и Бойл и др.[69].

Отрасль финансовой математики и финансовой инженерии бурно развивается, и постоянно появляются новые научные труды по вопросам хеджирования и ценообразования производных инструментов. В рамках настоящего исследования не представляется возможным охватить весь круг существующих работ, можно выделить лишь их основные классы. Более подробный обзор с описанием тенденций развития финансовой инженерии представлен в книгах [68, 94, 100, 115].

На рисунке 10 приведена рабочая классификация моделей хеджирования и нахождения цены производных инструментов. Ее ядро образуют модели полного рынка, к которым, к примеру, относится знаменитая модель Блэка-Шоулса. Снятие некоторых предположений этой модели (относительно постоянной волатильности, постоянных процентных ставок) приводит к

тому, что не для всех производных инструментов может быть найдена единственная стратегия репликации, то есть рынок становится неполным. В целях дальнейшего приближения к реальности в модели могут вводиться дополнительные ограничения, что позволяет выделить их в отдельный класс. Рассмотрение в моделях транзакционных издержек еще сильнее приближает их к реальности.



Рис 10: Классификация методов хеджирования производных инструментов.

Если взглянуть на совокупность моделей под несколько другим углом, а именно с точки зрения успеха самофинансируемой хеджирующей стратегии, то все многообразие видов хеджирования можно разделить на две группы. Первую группу составляют методы совершенного хеджирования (perfect hedge), направленные на воспроизведение выплат производного инструмента в каждый момент времени и в полном размере. В отсутствие арбитража капитал стратегии совершенного хеджирования определяет стоимость

производного инструмента. Ко второй группе относятся методы несовершенного хеджирования (*imperfect hedge*). В них выплаты производного инструмента сознательно не воспроизводятся в некоторых случаях. За счет риска возникновения потерь достигается выигрыш в стоимости реализации стратегии хеджирования.

В настоящее время стратегии совершенного хеджирования утвердились в качестве стандартного подхода финансовой инженерии, нашедшим широкое признание в теории и практики управления риском. На основании предположений модели капитал таких стратегий задается особенностями рынка и характеристиками производного инструмента. К примеру, в рамках модели Блэка-Шоулса опцион может быть совершенно защищен от риска при помощи динамического хеджа. Для его построения требуется знание шести параметров – процентной ставки, цены и срока исполнения опциона, цены и волатильности базового актива, и, если имеются, выплат базового актива в течение срока исполнения (например, дивиденды) [74]. Все эти параметры либо наблюдаются на рынке, либо достаточно просто оцениваются.

Несомненное достоинство стандартных методов совершенного хеджирования состоит в том, что если выполняются предположения модели, они позволяют найти стоимость срочной позиции вне зависимости от характеристик ее владельца. Однако они не учитывают ожидания держателя срочной позиции, его отношение к риску, а также особенности его инвестиционной стратегии.

Новый подход к управлению риском срочной позиции предлагают методы несовершенного хеджирования. Их главная особенность состоит в том, что при осуществлении хеджирующей стратегии сознательно допускается возможность возникновения потерь. За счет этого риска достигается экономия затрат на хеджирование производного инструмента.

Методы несовершенного хеджирования позволяют защищать срочную позицию от риска в зависимости от ожиданий ее владельца, его склонности к риску и особенностей его инвестиционной стратегии. Хеджирующий портфель может формироваться на основании представлений держателя о будущей динамике базового актива. Экономия капитала хеджирующей стратегии открывает новые возможности для управления риском совокупной инвестиционной стратегии. Снижение стоимости защиты от риска позволяет на контролируемом уровне риска высвободить капитал для новых вложений, что увеличивает степень диверсификации портфеля инвестиций.

Иными словами, методы несовершенного хеджирования открывают новые возможности для более эффективного управления риском срочной позиции с учетом ожиданий ее владельца, его отношения к риску и особенностей его инвестиционной стратегии.

1.3. Методы несовершенного хеджирования

Методы несовершенного хеджирования позволяют понизить стоимость хеджирования за счет принятия риска возникновения потерь. Классическая теория принятия решений предполагает, что, при прочих равных, рациональный участник рынка всегда предпочитает большую прибыль меньшей. Он также избегает риска и готов пойти на него только в том случае, если взамен ему будет предложена компенсация в виде повышенной доходности [122]. Соответственно, проблема управления риском срочной позиции сводится к максимизации ожидаемой доходности при ограничении на допустимый уровень риска или, что, по существу, эквивалентно, к минимизации риска при заданном уровне доходности. В этом заключается основная идея методов несовершенного хеджирования.

Источником риска служит структура открытой позиции. Видоизменяя ее, хеджер может воздействовать на уровень неопределенности. Если допустить,

что в некоторых случаях выплаты срочного контракта не будут воспроизведены или будут воспроизведены не в полном объеме, то возможно снижение расходов на реализацию стратегии репликации за счет риска возникновения потерь в этих случаях. Задача заключается в том, чтобы определить такие состояния, в которых отказ от репликации приводит с наименьшим увеличением риска к наибольшему приращению ожидаемой доходности.

Нахождение оптимальной структуры открытой позиции требует более формального определения понятия риска. До сих пор оно употреблялось в абстрактной форме, как уровень неопределенности относительно возможных потерь от выпуска срочного контракта. Для более точного представления риска необходимо определить источники неопределенности и оценить величину их возможного негативного влияния на прибыльность операции.

Аналитический аппарат теории вероятности наиболее полным образом позволяет количественно описать риск посредством функции распределения целевой величины. Набор параметров распределения дает возможность представить риск в простой и наглядной форме. В литературе по теории принятия решений описано множество рисковых коэффициентов, таких как моменты распределения, медиана, квантили и семивариация [56].

Подходы несовершенного хеджирования можно разделить на три группы в соответствии со способом измерения риска – хеджирование в среднеквадратическом, квантильное хеджирование и хеджирование ожидаемых потерь. *Хеджирование в среднеквадратическом* представляет собой один из наиболее досконально изученных методов несовершенного хеджирования. Он характеризуется тем, что "измерение качества" хеджирующей стратегии осуществляется посредством квадрата разности между терминальным капиталом и платежным обязательством [34]. Основы

этого метода разрабатываются в работе Даффи и Ричардсона (1991) [83], свое дальнейшее развитие он получил в статьях Мельникова и Нечаева (1998) [31] и университетской публикации Швейцера (1999) [119]. Более детальный список работ, посвященных теме хеджирования в среднеквадратичном, приведен в книге Мельникова, Волкова, Нечаева (1998) [34].

Несмотря на то, что метод хеджирования в среднеквадратичном позволяет контролируемо снижать расходы на хеджирование производного инструмента, он обладает присущим всем квадратичным мерам риска недостатком, а именно тем, что как положительные, так и отрицательные отклонения выплат увеличивают риск стратегии. Поскольку этот метод нашел широкое отражение в профессиональной литературе, в настоящей работе его рассмотрение не проводится.

Вторую группу подходов несовершенного хеджирования представляет собой метод *квантильного хеджирования* (quantile hedging). Стоимость производного инструмента определяется в результате взаимодействия ряда факторов, непредвиденное изменение которых обуславливает риск держателя срочной позиции. Риск держателя финансового опциона заключается в непредсказуемых рыночных движениях или внезапных изменениях экономической среды и относится к разряду рыночных рисков [62].

Часто используемой мерой рыночного риска является концепция Value-at-Risk [96]. Ее суть заключается в определении величины наибольших потерь на заданном доверительном интервале. Более формально, метод состоит в нахождении квантиля распределения прибылей и убытков, предполагаемого на заданном промежутке времени в будущем. Если обозначить доверительный интервал через ε , то VaR соответствует нижнему квантилю порядка $1-\varepsilon$. Этот метод дает целостное представление о риске позиции,

измеряет ее экономическую стоимость и допускает сопоставление с родственными мерами риска [103].

С использованием концепции VaR в качестве меры риска, задача нахождения оптимального распределения доходность-риск сводится в область общей теории доверительного статистического оценивания [34]. Одним из основных ее понятий является понятие квантиля, то есть границы области оценки с заданным интервалом. Вследствие этого метод хеджирования опционного контракта, в котором в качестве критерия успеха стратегии используется квантиль распределения прибыли или убытка хеджирующей стратегии, носит название *квантильного*.

В настоящей работе рассматривается стратегия квантильного хеджирования, которая максимизирует естественную вероятность успеха хеджирования при ограничении на стоимость ее реализации. Идея квантильного хеджирования достаточно нова и еще не нашла всестороннего систематического описания в литературе. Она была впервые предложена Г. Феллмером в марте 1995 в контексте стандартной модели Блэка-Шоулса, а ее основные особенности опубликованы в статье Феллмера, Лейкерта (1999) [86]. В этой статье проблема квантильного хеджирования рассматривается с технической точки зрения. Задача решается посредством обобщения метода Куллдорфа (1993) [107] для максимизации вероятности достижения определенного уровня броуновского движения к заданному моменту времени. Применяя формализованный абстрактный подход, авторам удалось сжато представить решение. Впрочем, экономическое содержание метода осталось за рамками доказательства.

Несколько подробнее экономические особенности метода квантильного хеджирования рассматриваются в книге Мельникова А.В. / Волкова С.Н. / Нечаева М.Л. (2001) [34]. После краткого описания математического

алгоритма для определения хеджируемых состояний авторы уделяют больше внимания анализу их структуры. На примере стандартного европейского опциона колл описываются главные характеристики множеств хеджируемых состояний.

В первой части настоящей работы предлагается экономическое обоснование алгоритма для нахождения хеджируемых состояний. Затем рассчитывается структура множества этих состояний, и проводится ее анализ в зависимости от параметров модели. Затраты на реализацию стратегии квантильного хеджирования определяются с помощью воспроизведения структуры выплат хеджируемого актива в застрахованных состояниях. В заключение исследуются характеристики финансовых опционов и особенности рынка, при которых применение метода квантильного хеджирования наиболее результативно.

Тем не менее, основанные на квантиле меры риска полезны в той степени, в которой владелец срочной позиции осознает их ограничения. Следует отметить, что концепция квантильного хеджирования рассматривает только вероятность возникновения потерь и не учитывает их размер. Состояния с крайне высокой и с очень низкой величиной потерь предполагаются одинаково рисковыми. С практической точки зрения, такой подход вызывает критику.

Третью группу подходов несовершенного хеджирования образует концепция *хеджирования ожидаемых потерь* (expected shortfall hedging). Она принимает во внимание размер ожидаемого убытка, и не ограничивается контролем за вероятностью его возникновения. Этот метод определяет риск как математическое ожидание потерь при физической мере вероятности и минимизирует его при ограничении на стоимость хеджирования. Основная идея концепции хеджирования ожидаемых потерь обсуждается в статье

Фоллмера и Лейкерта (2000) [87]. Главным образом, авторы сосредотачиваются на математической формулировке проблемы. Сначала, они описывают отношение инвестора к риску посредством некоторой функции от потерь. Риск убытка определяется затем как математическое ожидание потерь, взвешенных при помощи этой функции. Задача заключается в минимизации риска потерь при условии, что стоимость хеджирования не превышает начальный капитал. Авторы определяют проблему оптимизации в контексте семимартингалов. Затем доказываются существование и единственность решения и определяются состояния, в которых воспроизводятся выплаты производного инструмента. Оптимальная стратегия заключается в хеджировании модифицированного контракта, структура выплат которого совпадает с выплатами первоначального производного инструмента в хеджируемых состояниях. Если участник рынка нейтрален к риску и функция его отношения к риску линейна, то множество хеджируемых состояний определяется с помощью леммы Неймана-Пирсона. В противном случае, авторы представляют метод, позволяющий упростить проблему оптимизации в стандартную форму, допускающую применение этой леммы.

В статье Фоллмера и Лейкерта (2000) [87], главным образом, содержится математическое содержание метода хеджирования ожидаемых потерь. Экономическое обоснование расчетов описывается частично в достаточно ограниченном виде. В настоящей работе представлено экономическое изложение концепции. Вначале мы покажем, как можно определить оптимальную хеджирующую стратегию на основании экономических аргументов. Анализ в рамках модели Блека-Шоулса выявляет основные закономерности метода. Затем мы рассмотрим воздействие характеристик срочного контракта и базового процесса, а также влияние величины

процентной ставки на успех хеджирующей стратегии в рамках биномиальной модели.

Концепции квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь часто описываются в литературе как родственные методы несовершенного хеджирования. Их сопоставление в рамках настоящей работы показывает, что хеджирующая стратегия может быть оптимальна по обоим критериям только при определенных обстоятельствах. В общем случае, структура множества хеджируемых состояний зависит от применяемой концепции. Соответственно, хеджирующий портфель, оптимальный согласно одному критерию, зачастую не оптимален с точки зрения другого критерия.

После того, как основные характеристики обеих концепций будут представлены на примере финансового опциона колл, мы рассмотрим эти методы в применении для хеджирования более сложных портфелей производных инструментов, таких как спреды и комбинации. Для этой цели в настоящем исследовании разрабатывается оригинальная методология для практического применения методов несовершенного хеджирования. Специально разработанная компьютерная программа позволяет не только провести тесты в модельной среде, но и опробовать описанные методы на практике. Основные выводы настоящего исследования представлены в концентрированном виде в заключении.

Глава 2. Квантильное хеджирование

2.1. Нахождение оптимальной структуры выплат хеджирующей стратегии

Рассмотрим финансовый рынок, состоящий из рискового актива S и безрискового банковского счета B , представляющего собой возможность кредитования и вложения под фиксированную процентную ставку r . *Платежным обязательством* с датой погашения T назовем пару (h, T) , где h есть неотрицательная случайная величина, имеющая размерность фильтрации F_T . Экономический агент, отвечающий по этому обязательству, стремится так организовать свою инвестиционную деятельность, чтобы соответствующая инвестиционная стратегия v к дате погашения обязательства принесла капитал $V_T \geq h$. Процедура построения такой стратегии называется хеджированием, а сама стратегия – *хеджирующей стратегией (портфелем)*. Хеджирующая стратегия называется *самофинансируемой*, если за весь срок ее действия не происходит ни вложения извне, ни извлечения капитала из нее. Если в некотором классе хеджирующих стратегий v существует стратегия v^* такая, что $V_t^{v^*} \leq V_t^v$ для всех $t \in [0, T]$, тогда v^* называется *минимальным* (в этом классе) *хеджем* [29, 53, 84].

Рынок является *полным*, если для любого платежного обязательства найдется самофинансируемая хеджирующая стратегия, которая в каждый момент времени и в каждом состоянии воспроизводит его выплаты. В этом случае также говорят, что хеджирующая стратегия *реплицирует* обязательство, и оно называется *достижимым* (attainable) [34].

На полном рынке стоимость платежного обязательства равна капиталу совершенного хеджа. Он соответствует математическому ожиданию

дисконтированных выплат обязательства, рассчитываемому при нейтральной к риску мере вероятности Q [99]. Соответственно, капитал хеджирующей стратегии v на начальный момент времени равен:

$$V_0 = E^Q \left[\frac{V_T}{B_T} \right], \quad (12)$$

где B_T обозначает стоимость единицы банковского счета, а V_T – капитал хеджирующей стратегии на момент погашения обязательства T .

Предположим, что держатель платежного обязательства h располагает капиталом \tilde{V}_0 , меньшим, чем стоимость его совершенного хеджирования V_0 . Он сокращает стоимость защиты от риска, сознательно отказываясь от воспроизведения выплат платежного обязательства в некоторых состояниях. При принятии решения о выборе хеджируемых состояний величина возможных потерь не играет роли. Только вероятность возникновения потерь влияет на решение о воспроизведении выплат в некотором состоянии.

Держатель срочной позиции определяет хеджирующую стратегию v таким образом, что она воспроизводит выплаты платежного обязательства H_T на момент погашения с максимальной физической вероятностью, но стоимость реализации такой стратегии не превышает начальный капитал \tilde{V}_0 . В общем виде проблема может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{V_t} P(V_T \geq H_T) \\ \text{s.t. } V_0 \leq \tilde{V}_0, V_t \geq 0 \text{ для } t \in [0, T] \end{aligned} \quad (13)$$

Решением этой проблемы является хеджирующая стратегия, которая воспроизводит выплаты срочного контракта в некоторых из возможных состояний и оставляет срочный контракт незастрахованным в оставшихся состояниях. Зная хеджируемые состояния, можно определить структуру выплат хеджирующего портфеля. Участник рынка достигает максимальной

вероятности успеха при заданном капитале, воспроизводя эту структуру.

Для простоты изложения метод квантильного хеджирования рассматривается на примере финансовых опционов Европейского типа. Обозначим совокупность состояний ω , в которых капитал хеджирующего портфеля V_T на момент исполнения T больше или равен стоимости платежного обязательства H_T как *множество успешного хеджирования* A :

$$A = \{\omega | V_T(\omega) \geq H_T(\omega)\}, \quad (14)$$

где T обозначает срок исполнения срочного контракта.

Нагляднее это множество можно представить графически. На рисунке 11 изображены выплаты производного инструмента и хеджирующего портфеля на примере биномиального дерева.

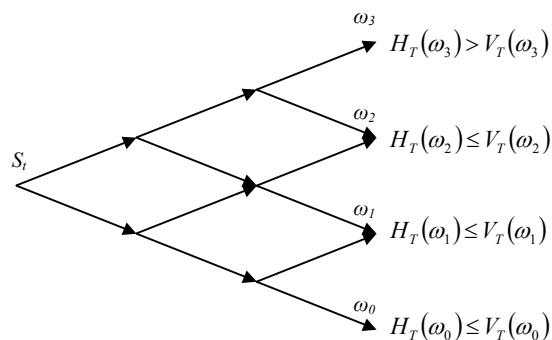


Рис. 11: Множество успешного хеджирования на примере биномиального дерева

В узлах ω_0 , ω_1 и ω_2 хеджирование успешно, и выплаты хеджирующего портфеля V_T покрывают выплаты производного инструмента H_T . Напротив, в узле ω_3 стоимость производного инструмента превышает стоимость хеджирующего портфеля, и держатель срочной позиции терпит убыток. В приведенном примере множество успешного хеджирования состоит из трех элементов:

$$A = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \quad (15)$$

Зная элементы множества успешного хеджирования, можно рассчитать выплаты производного инструмента в хеджируемых состояниях, а затем воспроизвести их структуру с помощью других активов рынка. Вопрос заключается в том, как определить состояния, которые следует хеджировать. Иными словами, необходимо разработать алгоритм, позволяющий рассчитать оптимальную структуру этого множества.

Математически задача состоит в максимизации физической вероятности множества успешного хеджирования A при ограничении, что стоимость хеджирующего портфеля V_0 не превышает начальный капитал \tilde{V}_0 :

$$\text{Max}_A P(A) \quad (16)$$

$$s.t. V_0 \leq \tilde{V}_0, V_t \geq 0 \text{ для } t \in [0, T]$$

$$\text{где } A = \{\omega | V_T(\omega) \geq H_T(\omega)\}$$

$$\text{и } V_T(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$$

Ее решение можно условно разделить на несколько этапов. Вначале предположим, что решением проблемы максимизации является некоторое известное оптимальное множество. Мы определим хеджирующий портфель, выплаты которого покрывают выплаты производного инструмента в каждом состоянии этого множества, а его стоимость не превышает начальный капитал. Затем покажем, что хеджирующий портфель оптимален только в том случае, если его выплаты совпадают с выплатами срочного контракта на множестве успешного хеджирования. Оптимальный хеджирующий портфель имеет наивысшую вероятность успеха, которая может быть достигнута с ограниченным начальным капиталом.

Далее обратимся к вопросу, как определить множество успешного хеджирования. Для этой цели сравним приращение вероятности успеха, которое достигается посредством воспроизведения выплаты платежного

обязательства в некотором состоянии, со стоимостью репликации в этом состоянии. Чтобы сделать сопоставление возможным, представим ограничение на стоимость хеджирующего портфеля в вероятностном виде. Затем в каждом состоянии рассмотрим отношение приращения совокупной вероятности успеха к приращению в стоимости хеджирования. Состояния с наивысшими значениями этого показателя образуют множество успешного хеджирования. Размер этого множества зависит от величины начального капитала или, альтернативно, от заданной вероятности успеха.

Предположим, что множество хеджируемых состояний A известно. Хеджирующий портфель v может быть решением проблемы оптимизации (16) в том случае, если на этом множестве его выплаты покрывают выплаты производного инструмента, а расходы на его создание не превышают начальный капитал \tilde{V}_0 :

$$(i) \quad V_T(\omega) \geq \begin{cases} H_T(\omega), & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

$$(ii) \quad V_0 \leq \tilde{V}_0,$$

Хеджирующий портфель, удовлетворяющий этим двум свойствам, будем называть *допустимым*. Эти характеристики допустимого портфеля не противоречат друг другу. Для любого неотрицательного уровня начального капитала мы всегда можем задать множество успешного хеджирования, расходы на страхование которого не превышают этот уровень. Множество успешного хеджирования будем называть *допустимым*, если на нем существует допустимый хеджирующий портфель. Такое множество может быть пустым, если начальный капитал недостаточен для страхования выплат срочного контракта хотя бы в одном из возможных состояний.

Хеджирующий портфель *оптимален*, если вероятность успешного хеджирования максимальна среди всех допустимых портфелей. Его выплаты

достаточно высоки, чтобы возместить выплаты платежного обязательства на множестве успешного хеджирования, и в тоже время его стоимость минимальна среди всех хеджирующих портфелей, допустимых на этом множестве.

Интересным кандидатом на роль возможного решения проблемы оптимизации служит хеджирующий портфель, выплаты которого в состояниях из множества успешного хеджирования совпадают с выплатами обязательства. Стоимость такого портфеля ниже, чем любого иного портфеля с выплатами в застрахованных состояниях, превосходящими выплаты производного инструмента. Значит, некоторые состояния страхуются дешевле, за счет чего высвобождаются средства для хеджирования дополнительных состояний. Это позволяет расширить множество успешного хеджирования, и, соответственно, повысить вероятность успеха.

Проверим, насколько правильно наше предположение. Обозначим решение проблемы оптимизации (16) через A^* . В этом случае вероятность успеха максимальна, и для любого другого допустимого множества A выполняется неравенство:

$$P(A^*) \geq P(A) \quad (17)$$

Разделим оптимальное множество успешного хеджирования A^* на два непересекающихся подмножества C и D . Подмножество C состоит из состояний, в которых капитал хеджирующего портфеля равен выплатам платежного обязательства, а подмножество D включает те состояния, в которых капитал хеджирующего портфеля строго превышает выплаты обязательства:

$$C = \{\omega | V_T(\omega) = H_T(\omega)\} \quad (18)$$

$$D = \{\omega | V_T(\omega) > H_T(\omega)\} \quad (19)$$

Теперь рассмотрим хеджирующий портфель V_T^* , капитал которого в каждом состоянии из оптимального множества успешного хеджирования A^* равен выплатам платежного обязательства, вне зависимости от того, принадлежит ли оно подмножеству C или D :

$$V_T^*(\omega) = \begin{cases} H_T(\omega), \omega \in C \\ H_T(\omega), \omega \in D \\ 0, \omega \notin C, D \end{cases} \quad (20)$$

Заметим, что хеджирующий портфель V_T^* реплицирует платежное обязательство на множестве успешного хеджирования, но его стоимость ниже, чем портфеля V_T , капитал которого превышает выплаты обязательства хотя бы в одном состоянии, то есть, множество D не пусто. То есть, выполняется следующее условие:

$$D \neq \emptyset \Leftrightarrow E^Q \left[\frac{V_T^*(\omega)}{B_T} \right] < E^Q \left[\frac{V_T(\omega)}{B_T} \right] \quad (21)$$

Оба портфеля V_T^* и V_T охватывают одно и тоже оптимальное множество A^* , но первый из них стоит дешевле. Это означает, что высвобождаются средства на страхование дополнительных состояний, что позволяет расширить множество A^* и, соответственно, повысить вероятность успеха хеджирующей стратегии. Однако мы приходим к противоречию, так как вероятность успеха на оптимальном множестве максимальна и не может быть увеличена. Следовательно, множество A^* не может быть оптимальным.

Этого противоречия можно избежать только тогда, когда выплаты оптимального хеджирующего портфеля V_T^* во всех состояниях множества A^* равняются выплатам платежного обязательства, то есть, когда подмножество D не содержит элементов. В этом случае отсутствует возможность высвобождения капитала. Таким образом, решением проблемы оптимизации является хеджирующий портфель V_T^* , выплаты которого совпадают с

выплатами платежного обязательства в каждом состоянии множества успешного хеджирования.

Отметим, что если начальный капитал ниже стоимости совершенного хеджа, то в непрерывном времени он полностью инвестируется в хеджирующий портфель. В дискретном времени стоимость хеджирующего портфеля может быть меньше, чем начальный капитал. Это возможно в том случае, если после страхования всех состояний из множества успешного хеджирования остаются средства недостаточные для хеджирования дополнительного состояния полностью. Тогда остаток используется для страхования некоторой части выплаты в состоянии с наибольшим вкладом в совокупную вероятность хеджирования.

Для расчета составляющих хеджирующего портфеля и анализа его рисковых характеристик необходимо определить структуру множества успешного хеджирования, то есть обозначить те состояния, в которых воспроизводятся выплаты платежного обязательства. Эти состояния характеризуются высоким вкладом в совокупную вероятность успеха и низкой стоимостью репликации. Добавляя новое состояние во множество успешного хеджирования, держатель платежного обязательства сравнивает увеличение в вероятности успеха с приращением в расходах на защиту от риска. Состояния с наивысшим вкладом в вероятность успеха по отношению к приращению стоимости хеджирования добавляются во множество успешного хеджирования в первую очередь.

Вклад в совокупную вероятность успеха хеджирования соответствует физической вероятности возникновения состояния. Для сопоставления стоимости хеджирования с вероятностью успеха, следует преобразовать ограничение на начальный капитал в проблеме оптимизации (16) в вероятностный вид.

Для перехода от одной вероятностной меры к другой используются производные Радона-Никодима [61]. Идею этого механизма можно представить с помощью следующего примера на основе биномиальной модели. Предположим, имеются две меры вероятности – Q и P . В представленном двухпериодичном фрагменте биномиального дерева они заданы наборами вероятностей скачка $\{p_1, p_2, p_3\}$ и $\{q_1, q_2, q_3\}$.

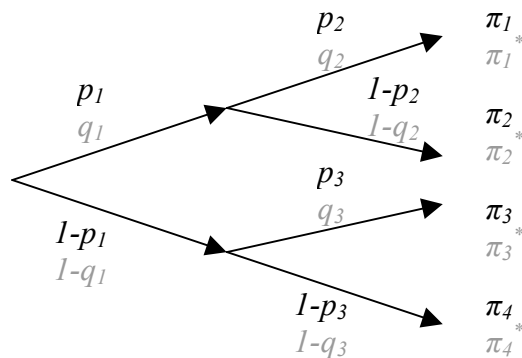


Рис. 12: Смена меры вероятности

Используя эти вероятности, можно рассчитать вероятность π_i и π_i^* наступления состояния i при вероятностной мере P и Q соответственно. С другой стороны, зная вероятности π_i и π_i^* можно рассчитать вероятность каждого скачка при каждой из мер. Иными словами, как наборы вероятностей скачка, так и наборы вероятностей состояний определяют вероятностную меру.

Зная один из наборов вероятностей скачков и соотношения между вероятностями состояний π_i и π_i^* , можно определить вероятности другой меры. Правда, для этого необходимо, чтобы количество состояний с положительной вероятностью возникновения при каждой из мер было не меньше количества возможных скачков. Соотношения между вероятностями состояний π_i и π_i^* называются производными Радона-Никодима:

$$\left(\frac{dQ}{dP}\right)_i = \frac{\pi_i^*}{\pi_i} \quad (22)$$

Они позволяют перейти от одной вероятностной меры к другой. Если вероятностная мера P известна, то зная производные Радона-Никодима, можно определить вероятностную меру Q .

$$\pi_i^* = \left(\frac{dQ}{dP}\right)_i \cdot \pi_i \quad (23)$$

Рассчитав вероятности состояний π_i^* , можно найти вероятности скачков $\{q_1, q_2, q_3\}$, то есть определить вероятностную меру Q .

Согласно уравнению (12), стоимость совершенного хеджа на полном рынке задается, как математическое ожидание дисконтированных выплат платежного обязательства при нейтральной к риску мере вероятности Q . Разделим на нее обе части ограничения на начальный капитал в проблеме оптимизации (16):

$$\frac{E^Q \left[\frac{H_T I_A}{B_T} \right]}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \leq \frac{\tilde{V}_0}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]}, \quad (24)$$

где I_A является индикатором множества A . То есть $I_A(\omega) = 1$, если событие ω принадлежит множеству A , и $I_A(\omega) = 0$ в противном случае [24]. Неравенство (24) эквивалентно:

$$E^Q \left[\frac{\frac{H_T}{B_T}}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \cdot I_A \right] \leq \alpha, \quad (25)$$

где коэффициент α представляет собой отношение начального капитала к стоимости совершенного хеджа:

$$\alpha = \frac{\tilde{V}_0}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \quad (26)$$

Для перехода к новой вероятностной мере Q^* определим производные Радона-Никодима как дробь перед функцией индикатора:

$$\frac{dQ^*}{dQ} = \frac{\frac{H_T}{B_T}}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \quad (27)$$

Отметим, что, если производная принимает нулевое значение в некоторых состояниях, то меры Q и Q^* не эквивалентны. Это осложняет нахождение аналитической зависимости между вероятностью успеха хеджирования и его стоимостью. Мы не можем перейти от меры Q^* обратно к мере Q для некоторых типов производных инструментов, у которых могут быть нулевые выплаты (например, стандартный опцион колл). Тем не менее, мера вероятности Q^* позволят устранить случайную дробь из под знака математического ожидания в ограничении на начальный капитал в проблеме оптимизации (16). При новой мере вероятности Q^* мы имеем:

$$E^{Q^*} [I_A] \leq \alpha \quad (28)$$

Поскольку математическое ожидание от индикатора множества является вероятностью этого множества, проблема максимизации вероятности успешного хеджирования сводится к следующей задаче:

$$\begin{aligned} & \underset{A}{\text{Max}} P(A) \\ & \text{s.t. } Q^*(A) \leq \alpha \end{aligned} \quad (29)$$

В общем случае она решается с помощью численного метода. В каждом состоянии ω рассматривается отношение вклада страхования выплат в естественную вероятность успеха хеджирования к приращению в левой части

ограничения в проблеме (29). Обозначим это отношение через λ :

$$\lambda(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q^*(\omega)} \quad (30)$$

С экономической точки зрения, коэффициент λ представляет собой *относительный вклад в успех хеджирующей стратегии*, который дает воспроизведение выплат платежного обязательства в отдельном состоянии ω . Числитель дроби $P(\omega)$ соответствует приращению вероятности успеха хеджирования. Знаменатель дроби $Q^*(\omega)$ представляет собой условные затраты на страхование состояния ω , необходимые для увеличения совокупной вероятности успешного хеджирования на $P(\omega)$.

Если выплаты платежного обязательства в некоторых состояниях равны нулю, то стоимость их репликации также равна нулю. Эту особенность мы можем проследить на примере коэффициента λ . Если выплаты платежного обязательства в состоянии ω равны нулю, то производные Радона-Никодима для мер Q и Q^* (см. формулу (27)) принимают нулевое значение. Соответственно, вероятность возникновения этого состояния $Q^*(\omega)$ также равна нулю. Тогда коэффициент λ стремится к бесконечности, и состояние автоматически добавляется во множество успешного хеджирования.

Подставив производные Радона-Никодима (27) в определение коэффициента λ (30), мы можем представить его в развернутой форме, как отношение физической и риск-нейтральной вероятности, умноженное на константу:

$$\lambda(\omega) = E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right] \cdot \frac{P(\omega)}{\frac{H_T(\omega)}{B_T(\omega)} \cdot Q(\omega)} \quad (31)$$

Коэффициент λ прямо пропорционален физической вероятности возникновения состояния и обратно пропорционален стоимости репликации выплат срочного контракта в этом состоянии. Если коэффициент $\lambda(\omega)$

достаточно велик, то состояние ω может быть застраховано с высоким вкладом в совокупную вероятность успеха хеджирования при незначительных издержках. И наоборот, низкое значение коэффициента свидетельствует о незначительном приросте вероятности успеха при достаточно высоких затратах. Соответственно, в первую очередь следует хеджировать состояния с наибольшими значениями коэффициента $\lambda(\omega)$, постепенно переходя к более низким показателям. В практическом применении, состояния упорядочиваются по убыванию коэффициента $\lambda(\omega)$ и, начиная с его максимального значения, выплаты производного инструмента в них страхуются до тех пор, пока начальный капитал не будет полностью исчерпан.

Когда множество хеджируемых состояний определено, мы можем рассчитать структуру выплат хеджирующего портфеля. Затем эта структура воспроизводится посредством стратегии динамического хеджирования или при помощи других инструментов рынка. Для заданного уровня начального капитала вероятность успеха хеджирования зависит от характеристики платежного обязательства, свойств базового процесса и величины процентной ставки. В следующей части мы рассмотрим метод квантильного хеджирования в рамках модели Блэка-Шоулса.

2.2. Анализ метода квантильного хеджирования в рамках модели Блэка-Шоулса

Классическая модель Блэка и Шоулса предполагает, что динамика цены базового актива S_t описывается геометрическим броуновским движением [66]:

$$dS_T = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \cdot dW_T^P \quad (32)$$

где W_T^P является винеровским процессом при естественной мере вероятности

P . После преобразования уравнения (32) при помощи леммы Ито-Колмогорова [55] и последующего интегрирования логарифм курса акции на момент исполнения T может быть представлен следующим образом:

$$\ln S_T = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T + \sigma \cdot W_T^P \quad (33)$$

Вследствие нормальности распределения винеровского процесса, логарифм курса базового актива также описывается нормальным распределением при физической мере вероятности P :

$$\ln S_T \stackrel{P}{\sim} N \left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T; \sigma^2 \cdot T \right) \quad (34)$$

Согласно доказательству в предыдущей части, оптимальная стратегия в задаче квантильного хеджирования заключается в репликации модифицированного платежного обязательства с функцией выплат $H_T I_A$, где множество успешного хеджирования A задается как:

$$A = \left\{ \omega \mid \frac{dP}{dQ^*} > c \right\}, \text{ где} \quad (35)$$

$$c = \inf \left\{ a \mid Q^* \left(\frac{dP}{dQ^*} > a \right) \leq \alpha \right\} \quad (36)$$

Отношение dP/dQ^* в непрерывном времени аналогично коэффициенту λ в дискретном случае. Множество успешного хеджирования состоит из состояний, в которых это отношение превышает некоторую границу c . Это ограничение соответствует заданной вероятности успеха $1-\varepsilon$. Используя мультипликативную зависимость между производными Радона-Никодима:

$$\frac{dP}{dQ^*} = \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dQ^*}, \quad (37)$$

определение множества A можно переписать в новом виде:

$$A = \left\{ \omega \left| \frac{dP}{dQ} \right. > c \cdot \frac{dQ^*}{dQ} \right\} \quad (38)$$

Подставим значение производной Радона-Никодима (27) в это выражение:

$$A = \left\{ \omega \left(\frac{dP}{dQ} \right)_T > c \cdot \frac{\frac{H_T}{B_T}}{\mathbb{E}^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \right\} \quad (39)$$

В правой части неравенства только выплаты производного инструмента находятся в зависимости от состояния ω . Остальные параметры представляются собой постоянные величины, которые можно объединить в отдельную константу γ :

$$\gamma = c \cdot \frac{1}{\mathbb{E}^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \quad (40)$$

В новых обозначениях множество успешного хеджирования предстает в сокращенном виде:

$$A = \left\{ \omega \left| \frac{dP}{dQ} \right. > \gamma \cdot H_T \right\} \quad (41)$$

В случае геометрического броуновского движения процесс плотности мартингальной меры Q по отношению к P имеет следующий вид [34]:

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ -\frac{\mu - r}{\sigma} \cdot W_T^P - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \cdot T \right\} \quad (42)$$

Используя уравнение (42), множество успешного хеджирования A задается как:

$$A = \left\{ \omega \mid \exp \left\{ \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot W_T^P + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \cdot T \right\} > \gamma \cdot H_T \right\} \quad (43)$$

Формула (43) позволяет представить его структуру в зависимости от терминального курса базового актива S_T . Для этой цели прибавим, а затем вычтем из выражения под знаком экспоненты следующий трансформированный фрагмент формулы для логарифмированного курса на момент времени T :

$$\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T \right) \cdot \frac{\mu - r}{\sigma^2} \quad (44)$$

Благодаря подстановке, структура множества успешного хеджирования, заданная формулой (43), может быть представлена следующим образом:

$$A = \left\{ \omega \mid \exp \left\{ \frac{\mu - r}{\sigma^2} \cdot \underbrace{\left(\ln S_0 + \frac{1}{2} \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T + \sigma \cdot W_T^P \right)}_{\ln S_T} \right\} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \cdot T - \frac{\mu - r}{\sigma^2} \cdot \left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T \right) \right\} > \gamma \cdot H_T \quad (45)$$

Выражение (45) может быть упрощено к следующему виду:

$$A = \left\{ \omega \mid S_T^{\frac{\mu - r}{\sigma^2}} \cdot \exp \left\{ - \frac{\mu - r}{\sigma^2} \cdot \left(\ln S_0 + \frac{1}{2} (\mu + r - \sigma^2) \cdot T \right) \right\} > \gamma \cdot H_T \right\} \quad (46)$$

Значение экспоненты всегда положительно и не зависит от терминального курса базового актива. Перенесем ее в правую часть неравенства и объединим с константой γ . Тогда множество успешного хеджирования задается согласно:

$$A = \left\{ \omega \mid S_T^{\frac{\mu - r}{\sigma^2}} > g \cdot H_T \right\}, \text{ где} \quad (47)$$

$$g = \gamma \cdot \exp\left\{\frac{\mu - r}{\sigma^2} \cdot \left(\ln S_0 + \frac{1}{2}(\mu + r - \sigma^2) \cdot T\right)\right\} \quad (48)$$

Его форма определяется показателем степени, в которую возводится курс базового актива в формуле (47). Формула (47) служит основой для определения множества успешного хеджирования платежных обязательств различных типов.

Рассмотрим строение множества успешного хеджирования на примере стандартного опциона колл с ценой исполнения K . Здесь возможны два варианта.

В первом случае $(\mu - r)/\sigma^2$ меньше единицы. Тогда степенная функция $S_T^{(\mu - r)/\sigma^2}$ в левой части неравенства выпукла и возрастает монотонно в зависимости от S_T , если средний темп роста μ превышает процентную ставку r , и показатель степени положителен. Если же средний темп роста ниже процентной ставки, то показатель степени отрицателен, и степенная функция вогнута и монотонно убывает. Позднее мы увидим, что множество успешного хеджирования состоит из состояний близких к цене исполнения в этом случае.

Во втором случае $(\mu - r)/\sigma^2$ превышает единицу, и степенная функция $S_T^{(\mu - r)/\sigma^2}$ вогнута и возрастает монотонно. Тогда множество успешного хеджирования состоит из двух областей. Первая область включает состояния близкие к цене исполнения, а вторая содержит состояния, в которых курс базового актива превышает некоторый высокий уровень. Расстояние между областями сокращается, если участник рынка инвестирует больше капитала в хеджирующий портфель. Рассмотрим внимательнее оба варианта оптимальной структуры множества успешного хеджирования.

Вариант 1: $(\mu - r)/\sigma^2 \leq 1$, степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ в формуле (47) выпукла и возрастает или вогнута и убывает

Решение проблемы (47) в случае выпуклой возрастающей степенной функции $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ представлено на рисунке 13. Заштрихованная область отмечает структуру множества успешного хеджирования в зависимости от курса базового актива.

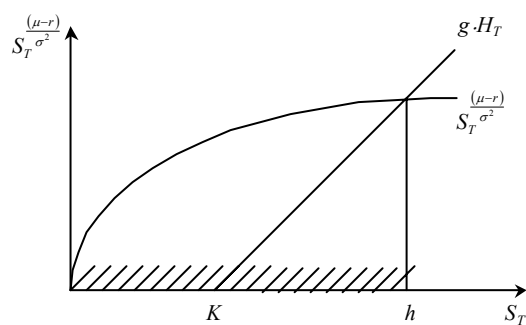


Рис. 13: Ограниченное сверху множество успешного хеджирования в случае квантильного хеджирования на примере опциона колл.

Множество непрерывно и ограничено сверху и в том случае, если процентная ставка r превышает средний темп роста μ , и степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ вогнута и убывает. Таким образом, если выполняется условие $(\mu - r)/\sigma^2 \leq 1$, то множество успешного хеджирования состоит из одной непрерывной области слева от абсциссы точки пересечения h вне зависимости от того, превышает ли средний темп роста μ процентную ставку r или нет.

Множество успешного хеджирования увеличивается, если участник рынка инвестирует больше средств в хеджирующий портфель. Верхняя граница h сдвигается вправо вдоль абсциссы, и дополнительные состояния с более высоким курсом базового актива включаются во множество. Если величина начального капитала приближается к стоимости совершенного хеджа, и вероятность успеха стремится к единице, то граница h устремляется к

бесконечности, и множество успешного хеджирования охватывает все больше и больше состояний. С другой стороны, если участник рынка полностью отказывается от хеджирования, то граница h соответствует цене исполнения K , и это множество содержит только состояния с нулевыми выплатами.

Формально множество успешного хеджирования можно записать следующим образом:

$$A = \{S_T < h\} \quad (49)$$

Константа h определяется в зависимости от заданной вероятности успеха или начального капитала V_0 . При описании курса базового актива с помощью геометрического броуновского движения (32), единственный источник неопределенности в модели выражается посредством винеровского процесса. Из уравнения (33) следует, что на момент исполнения срочного контракта курс базового актива задается, как:

$$S_T = S_0 \cdot e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma \cdot W_T^Q} \quad (50)$$

Подставляя эту формулу в определение множества успешного хеджирования (49), мы получаем:

$$A = \{W_T^Q < b\}, \text{ где} \quad (51)$$

$$b = \frac{1}{\sigma} \cdot \left[\ln \frac{h}{S_0} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \cdot T \right] \quad (52)$$

Винеровский процесс следует нормальному распределению при естественной мере вероятности. Его математическое ожидание равняется нулю, а вариация соответствует длительности процесса, то есть $W_T^P \sim N^P(0; T)$. При переходе к риск-нейтральной мере вероятности Q , он преобразуется следующим образом:

$$W_T^Q = W_T^P + \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot T \quad (53)$$

Соответственно, его распределение при естественной мере P приобретает вид:

$$W_T^Q \sim N^P\left(\frac{\mu - r}{\sigma} \cdot T; T\right) \quad (54)$$

Тогда естественная вероятность успешного хеджирования выражается из уравнений (51) и (52), как:

$$P(A) = \Phi\left(\frac{b - \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot T}{\frac{\sigma}{\sqrt{T}}}\right), \quad (55)$$

где Φ обозначает функцию стандартного нормального распределения. Константа b и, соответственно, верхняя граница h , могут быть представлены в виде функции от вероятности успеха хеджирования $1 - \varepsilon$:

$$b = \sqrt{T} \cdot \Phi^{-1}(1 - \varepsilon) + \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot T \quad (56)$$

Согласно уравнению (52), логарифм верхней границы h зависит от константы b следующим образом:

$$\ln h = \sigma \cdot b + \ln S_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T \quad (57)$$

Структура выплат, представленная на рисунке 13, может быть воспроизведена комбинацией из двух стандартных опционов колл $C_T(K)$ и $C_T(h)$ с ценами исполнения K и h и бинарного опциона колл $CoN_T(h)$ ⁶ с ценой исполнения h :

⁶ Обозначение бинарного опциона CoN является сокращением от его альтернативного английского названия "cash-or-nothing"

$$V_T = \underbrace{[S_T - K] \cdot I_{\{S_T \geq K\}}}_{C_T(K)} - \underbrace{[S_T - h] \cdot I_{\{S_T \geq h\}}}_{C_T(h)} - [h - K] \cdot \underbrace{I_{\{S_T \geq h\}}}_{CoN_T(h)} \quad (58)$$

Стоимость первых двух составляющих рассчитывается по формуле Блэка-Шоулса:

$$C_0(x) = S_0 \cdot \Phi(d_1(x)) - x \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2(x)), \text{ где} \quad (59)$$

$$d_1(x) = \frac{\ln \frac{S_0}{x} + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad (60)$$

$$d_2(x) = d_1(x) - \sigma \cdot \sqrt{T}, \quad (61)$$

где x обозначает соответствующую цену исполнения.

Стоимость бинарного опциона колл определяется на основе мартингального подхода. Нормируя выплаты опциона с помощью банковского счета в качестве нумератора, можно записать:

$$\frac{CoN_0(h)}{B_0} = E^Q \left[\frac{CoN_T(h)}{B_T} \right] = E^Q \left[\frac{I_{\{S_T \geq h\}}}{B_T} \right] = e^{-rT} \cdot P^Q(S_T \geq h) \quad (62)$$

При нейтральной к риску мере вероятности Q логарифмированный курс базового актива следует нормальному распределению следующего вида:

$$\ln S_t \stackrel{Q}{\sim} N \left(\ln S_0 + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot t; \sigma^2 t \right) \quad (63)$$

Тогда риск-нейтральная вероятность, что курс базового актива превысит границу h , равняется:

$$P^Q(S_T \geq h) = P^Q(\ln S_T \geq \ln h) = \Phi(d_2(h)) \quad (64)$$

Подставив полученную риск-нейтральную вероятность в уравнение (62), приходим к стоимости бинарного опциона колл:

$$CoN_0(h) = K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2(h)) \quad (65)$$

Подставим выражение (57) для границы h , как функции от b , в формулы (60) и (61) для расчета $d_1(h)$ и $d_2(h)$:

$$d_1(h) = \frac{\sigma T - b}{\sqrt{T}} \quad (66)$$

$$d_2(h) = -\frac{b}{\sqrt{T}}, \quad (67)$$

Сложив три составляющие стоимости хеджирующего портфеля из уравнения (58), приходим после упрощения к следующему результату:

$$V_0 = S_0 \cdot \left[\Phi(d_1) - \Phi\left(\frac{\sigma \cdot T - b}{\sqrt{T}}\right) \right] - K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot \left[\Phi(d_2) - \Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right) \right] \quad (68)$$

Приведенное выше выражение является замкнутой аналитической формулой для расчета стоимости хеджирования в зависимости от заданной вероятности успеха. Тем не менее, замкнутое решение существует лишь при условии, что отношение $(\mu - r)/\sigma^2$ не превышает единицу. Если это условие не выполняется, то замкнутое решение отсутствует.

Вариант 2: $(\mu - r)/\sigma^2 > 1$, степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ в формуле (47) вогнута и возрастает

В этом случае множество успешного хеджирования состоит из двух областей. На рисунке 14 видно, что степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ пересекает линию ограничения $g \cdot H_T$ в двух точках. Первая область состоит из состояний, в которых курс базового актива близок к цене исполнения. Состояния с курсом базового актива выше определенной границы h_2 образуют вторую область. Границы h_1 и h_2 соответствуют состояниям с равным относительным вкладом в успех хеджирования λ (см. формулу (30)). Участник рынка может увеличить вероятность успеха, инвестируя больше капитала в хеджирующий портфель. Тогда расстояние между двумя областями множества успешного хеджирования сокращается.

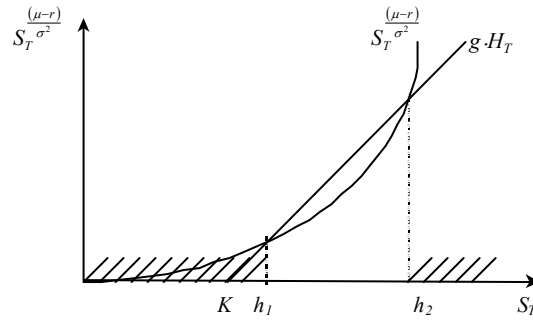


Рис. 14: Множество успешного хеджирования с двумя областями в случае квантильного хеджирования на примере опциона колл

Формально множество успешного хеджирования выражается согласно:

$$A = \{S_T < h_1\} \cup \{S_T > h_2\} \quad (69)$$

что эквивалентно:

$$A = \{W_T^Q < b_1\} \cup \{W_T^Q > b_2\}, \text{ где} \quad (70)$$

$$b_i = \frac{1}{\sigma} \cdot \left[\ln \frac{h_i}{S_0} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T \right], i = 1, 2 \quad (71)$$

Соответственно, обратная зависимость $\ln h_i$ от константы b_i выражается:

$$\ln h_i = \sigma \cdot b_i + \ln S_0 + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T \quad (72)$$

Выплаты хеджирующего портфеля на момент исполнения контракта, представленные на рисунке 14, можно воспроизвести с помощью комбинации из трех опционов колл C_T и двух бинарных опционов колл CoN_T :

$$\begin{aligned} V_T = & \underbrace{[S_T - K] \cdot I_{\{S_T \geq K\}}}_{C_T(K)} - \underbrace{[S_T - h_1] \cdot I_{\{S_T \geq h_1\}}}_{C_T(h_1)} - \underbrace{[h_1 - K] \cdot I_{\{S_T \geq h_1\}}}_{CoN_T(h_1)} \\ & + \underbrace{[S_T - h_2] \cdot I_{\{S_T \geq h_2\}}}_{C_T(h_2)} + \underbrace{[h_2 - K] \cdot I_{\{S_T \geq h_2\}}}_{CoN_T(h_2)} \end{aligned} \quad (73)$$

Для оценки стандартного опциона колл воспользуемся формулой Блэка-

Шоулса, а для нахождения стоимости бинарного опциона колл применим формулу (65). Также воспользуемся формулами (66) и (67) для расчета $d_1(h_i)$ и $d_2(h_i)$, как функций от b_i , $i = 1, 2$. Стоимость хеджирующего портфеля рассчитывается, как сумма его составляющих, и равняется:

$$V_0 = S_0 \cdot \left[\Phi(d_1) - \Phi\left(\frac{\sigma \cdot T - b_1}{\sqrt{T}}\right) + \Phi\left(\frac{\sigma \cdot T - b_2}{\sqrt{T}}\right) \right] \quad (74)$$

$$- K \cdot e^{-rT} \cdot \left[\Phi(d_2) - \Phi\left(-\frac{b_1}{\sqrt{T}}\right) + \Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T}}\right) \right], \text{ где}$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} - \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad (75)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T} \quad (76)$$

В данном случае не существует однозначной зависимости между вероятностью успеха хеджирования и затратами капитала. Решение этой проблемы возможно с помощью численных методов.

2.3. Численный анализ чувствительности метода квантильного хеджирования

Более наглядно алгоритм составления хеджирующего портфеля по методу квантильного хеджирования можно проиллюстрировать на численном примере. Также как и в предыдущей части, предположим, что курс базового актива следует геометрическому броуновскому движению, и средняя ставка роста μ и волатильность σ полностью определяют его динамику. Применяя лемму Ито-Колмогорова к уравнению (32), переходим к динамике логарифмированного курса базового актива в непрерывном времени:

$$dx_t = v \cdot dt + \sigma \cdot dW_t^P \quad (77)$$

$$v = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2, \quad (78)$$

где $x_t = \ln S_t$. Дискретизация процесса возможна с помощью биномиальной модели, представленной на рисунке 15. В каждый момент времени переменная x может либо подняться на уровень $x + \Delta x_u$ с вероятностью p , либо опуститься до уровня $x + \Delta x_d$ с вероятностью $1-p$.

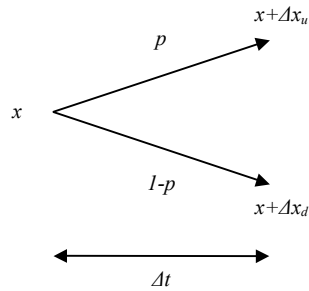


Рис. 15: Биномиальная модель логарифмированного курса базового актива

Для перехода от непрерывного времени к дискретному следует подобрать факторы прыжка и вероятность его направления таким образом, чтобы математическое ожидание и вариация дискретного биномиального процесса совпадали с соответствующими параметрами броуновского движения на заданном промежутке времени Δt [71]. Формально можно записать:

$$E^P[\Delta x] = p \cdot \Delta x_u + (1-p) \cdot \Delta x_d \stackrel{!}{=} v \cdot \Delta t \quad (79)$$

$$E^P[\Delta x^2] = p \cdot \Delta x_u^2 + (1-p) \cdot \Delta x_d^2 \stackrel{!}{=} \sigma^2 \cdot \Delta t + v^2 \cdot \Delta t^2 \quad (80)$$

Мы пришли к системе из двух уравнений с тремя неизвестными и нуждаемся в дополнительном условии, чтобы найти ее решение. Обычно предполагается, что либо вероятности направления, либо абсолютные величины прыжков равны в каждый момент времени. Триворджис показал, что предположение о равенстве прыжков приводит к более высокой точности модели, чем установление вероятности направления прыжка равной половине [126]. Если абсолютные величины прыжка равны, то мы приходим к следующему решению:

$$\Delta x_u = -\Delta x_d = \sqrt{\sigma^2 \cdot \Delta t + \nu^2 \cdot \Delta t^2} \quad (81)$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu \cdot \Delta t}{\Delta x} \quad (82)$$

Формулы (81) и (82) позволяют представить динамику курса базового актива в биномиальной модели. Последовательно реализуя алгоритм для определения множества успешного хеджирования приходим к зависимости относительного успеха хеджирования $\lambda(\omega)$ от курса базового актива. На рисунке 16 она представлена для обоих видов структур этого множества.

Рассматривается опциона колл европейского типа с ценой исполнения $K=100$. Процентная ставка r равняется 0.06, срок действия контракта T равен единице. Базовый процесс начинается на уровне $S_0=100$, его волатильность σ составляет 0.2. В первом случае средняя ставка роста μ составляет 0.09, и выполняется условие $(\mu - r)/\sigma^2 \leq 1$. Во втором случае средняя ставка роста равна 0.12, и отношение $(\mu - r)/\sigma^2$ превышает единицу.

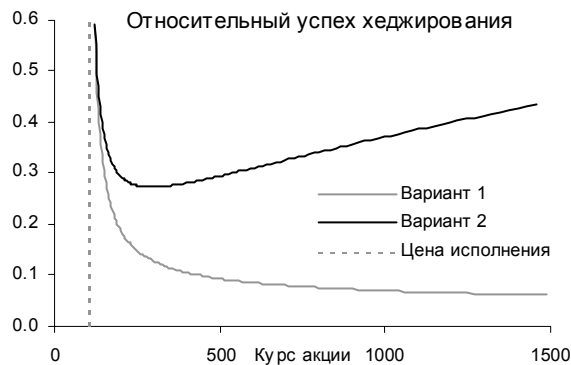


Рис. 16: Относительный вклад в вероятность успеха хеджирования

Численный анализ подтверждает результаты аналитического исследования. В зависимости от величины $(\mu - r)/\sigma^2$ относительный успех хеджирования λ либо строго убывает при возрастании курса базового актива, либо достигает минимума, а затем монотонно возрастает.

В первом случае, $(\mu - r)/\sigma^2$ не превышает единицу, и сначала хеджируются

состояния, близкие к цене исполнения. При дальнейшем понижении коэффициента λ во множество успешного хеджирования добавляются состояния, находящиеся по соседству друг с другом. Образно говоря, оно расширяется вправо, охватывая новые состояния с более высоким курсом базового актива. Заштрихованная область на рисунке 17 представляет собой структуру множества успешного хеджирования в зависимости от вероятности успеха.

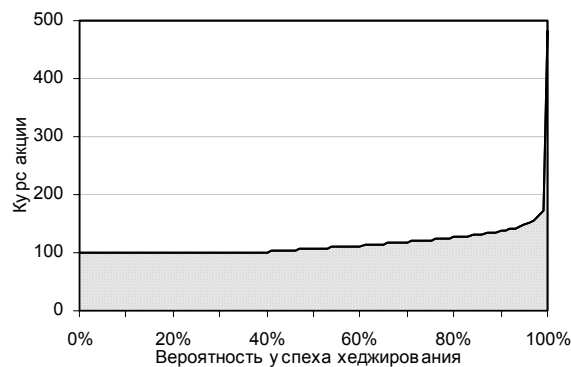


Рис.17: Множество успешного хеджирования, как функция от вероятности успеха, на примере опциона колл, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$.

Во втором случае, когда $(\mu-r)/\sigma^2$ больше единицы, состояния с низким и высоким курсом базового актива чередуются при переходе от большего значения коэффициента λ к меньшему. Тогда множество успешного хеджирования состоит из двух областей, расстояние между которыми сокращается при понижении λ и возрастании вероятности успеха.

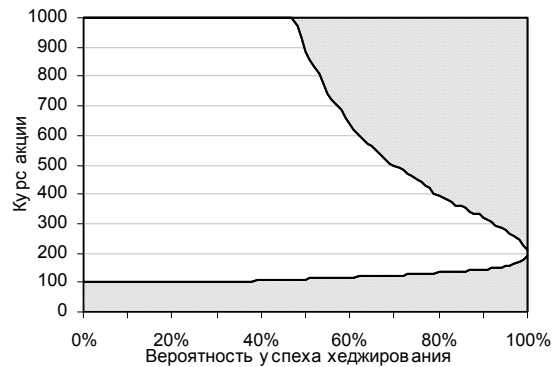


Рис. 18: Множество успешного хеджирования, как функция от вероятности успеха, на примере опциона колл, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 > 1$

Поскольку состояния характеризуются различным относительным вкладом в вероятность успеха хеджирования, то зависимость между вероятностью успеха и стоимостью хеджирования имеет выпуклую форму. Хеджируя состояния с наиболее высокими коэффициентами λ , участник рынка достигает высокого прироста в вероятности успеха при сравнительно низких издержках. Однако требуются гораздо более высокие капиталовложения, чтобы достичь такого же прироста в вероятности успеха, хеджируя состояния с низкими коэффициентами λ .

Относительный вклад в вероятность успеха хеджирования представлен на рисунке 19 как функция от количества застрахованных состояний с ненулевыми выплатами. В качестве примера приведен опцион колл с ценой исполнения 100 и сроком исполнения равным единице. Средний темп роста базового процесса составляет 0.09 и волатильность равна 0.20. Базовый процесс начинается на уровне 100. Процентная ставка составляет 0.06.

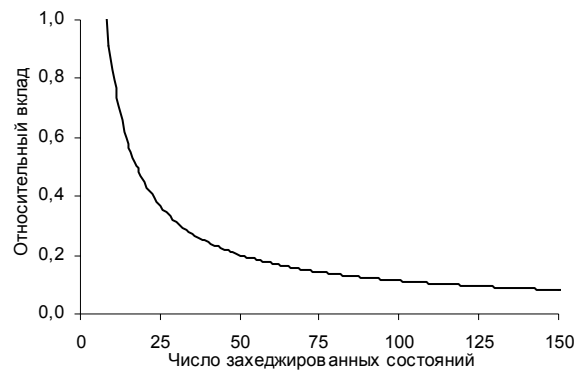


Рис. 19: Относительный вклад в вероятность успеха в зависимости от числа застрахованных состояний с ненулевыми выплатами

Также следует отметить, что хеджирующая стратегия имеет более высокую вероятность успеха, если шансы, что срочный контракт будет исполнен "в деньгах", низки. Состояния с нулевыми выплатами автоматически добавляются во множество успешного хеджирования, не приводя к дополнительным затратам капитала. Это увеличивает вероятность успеха без новых инвестиций в хеджирующую стратегию.

Детерминанты стоимости опционного контракта оказывают непосредственное влияние на успех хеджирующей стратегии. В частности, успех хеджирования зависит от характеристик процесса базового актива. Опцион колл вероятнее окажется в деньгах, если процесс обладает высоким средним темпом роста. В этом случае риск убытка достаточно высок, если держатель опциона отказывается от хеджирования. С другой стороны, если средний темп роста низок, то курс базового актива едва ли превысит цену исполнения. Тогда вероятность успеха хеджирующей стратегии достаточно высока, даже если все состояния оставлены незастрахованными. В этом случае вероятность успеха хеджирования соответствует физической вероятности, что курс базового актива не превысит цену исполнения на момент исполнения контракта. Она выводится из формулы (34) следующим образом:

$$P(S_T \leq K) = N \left(- \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right) \quad (83)$$

Вероятность успеха отрицательно зависит от среднего темпа роста. Более того, она приближается к единице, если средний темп роста настолько низок, что базовый процесс едва ли превысит цену исполнения при заданных параметрах модели. Рисунок 20 показывает вероятность успеха в зависимости от относительной стоимости хеджирования для среднего темпа роста в интервале от -0.50 до 0.50 . Срок исполнения равен 0.25 , а волатильность составляет 0.20 .

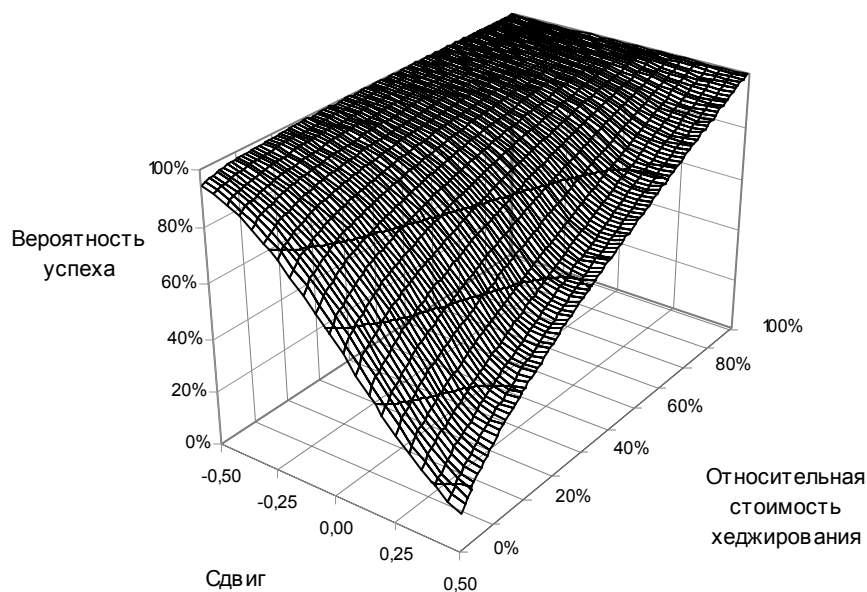


Рис. 20: Вероятность успеха, как функция от среднего темпа роста и стоимости хеджирования (на примере опциона колл)

Если устремить средний темп роста к бесконечности, то базовый процесс почти наверняка превысит цену исполнения, и опцион колл окажется в деньгах. Соответственно, вероятность успеха стремится к нулю, если держатель опциона отказывается от страхования. Напротив, она близка к

единице, если средний темп роста достаточно низок.

Волатильность базового процесса является еще одним фактором, определяющим стоимость финансового опциона. Если средний темп роста положителен, то более вероятно, что на момент исполнения его уровень окажется ниже цены исполнения, если волатильность высока. С другой стороны, если волатильность равна нулю, базовый процесс с положительным средним темпом роста обязательно превысит начальный уровень. Тогда на момент исполнения опцион колл с ценой исполнения, равной начальному уровню процесса, окажется в деньгах, и хеджер будет вынужден возместить его выплаты. С увеличением волатильности возрастают шансы, что процесс завершится ниже цены исполнения, и, соответственно, возрастает вероятность успеха.

Рисунок 21 показывает взаимосвязь между вероятностью успеха и относительной стоимостью хеджирования для волатильности в интервале от нуля до единицы. В качестве примера рассматривается опцион колл с ценой исполнения 100. Средний темп роста 0.09, начальный курс 100, процентная ставка 0.06, срок исполнения равен единице. Однозначно, такой процесс превысит начальный уровень, если волатильность равна нулю. С ее увеличением возрастает вероятность, что процесс завершится ниже начального уровня. Поэтому вероятность успеха зависит от волатильности положительно.

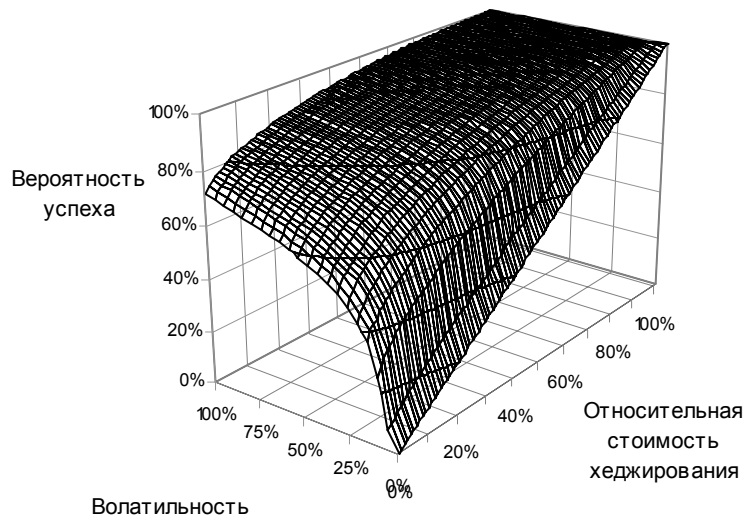


Рис. 21: Вероятность успеха как функция от волатильности и стоимости хеджирования
(на примере опциона колл, средний темп роста положителен)

В другой стороны, процесс с отрицательным средним темпом роста обязательно завершится ниже стартового значения, если волатильность равна нулю. Возрастание волатильности увеличивает шансы, что процесс завершится выше начального уровня. Рисунок 22 показывает вероятность успеха, как функцию от волатильности и стоимости хеджирования. Средний темп роста базового процесса в этом случае отрицателен и составляет -0.09 . На графике видно, что вероятность успеха равна единице, если волатильность равна нулю. При возрастании волатильности вероятность успеха сначала сокращается и достигает минимума, а затем возрастает снова.

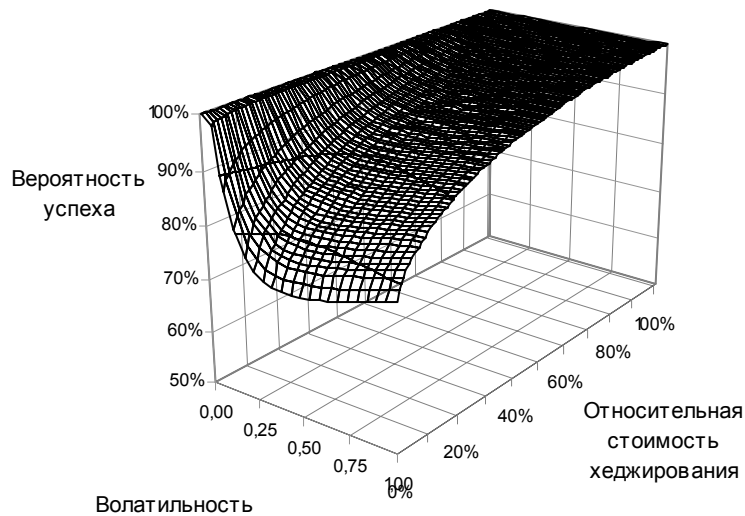


Рис. 22: Вероятность успеха как функция от волатильности и стоимости хеджирования
(на примере опциона колл, средний темп роста отрицателен)

Особенности финансового опциона также важны для взаимосвязи между вероятностью успеха и стоимостью хеджирования. При прочих равных, опцион колл с низкой ценой исполнения скорее окажется в деньгах, чем аналогичный колл, но с более высокой ценой исполнения. Рисунок 23 показывает вероятность успеха в зависимости от цены исполнения. Средний темп роста и волатильность базового процесса составляют 0.09 и 0.20, начальный курс 100. Срок исполнения контракта равен единице, процентная ставка составляет 0.06.

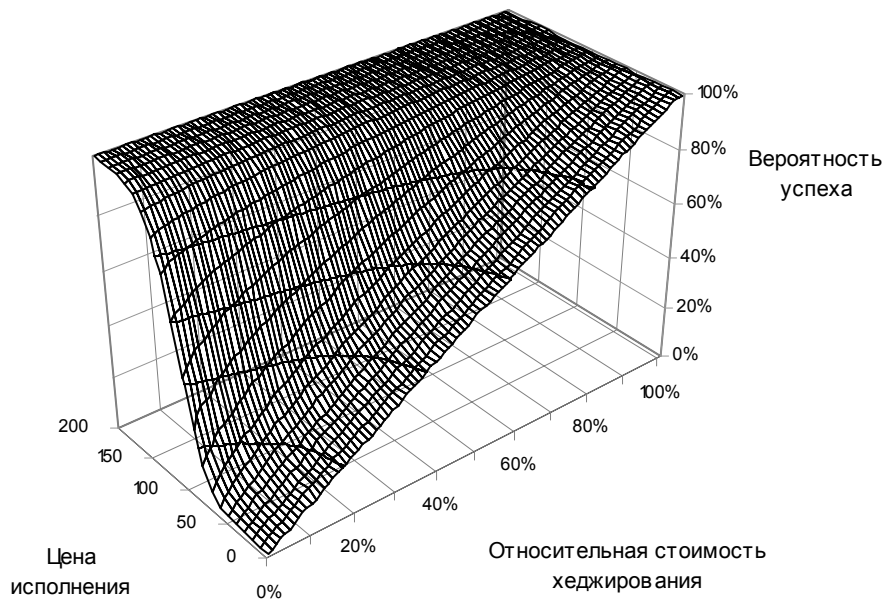


Рис. 23: Вероятность успеха, как функция от цены исполнения и стоимости хеджирования, на примере опциона колл

Срок исполнения является еще одним фактором, определяющим цену финансового опциона. Как и в случае с волатильностью, его воздействие на вероятность успеха хеджирования зависит от среднего темпа роста базового процесса. Если средний темп роста положителен, то с увеличением срока исполнения возрастает вероятность, что опцион колл окажется в деньгах. Соответственно, вероятность успеха понижается при увеличении срока исполнения контракта.

Вероятность успеха в зависимости от срока исполнения и стоимости хеджирования представлена на рисунке 24. Если срок исполнения близок, то опцион колл с ценой исполнения, равной курсу базового актива, может отказаться в деньгах с вероятностью чуть больше половины. При увеличении срока исполнения возрастают шансы, что опцион колл на акцию с положительным средним темпом роста окажется в деньгах. Соответственно, понижается вероятность успеха хеджирования.

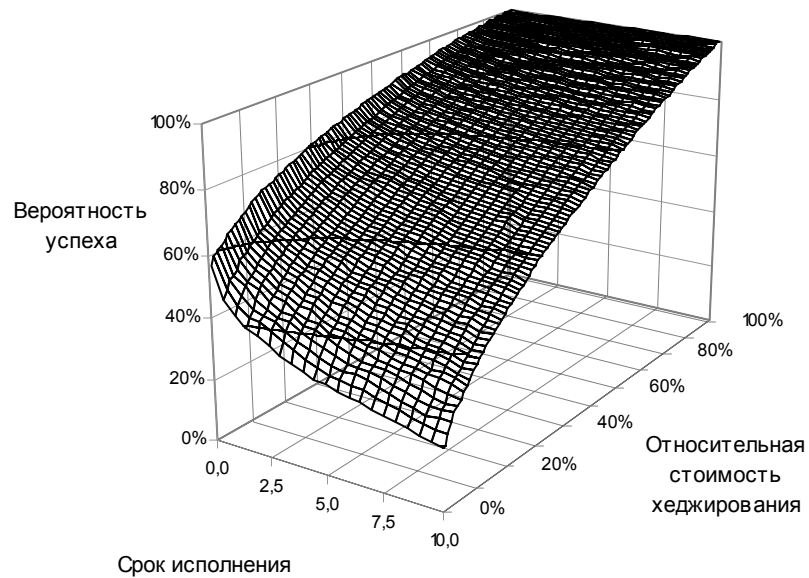


Рис. 24: Вероятность успеха, как функция от срока исполнения и стоимости хеджирования (на примере опциона колл, средний темп роста положителен)

С другой стороны, если средний темп роста базового процесса отрицателен, то с увеличением срока исполнения контракта возрастают шансы, что процесс завершится ниже цены исполнения, и опцион колл окажется вне денег. Соответственно, вероятность успеха положительно зависит от срока исполнения. Вероятность успеха в зависимости от срока исполнения и стоимости хеджирования представлена на рисунке 25.

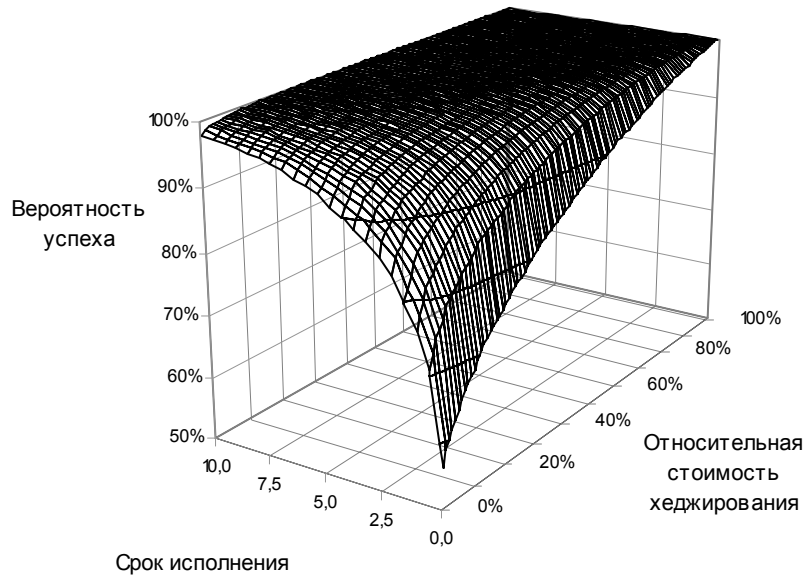


Рис. 25: Вероятность успеха, как функция от срока исполнения и стоимости хеджирования, на примере опциона колл, средний темп роста отрицателен)

Стоимость финансового опциона также зависит от процентной ставки. Хотя ставка процента и не оказывает влияния на физическую вероятность успеха, она воздействует на стоимость страхования и, соответственно, на относительный вклад в успех хеджирования. Рисунок 26 показывает вероятность успеха в зависимости от процентной ставки и стоимости хеджирования.

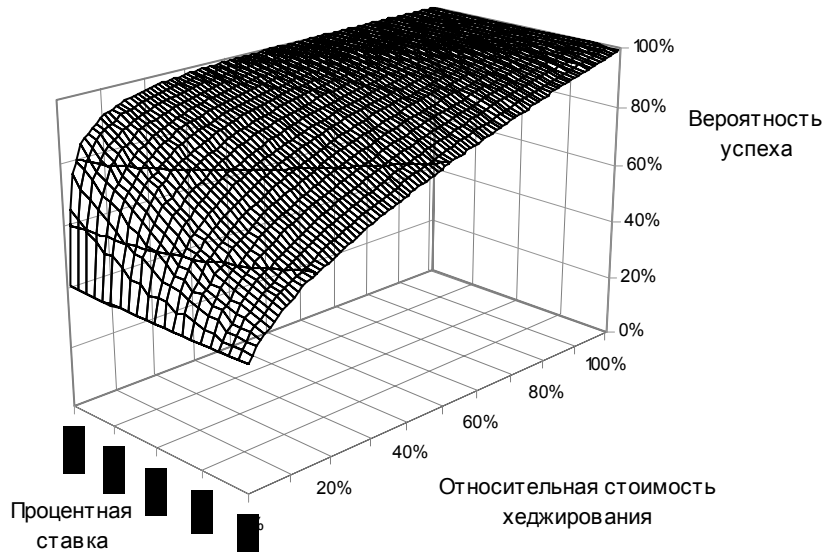


Рис. 26: Вероятность успеха, как функция от процентной ставки и стоимости хеджирования, на примере опциона колл

В случае полного отказа от страхования процентная ставка не оказывает влияния на вероятность успеха. Ее воздействие возрастает, если держатель срочной позиции инвестирует больше капитала в хеджирующую стратегию. При увеличении процентной ставки зависимость между вероятностью успеха и стоимостью хеджирования становится более вогнутой.

Метод квантильного хеджирования позволяет держателю опционной позиции гибко определять оптимальную хеджирующую стратегию. Такая стратегия максимизирует физическую вероятность успеха хеджирования для заданного начального капитала, или альтернативно, минимизирует расходы на хеджирование для достижения определенной вероятности успеха. Успех хеджирующей стратегии в значительной мере зависит от вероятности, что опцион окажется в деньгах. Эта вероятность задает начальный уровень вероятности успеха, когда еще не сделано инвестиций в хеджирующий портфель.

Зависимость между вероятностью успеха и стоимостью хеджирования имеет выпуклую форму. Это объясняется тем, что различные состояния имеют различный вклад в вероятность успеха на единицу капитала. Инвестиция в репликацию выплат в состояниях с высоким относительным вкладом в успех увеличивает вероятность успеха сильнее, чем такая же инвестиция в страхование состояний с низким относительным вкладом.

Детерминанты стоимости финансового опциона, такие как его характеристики, параметры базового процесса и величина процентной ставки оказывают сильное воздействие на эффективность применения метода квантильного хеджирования. Основным эффектом заключается в их воздействии на вероятность, что опцион окажется в деньгах. К примеру, при прочих равных более вероятно, что опцион колл окажется в деньгах, если средний темп роста базового процесса высок или цена исполнения низка. Воздействие других детерминант стоимости производного инструмента может быть сложнее. Вероятность успеха положительно зависит от волатильности базового актива и срока исполнения контракта, если базовый процесс обладает положительным средним темпом роста. Если средний темп роста отрицателен, то срок исполнения оказывает негативное воздействие на вероятность успеха. Тогда увеличение волатильности сначала понижает вероятность успеха, а после достижения минимума, снова увеличивает ее. Процентная ставка оказывает положительное влияние на степень вогнутости взаимосвязи между вероятностью успеха и стоимостью хеджирования.

Концепция квантильного хеджирования уделяет основное внимание вероятности возникновения убытка и не принимает в расчет его размер. Это вызывает критику со стороны практического применения. Концепция хеджирования ожидаемых потерь использует математическое ожидание потерь в качестве меры риска, что позволяет контролировать величину убытка.

Глава 3. Хеджирование ожидаемых потерь

3.1. Нахождение оптимального хеджирующего портфеля

Метод хеджирования ожидаемых потерь представляет собой еще один метод несовершенного хеджирования [87]. Он позволяет сократить расходы на защиту срочной позиции от риска, не воспроизводя ее выплаты в некоторых состояниях и допуская риск возникновения потерь. Метод хеджирования ожидаемых потерь определяет риск как ожидаемый убыток Ψ . Он равняется математическому ожиданию при физической мере вероятности P от потерь, возможных в незащищенных состояниях. Величина убытка в каждом состоянии соответствует разнице между выплатами платежного обязательства $H_T(\omega)$ и выплатами хеджирующего портфеля $V_T(\omega)$:

$$\Psi = E^P[(H_T(\omega) - V_T(\omega)) \cdot I_{\bar{A}}], \quad (84)$$

где $I_{\bar{A}}$ обозначает индикатор множества незащищенных состояний \bar{A} . Это множество содержит состояния, в которых выплаты платежного обязательства $H_T(\omega)$ превышают выплаты хеджирующего портфеля $V_T(\omega)$:

$$\bar{A} = \{\omega | V_T(\omega) < H_T(\omega)\} \quad (85)$$

Использование критерия ожидаемого убытка в качестве меры риска позволяет контролировать не только вероятность возникновения потерь, но и их величину. Экономический агент может сократить расходы на хеджирование, если он готов систематически принимать определенный уровень потерь.

Предположим, что держатель платежного обязательства располагает ограниченным капиталом \tilde{V}_0 , меньшим, чем стоимость совершенного хеджа V_0 . Перед экономическим агентом возникает задача минимизации ожидаемых потерь при ограничении на стоимость хеджирования. Иными словами,

необходимо найти хеджирующую стратегию v , обладающую минимальным ожидаемым убытком, и стоимость которой не превышает начальный капитал.

$$\begin{aligned} & \underset{V_T}{\text{Min}} E^P \left[(H_T - V_T)^+ \right] & (86) \\ & \text{s.t. } V_0 \leq \tilde{V}_0 \text{ и } V_t \geq 0 \text{ для } t \in [0, T] \end{aligned}$$

Для решения этой проблемы необходим критерий, позволяющий определить состояния и размер выплат платежного обязательства, который воспроизводится в этих состояниях. Предположим, что такой критерий существует, и возможно сравнение расходов на хеджирование состояния с убыванием ожидаемого убытка. Выплаты в состояниях с наивысшим вкладом по отношению к единице стоимости хеджирования воспроизводятся в первую очередь. Относительный вклад в успех хеджирования единицы выплаты срочного контракта в таких состояниях выше, и соответственно, выплаты должны воспроизводиться в полном размере.

В непрерывном времени все состояния делятся на два подмножества. Первое подмножество A состоит из состояний, в которых выплаты производного инструмента полностью воспроизводятся. Второе подмножество \bar{A} является его дополнением и содержит состояния, в которых репликация не проводится. Отметим, что множество \bar{A} образуют состояния, в которых выплаты срочного контракта положительны и не застрахованы полностью. Состояния с нулевыми выплатами могут быть застрахованы без дополнительных издержек, и поэтому автоматически включаются во множество успешного хеджирования A .

Проблема оптимизации (86) может быть преобразована в задачу минимизации ожидаемого убытка при ограничении на начальный капитал. Ожидаемый убыток рассчитывается, как математическое ожидание при физической мере вероятности от выплат производного инструмента на

множестве \bar{A} :

$$\begin{aligned} & \underset{A}{\text{Min}} E^P [H_T \cdot I_{\bar{A}}] & (87) \\ & \text{s.t. } V_0 \leq \tilde{V}_0 \text{ и } V_t \geq 0 \text{ для } t \in [0, T], \text{ где} \\ & \bar{A} = \{\omega | V_T(\omega) = 0 \cap H_T(\omega) > 0\} \end{aligned}$$

Решение этой проблемы делится на два этапа. Вначале определяется состояния, в которых следует воспроизводить выплаты контракта. Они образуют множество успешного хеджирования A , которое является дополнением множества \bar{A} . Выплаты производного инструмента воспроизводятся в полном объеме на этом множестве, и держатель срочной позиции не несет убытка, если наступает одно из этих состояний.

На втором этапе структура выплат производного инструмента на множестве успешного хеджирования воспроизводится с помощью других активов рынка или посредством реализации динамической хеджирующей стратегии. В действительности, мы как бы заменяем данное изначально платежное обязательство новым обязательством, выплаты которого соответствуют выплатам изначально платежного обязательства на множестве успешного хеджирования. Совершенное хеджирование модифицированного контракта соответствует хеджированию оригинального контракта методом хеджирования ожидаемых потерь при заданном ограничении на начальный капитал или на допустимый уровень ожидаемых потерь.

Предположим, что множество решений A^* проблемы (87) известно. Выше на примере метода квантильного хеджирования было показано, что хеджирующий портфель v может быть решением проблемы оптимизации (87) в том случае, если на множестве A^* его выплаты возмещают выплаты производного инструмента, а расходы на его создание не превышают начальный капитал \tilde{V}_0 . Такой портфель называется *допустимым* на

заданном множестве. Допустимый хеджирующий портфель является *оптимальным* на некотором множестве, если его капитал на начальный момент времени наименьший среди всех допустимых портфелей этого множества. На примере метода квантильного хеджирования было показано, что допустимый хеджирующий портфель с выплатами, равными выплатам платежного обязательства на множестве успешного хеджирования, имеет наименьшую стоимость среди всех допустимых портфелей этого множества. Значит, он является оптимальным.

Чтобы определить множество успешного хеджирования, противопоставим снижение ожидаемого убытка, которое может быть достигнуто посредством воспроизведением выплат платежного обязательства в некотором состоянии, и стоимость репликации. Состояния с наивысшим относительным вкладом в успех хеджирования образуют множество успешного хеджирования. Его размер зависит от величины начального капитала или, альтернативно, от допустимого уровня ожидаемых потерь.

Выплаты оптимального хеджирующего портфеля V_T соответствуют выплатам платежного обязательства H_T на множестве успеха. На полном рынке стоимость хеджирующего портфеля задается, как математическое ожидание его выплат при нейтральной к риску мере вероятности Q . Подставим ее в ограничение проблемы оптимизации (87):

$$\begin{aligned} \underset{A}{\text{Min}} E^P [H_T \cdot I_A] & \quad (88) \\ \text{s.t. } E^Q \left[\frac{H_T \cdot I_A}{B_T} \right] & \leq \tilde{V}_0 \end{aligned}$$

Преобразуем эту задачу, чтобы сделать возможным сравнение между успехом и стоимостью хеджирования. Вначале перейдем от минимизации ожидаемых потерь к максимизации ожидаемого успеха, что позволит определить целевую функцию и функцию ограничения на одном и том же

множестве. Затем преобразуем проблему оптимизации в вероятностный вид при помощи производных Радона-Никодима.

Численные методы позволяют найти множество успешного хеджирования. Состояния с нулевыми выплатами автоматически добавляются во множество успеха. В каждом состоянии с положительными выплатами рассматривается отношение целевой функции к приращению в ограничении. Высокие значения этого коэффициента указывают на весомый вклад в успех хеджирования. Состояния добавляются во множество успешного хеджирования в порядке убывания этого коэффициента до тех пор, пока начальный капитал не будет полностью израсходован.

Ожидаемый убыток, как функция от индикатора множества успешного хеджирования I_A , выражается согласно уравнению (89):

$$E^P[H_T I_{\bar{A}}] = E^P[H_T (1 - I_A)] \quad (89)$$

что эквивалентно:

$$E^P[H_T (1 - I_A)] = E^P[H_T] - E^P[H_T \cdot I_A] \quad (90)$$

Формула (90) показывает, что минимизация ожидаемого убытка эквивалентна максимизации ожидаемого успеха. Математическое ожидание выплат платежного обязательства не зависит от множества успешного хеджирования. Поэтому целевую функцию можно записать как максимизацию вычитаемого в уравнении (90):

$$\min E^P[H_T \cdot I_{\bar{A}}] \Leftrightarrow \max E^P[H_T \cdot I_A] \quad (91)$$

Соответственно, проблема оптимизации (88) преобразуется в максимизацию ожидаемого успеха при ограничении на начальный капитал:

$$\text{Max } E^P[H_T I_A] \quad (92)$$

$$\text{s.t. } E^Q \left[\frac{H_T I_A}{B_T} \right] \leq \tilde{V}_0$$

Для ее решения воспользуемся подходом, который уже применялся в случае квантильного хеджирования. Прежде всего, изменим меру вероятности таким образом, чтобы под знаком математического ожидания оставалась только функция индикатора. Затем перейдем к вероятностям и построим отношение целевой функции к ограничению. Высокое значение этого коэффициента свидетельствует о том, что состояние должно быть включено во множество успешного хеджирования.

Разделим целевую функцию на физическое математическое ожидание выплат платежного обязательства, чтобы преобразовать ее в вероятностный вид:

$$\text{Max } E^P \left[\frac{H_T}{E^P[H_T]} \cdot I_A \right] \quad (93)$$

Определим производные Радона-Никодима, как дробь при функции индикатора под знаком математического ожидания в выражении (93):

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{H_T}{E^P[H_T]} \quad (94)$$

При новой мере вероятности целевая функция проблемы оптимизации имеет вид:

$$\text{Max } E^{P^*} [I_A] \quad (95)$$

Чтобы преобразовать ограничение в вероятностный вид, разделим обе его части на стоимость платежного обязательства. Она задается, как нейтральное к риску математическое ожидание от его выплат:

$$E^Q \left[\frac{\frac{H_T}{B_T}}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \cdot I_A \right] \leq \frac{\tilde{V}_0}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \quad (96)$$

Определим производные Радона-Никодима, как отношение дисконтированной выплаты платежного обязательства к его стоимости:

$$\frac{dQ^*}{dQ} = \frac{\frac{H_T}{B_T}}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \quad (97)$$

Подстановка формулы (97) в ограничение (96) позволяет представить его следующим образом:

$$E^{Q^*} [I_A] \leq \alpha, \quad (98)$$

где коэффициент α равен отношению начального капитала к стоимости платежного обязательства :

$$\alpha = \frac{\tilde{V}_0}{E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right]} \quad (99)$$

Подставим формулы (98) и (95) в систему уравнений (92):

$$\begin{aligned} \text{Max } E^{P^*} [I_A] \\ \text{s.t. } E^{Q^*} [I_A] \leq \alpha \end{aligned} \quad (100)$$

Поскольку математическое ожидание от индикатора множества является вероятностью этого множества, проблему оптимизации можно записать в вероятностном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Max } P^*(A) \\ \text{s.t. } Q^*(A) \leq \alpha \end{aligned} \quad (101)$$

В общем случае, для ее решения применяется численный метод. В каждом состоянии ω определяется коэффициент $\lambda(\omega)$, равный отношению целевой функции $P^*(A)$ к ограничению $Q^*(A)$:

$$\lambda(\omega) = \frac{P^*(\omega)}{Q^*(\omega)} \quad (102)$$

Эту дробь можно упростить, подставив в нее определения производных Радона-Никодима (94) и (97):

$$\lambda(\omega) = \frac{E^Q[H_T(\omega)]}{E^P[H_T(\omega)]} \cdot \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \quad (103)$$

Коэффициент $\lambda(\omega)$ представляет собой относительный вклад в снижение ожидаемого убытка. Он соответствует произведению константы на отношение физической к риск-нейтральной вероятности возникновения состояния ω . Все состояния могут быть приведены в последовательность в убывающем порядке этого коэффициента. Множество успешного хеджирования включает состояния с высокими значениями показателя, а его размер зависит от величины начального капитала.

Как только множество успешного хеджирования определено, можно перейти к нахождению структуры выплат хеджирующего портфеля. Для завершения построения хеджа методом хеджирования ожидаемых потерь она воспроизводится с помощью других инструментов или посредством стратегии динамического совершенного хеджирования. В следующем разделе мы рассмотрим зависимость между успехом и затратами на хеджирование в рамках модели Блэка-Шоулса.

3.2. Анализ метода хеджирования ожидаемых потерь в рамках модели Блэка-Шоулса

В предыдущем разделе мы показали, что множество успешного

хеджирования состоит из состояний с высоким относительным вкладом в успех хеджирования, а его размер зависит от величины начального капитала:

$$A = \left\{ \omega \left| \frac{dP^*}{dQ^*} > c \right. \right\}, \quad (104)$$

$$\text{где } c = \inf \left\{ a \left| Q^* \left(\frac{dP^*}{dQ^*} > a \right) \leq \alpha \right. \right\}$$

Благодаря мультипликативной связи между производными Радона-Никодима:

$$\frac{dP^*}{dQ^*} = \frac{dP^*}{dP} \cdot \frac{dQ}{dQ^*} \cdot \frac{dP}{dQ} \quad (105)$$

множество успешного хеджирования можно представить в следующем виде:

$$A = \left\{ \omega \left| \frac{dP}{dQ} > c \cdot \frac{dQ^*}{dQ} \cdot \frac{dP}{dP^*} \right. \right\} \quad (106)$$

Подставив определения производных Радона-Никодима (94) и (97), множество A можно упростить:

$$A = \left\{ \omega \left| \frac{dP}{dQ} > \gamma \right. \right\}, \quad (107)$$

где константа γ включает параметр c и отношение математических ожиданий выплат платежного обязательства при физической и нейтральной к риску мерах вероятности P и Q соответственно:

$$\gamma = c \cdot \frac{E^P[H_T]}{E^Q[H_T]} \quad (108)$$

Отметим, что в отличие от аналогичного показателя в случае квантильного хеджирования, здесь величина параметра γ не зависит от состояния ω .

Уравнение (107) позволяет представить множество успешного хеджирования в зависимости от курса базового актива. Для этой цели подставим в него процесс отношения риск-нейтральной меры Q к физической мере P (см. формулу (42)). По аналогии с методом квантильного хеджирования, множество успеха A приводится к следующему виду:

$$A = \left\{ \omega \mid S_T^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}} > g \right\} \quad (109)$$

где параметр g задан как:

$$g = \gamma \cdot \exp \left\{ \frac{\mu-r}{\sigma} \cdot \left(\ln S_0 + \frac{1}{2} (\mu+r-\sigma^2) \cdot T \right) \right\} \quad (110)$$

В зависимости от величины показателя степени $(\mu-r)/\sigma^2$ в уравнении (109) возможны две формы множества успешного хеджирования. Степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ возрастает монотонно, если средний темп роста μ больше, чем процентная ставка r . Она превышает уровень g при высоком курсе базового актива. Тогда множество успешного хеджирования состоит из состояний, в которых базовый процесс выше некоторого уровня. С другой стороны, степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ убывает, если средний темп роста меньше, чем процентная ставка. Множество успешного хеджирования состоит в этом случае из состояний, в которых курс базового актива ниже некоторой границы. Ниже мы рассмотрим эти оба случая подробнее.

Вариант 1: $\mu > r$, функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ монотонно возрастает

Состояния с высоким курсом базового процесса возникают с большей вероятностью, если средний темп роста велик. Соответственно, вклад выплат в этих состояниях в ожидаемый убыток имеет большой вес, и они должны страховаться в первую очередь.

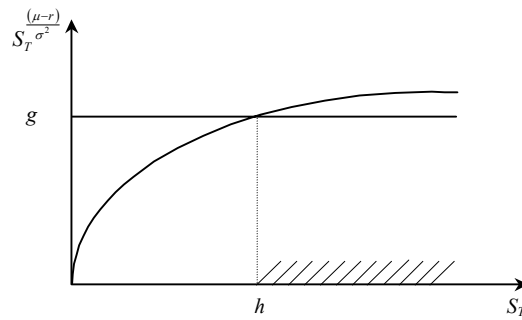


Рис. 27: Множество успешного хеджирования в случае хеджирования ожидаемых потерь, если средний темп роста превышает процентную ставку

На рисунке 27 показано множество успешного хеджирования, как функция от цены базового актива. Оно состоит из состояний, в которых курс превышает точку пересечения h . Форма множества успешного хеджирования не зависит от выплат платежного обязательства. Более того, на графике видно, что возможно только одно пересечение, вне зависимости от параметров базового процесса. Следовательно, множество успешного хеджирования состоит из одного региона, включающего состояния справа от границы h :

$$A = \{\omega | S_T > h\} \quad (111)$$

Уровень h зависит от величины начального капитала, которая соответствует определенному уровню ожидаемых потерь. Эта граница сдвигается влево и множество успешного хеджирования расширяется, если держатель срочной позиции инвестирует больше капитала в хеджирующий портфель. При уменьшении инвестиций граница сдвигается вправо, и множество успешного хеджирования сокращается.

Так как меры вероятности P и P^* , а также Q и Q^* не эквивалентны, то не существует замкнутого представления взаимосвязи между инвестированным капиталом и успехом хеджирования. Однако обе эти величины можно представить, как функции от уровня h . Поставив их затем в соответствие,

можно оценить зависимость между стоимостью и успехом стратегии хеджирования.

Рассмотрим характеристики концепции хеджирования ожидаемых потерь на примере Европейского опциона колл с ценой исполнения K . Его выплаты в зависимости от курса базового актива S_T представлены на рисунке 28.

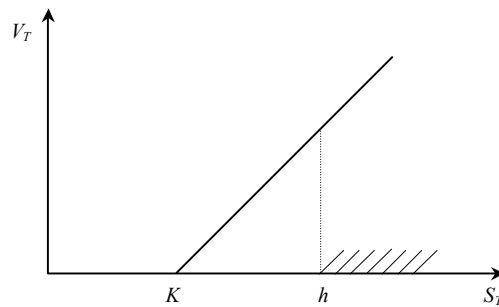


Рис. 28: Выплаты опциона колл на множестве успеха в случае хеджирования ожидаемых потерь, если средний темп роста превышает процентную ставку

На графике 28 видно, что следует страховать выплаты справа от границы h . Такая структура соответствует выплатам опциона колл типа "актив или ничего" (asset-or-nothing). Они могут быть воспроизведены комбинацией из стандартного и бинарного опционов колл с ценами исполнения h и K и сроком исполнения T :

$$V_T = \underbrace{(S_T - h) \cdot I_{\{S_T > h\}}}_{C_T(h)} + (h - K) \cdot \underbrace{I_{\{S_T > h\}}}_{CoN_T(h)} \quad (112)$$

Стоимость опциона колл рассчитывается по формуле Блэка-Шоулса, для оценки бинарного опциона воспользуемся мартингальным подходом. Тогда стоимость хеджирующего портфеля V_0 равняется:

$$V_0 = S_0 \cdot N(d_1(h)) - h \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2(h)) + (h - K) \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2(h)), \quad (113)$$

$$\text{где } d_1(h) = \frac{\ln \frac{S_0}{h} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad (114)$$

$$d_2(h) = d_1(h) - \sigma \cdot \sqrt{T} \quad (115)$$

Нижняя граница множества успешного хеджирования h зависит от величины начального капитала, соответствующей допустимому уровню ожидаемых потерь. Если опцион полностью защищен от риска, то она соответствует цене исполнения. Можно проследить, что стоимость хеджирующего портфеля равняется стоимости опциона, если подставить $h = K$ в формулу (113). В этом случае все риски устранены, и экономии капитала не достигается.

С другой стороны, граница h стремится к бесконечности, если держатель опциона отказывается от хеджирования. Формулы (114) и (115) показывают, что для достаточно высоких значений h параметры d_1 и d_2 устремляются к минус бесконечности, и соответствующие значения нормального распределения равны нулю. Следовательно, стоимость хеджирующего портфеля также равняется нулю, никакие состояния не страхуются, а ожидаемый убыток достигает своего максимального уровня.

Ожидаемый убыток Ψ соответствует физическому математическому ожиданию выплат платежного обязательства в незастрахованных состояниях. Он выводится из уравнения (116):

$$\Psi = E^P \left[(S_T - K) \cdot I_{\{S_T > K\}} \cdot I_{\{S_T < h\}} \right] \quad (116)$$

что эквивалентно:

$$\Psi = E^P \left[(S_T - K) \cdot I_{\{S_T < h\}} \right] - E^P \left[(S_T - K) \cdot I_{\{S_T < K\}} \right] \quad (117)$$

Из определения броуновского движения следует, что логарифмированный курс базового актива следует нормальному распределению при физической мере вероятности P . Математическое ожидание от членов уравнения (117),

содержащих цену исполнения K , рассчитывается, как произведение физической вероятности, что процесс не превысит уровень h и K , и цены исполнения K .

Расчет компонентов, содержащих курс базового актива, требует больших усилий. Подход схож с выводом формулы Блэка-Шоулса и состоит в нахождении новой меры вероятности, позволяющей устранить курс базового актива из под знака математического ожидания. Значение компонента соответствует произведению новой искусственной вероятности и вынесенных из под знака математического ожидания членов. Рассмотрим этот метод более подробно на примере одной из составляющих уравнения (117):

$$Z_T = E^P [S_T \cdot I_{\{S_T < h\}}] \quad (118)$$

Вначале нормализуем аргумент оператора при помощи физического математического ожидания курса базового актива:

$$Z_T = E^P \left[\frac{S_T}{E^P[S_T]} \cdot I_{\{S_T < h\}} \right] \cdot E^P[S_T] \quad (119)$$

Определим новую меру вероятности R при помощи производных Радона-Никодима вида:

$$\frac{dR}{dP} = \frac{S_T}{E^P[S_T]} \quad (120)$$

Упростим его, подставив в это определение выражение для уровня базового процесса из формулы (33):

$$\frac{dR}{dP} = \exp \left\{ \sigma \cdot W_T^P - \frac{1}{2} \sigma^2 T \right\} \quad (121)$$

Компонент Z_t равняется произведению математических ожиданий функции

индикатора при мере R и курса базового актива при физической мере P :

$$Z_T = E^P[S_T] \cdot E^R[I_{\{S_T < h\}}] \quad (122)$$

Так как математическое ожидание от индикатора равно вероятности, формулу (122) преобразуется в следующий вид:

$$Z_T = E^P[S_T] \cdot P^R[S_T < h] \quad (123)$$

Задача состоит в том, чтобы найти распределение курса базового процесса при новой вероятностной мере R . Для этой цели необходимо преобразовать винеровский процесс W^P в уравнении динамики базового актива (32) в новый процесс W^R , который является мартингалом при мере вероятности R . Формально, нужно найти смещение λ модифицированного процесса W^R :

$$dW_t^R = dW_t^P + \lambda \cdot dt \quad (124)$$

Основным свойством мартингала является отсутствие смещения. По отношению к мере вероятности R его можно записать так:

$$E^R[W_{t+u}^R | F_t] = W_t^R \quad (125)$$

Это означает, что ожидаемый в будущий момент времени $t + u$ уровень процесса W^R при мере вероятности R соответствует уровню процесса на настоящий момент времени t [61]. Подставив в формулу (125) производные Радона-Никодима, можно перейти к физической мере вероятности P :

$$E^P \left[\left(\frac{dR}{dP} \right)_{t,t+u} \cdot W_{t+u}^R | F_t \right] = W_t^R \quad (126)$$

Обозначим производные Радона-Никодима в момент времени t через x_t :

$$x_t = \left(\frac{dR}{dP} \right)_{0,t} \quad (127)$$

Благодаря мультипликативной зависимости между переменными x_t ,

уравнение (126) можно представить в следующем виде:

$$E^P \left[\frac{x_{t+u}}{x_t} \cdot W_{t+u}^R \middle| F_t \right] = W_t^R, \quad (128)$$

что эквивалентно:

$$E^P [x_{t+u} \cdot W_{t+u}^R | F_t] = x_t \cdot W_t^R \quad (129)$$

Это условие выполняется только в том случае, если инкремент правой части не содержит детерминистических членов. В развернутом виде дифференциал выражается так:

$$d(x_t \cdot W_t^R) = dx_t \cdot W_t^R + x_t \cdot dW_t^R + dx_t \cdot dW_t^R \quad (130)$$

Дифференциал винеровского процесса dW^R вычисляется непосредственно из формулы (124). Для расчета дифференциала производных Радона-Никодима dx_t применим лемму Ито-Колмогорова к уравнению (121). Сначала представим производные в экспоненциальном виде:

$$x_t = f(y_t) = e^{y_t}, \text{ где} \quad (131)$$

$$y = \sigma \cdot W_t^P - \frac{1}{2} \sigma^2 T \quad (132)$$

Можно доказать, что после упрощения дифференциал производных равен:

$$dx_t = e^{y_t} \cdot \sigma \cdot dW_t^P \quad (133)$$

Подставив формулы (131) и (132) в уравнение (130) и сократив его до членов первого порядка, получаем:

$$d(x_t \cdot W_t^R) = e^{y_t} \cdot \sigma \cdot dW_t^P \cdot W_t^R + e^{y_t} \cdot dW_t^P + e^{y_t} \cdot \lambda \cdot dt + e^{y_t} \cdot \sigma \cdot dt \quad (134)$$

Детерминистические члены сокращаются только в том случае, если коэффициент λ равен волатильности σ с обратным знаком. Соответственно, взаимосвязь между процессами W^P и W^R имеет вид:

$$dW_t^R = dW_t^P - \sigma \cdot dt \quad (135)$$

Подставив ее в уравнение динамики курса базового актива (33), приходим к распределению следующего вида:

$$\ln S_T^R \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T; \sigma^2 \cdot T\right) \quad (136)$$

Формула (136) позволяет вычислить вероятность при мере R того, что курс базового актива не превысит нижнюю границу h множества успешного хеджирования:

$$P^R(S_T < h) = 1 - N[d_1^\Psi(h)], \text{ где} \quad (137)$$

$$d_1^\Psi(h) = \frac{\ln \frac{S_0}{h} + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad (138)$$

Тогда компонент Z_t формулы (123) имеет вид:

$$Z_T = S_0 \cdot e^{\mu T} \cdot (1 - N[d_1^\Psi(h)]) \quad (139)$$

Уравнение (138) схоже с дельтой опциона в формуле Блэка-Шоулса. Единственное отличие состоит в том, что место процентной ставки занимает средний темп роста базового процесса. Ожидаемый убыток Ψ выводится из уравнения (117):

$$\Psi = S_0 \cdot e^{\mu T} \cdot \{N[d_1^\Psi(K)] - N[d_1^\Psi(h)]\} - K \cdot \{N[d_2^\Psi(K)] - N[d_2^\Psi(h)]\}, \quad (140)$$

$$\text{где } d_2^\Psi(x) = d_1^\Psi(x) - \sigma \cdot \sqrt{T} \text{ для } x = h, K \quad (141)$$

В случае совершенного хеджа граница h совпадает с ценой исполнения K , и ожидаемый убыток равен нулю. С другой стороны, граница h стремится к бесконечности, если держатель срочной позиции полностью отказывается от защиты от риска. Тогда ожидаемый убыток максимален и составляет:

$$\Psi^{\max} = S_0 \cdot e^{\mu T} \cdot N[d_1^\Psi(K)] - K \cdot N[d_2^\Psi(K)], \quad (142)$$

где параметры d_1^ψ и d_2^ψ заданы формулами (138) и (141).

Вариант 2: $\mu \leq r$, функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ монотонно убывает

Если средний темп роста μ ниже, чем процентная ставка r , то базовый процесс вероятнее убывает в реальном исчислении. Возникновение состояний с низким курсом базового актива более вероятно, и выплаты платежного обязательства в этих состояниях оказывают большее влияние на ожидаемый убыток. В этом случае, степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ в определении множества успешного хеджирования (109) убывает. Как показано на рисунке 29, она превышает ограничение g в состояниях с низким курсом базового актива.

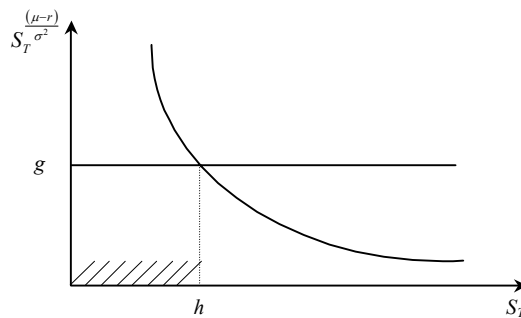


Рис. 29: Множество успешного хеджирования в случае хеджирования ожидаемых потерь, если средний темп роста не превышает процентную ставку

Заштрихованная на графике область отмечает множество успешного хеджирования. Алгебраически оно выражается так:

$$A = \{\omega | S_T \leq h\}, \quad (143)$$

где константа h обозначает верхнюю границу множества. Ее величина зависит положительно от начального капитала и, соответственно, отрицательно от допустимого ожидаемого убытка. Она сдвигается направо и множество успешного хеджирования расширяется, если держатель срочной позиции инвестирует больше капитала в хеджирующий портфель или

понижает уровень допустимых потерь. При понижении начального капитала эта граница переносится налево и множество успешного хеджирования сокращается.

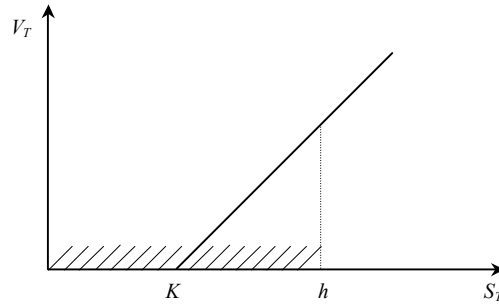


Рис.30: Хеджирование ожидаемых потерь: выплаты опциона колл на множестве успеха, если средний темп роста не превышает процентную ставку

Рисунок 30 показывает выплаты опциона колл на множестве успешного хеджирования. Они могут быть воспроизведены при помощи комбинации из двух стандартных опционов колл C_T с ценами исполнения h и K и бинарного опциона колл CoN_T с ценой исполнения h .

$$V_T = \underbrace{(S_T - K) \cdot I_{\{S_T > K\}}}_{C_T(K)} - \underbrace{(S_T - h) \cdot I_{\{S_T > h\}}}_{C_T(h)} - \underbrace{(h - K) \cdot I_{\{S_T > h\}}}_{CoN_T(h)} \quad (144)$$

Цены опционов колл вычисляются с помощью формулы Блэка-Шоулса, для оценки стоимости бинарного опциона воспользуемся формулой (65). Тогда для стоимости хеджирующего портфеля имеем:

$$\begin{aligned} V_0(x) = & S_0 \cdot \Phi(d_1(K)) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2(K)) \\ & - S_0 \cdot \Phi(d_1(h)) + K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2(h)) \\ & - (h - K) \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2(h)) \end{aligned} \quad (145)$$

Ожидаемый убыток рассчитывается, как физическое математическое ожидание выплат опциона в незастрахованных состояниях:

$$\Psi = E^P[(S_T - h) \cdot I_{\{S_T > h\}}] + E^P[(h - K) \cdot I_{\{S_T > h\}}] \quad (146)$$

По аналогии с первым вариантом можно показать, что ожидаемый убыток приводится к следующему виду:

$$\Psi = S_0 \cdot e^{\mu T} \cdot \Phi(d_1^\Psi(h)) - K \cdot \Phi(d_2^\Psi(h)) \quad (147)$$

$$d_1^\Psi(h) = \frac{\ln \frac{S_0}{h} + \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad (148)$$

$$d_2^\Psi(h) = d_1^\Psi(h) - \sigma \cdot \sqrt{T} \quad (149)$$

Если экономический агент полностью защищает опционную позицию от риска, то ее выплаты воспроизводятся во всех состояниях. Верхняя граница множества успешного хеджирования стремится к бесконечности в этом случае, а ожидаемый убыток – к нулю. Нетрудно проверить, что функция (147) в пределе равна нулю, если граница h достаточно высока.

С другой стороны, множество успешного хеджирования пусто, если держатель срочной позиции отказывается от защиты от риска. Верхняя граница множества h совпадает с ценой исполнения, и ожидаемый убыток достигает своего максимального уровня:

$$\Psi = S_0 \cdot e^{\mu T} \cdot \Phi(d_1^\Psi(K)) - K \cdot \Phi(d_2^\Psi(K)) \quad (150)$$

Это выражение эквивалентно формуле (142) для максимального убытка в первом варианте, когда средний темп роста превышает процентную ставку.

Максимальный убыток можно использовать для нормализации ожидаемых потерь. Это позволяет представить их в относительном виде, что делает возможным их противопоставление со стоимостью хеджирования. Определим *ожидаемый успех* хеджирующей стратегии как разницу между максимальным убытком и допустимым уровнем ожидаемых потерь.

На рисунке 31 представлен ожидаемый успех в зависимости от относительной стоимости хеджирования на примере Европейского опциона

колл. Относительная стоимость хеджирования равна отношению стоимости хеджирующего портфеля к цене опциона. Средний темп роста и волатильность базового процесса равны 0.14 и 0.10 соответственно. Базовый процесс начинается на уровне цены исполнения опциона, равной 100. Процентная ставка составляет 0.06, а длительность контракта равна единице.

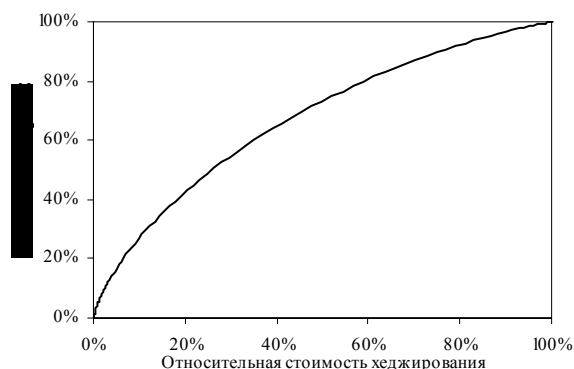


Рис. 31: Ожидаемый успех как выпуклая функция от стоимости хеджирования
(на примере опциона колл)

Зависимость между ожидаемым успехом и стоимостью хеджирования имеет выпуклую форму, поскольку состояния с высоким относительным вкладом в снижение ожидаемого убытка страхуются в первую очередь.

3.3. Особенности применения метода хеджирования ожидаемых потерь в зависимости от параметров модели

В предыдущем разделе мы показали, что структура множества успешного хеджирования зависит от разницы между средним темпом роста базового процесса и процентной ставкой. Относительный вклад в успех хеджирования возрастает в зависимости от курса базового актива, если средний темп роста превышает процентную ставку. В противном случае он убывает. На рисунке 32 рассматривается опцион колл с ценой исполнения 100. Базовый процесс начинается на уровне 100, его волатильность равна 0.05. Процентная ставка равна 0.06, срок контракта составляет 0.1. В первом случае средний темп

роста равен 0.07 и превышает процентную ставку, во втором случае он равен 0.03 (меньше процентной ставки).

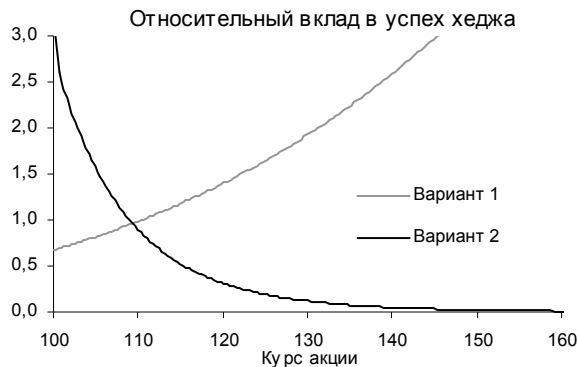


Рис. 32: Хеджирование ожидаемых потерь: относительный вклад в успех хеджирования в зависимости от курса базового актива (на примере опциона колл)

На графике видно, что относительный вклад в успех хеджирования максимален в состояниях с высоким курсом базового актива, если средний темп роста базового процесса превышает процентную ставку. Начиная с состояния с наивысшим курсом базового актива, состояния добавляются во множество успешного хеджирования в порядке понижения курса. Таким образом, страхуется интервал цен базового актива, находящийся выше некоторой границы. Ее уровень зависит от количества начального капитала и, соответственно, от уровня допустимых потерь.

Рисунок 33 иллюстрирует множество успешного хеджирования в зависимости от физического математического ожидания выплат в застрахованных состояниях. Ожидание нормализовано при помощи максимального ожидаемого убытка, заданного формулой (142). В качестве иллюстрации используется опцион колл с ценой исполнения 100. Средний темп роста и волатильность базового процесса составляют 0.14 и 0.10, стартовый уровень равен 100. Срок исполнения опциона равен единице, процентная ставка составляет 0.06.

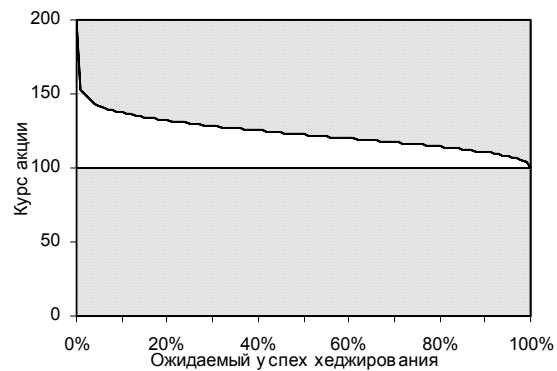


Рис. 33: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования, если средний темп роста превышает процентную ставку (на примере опциона колл)

Если средний темп роста не превышает процентную ставку, то структура множества успешного хеджирования имеет совершенно иной вид. Относительный вклад в успех хеджирования представляет собой убывающую функцию от курса базового актива в этом случае. Соответственно, страхование состояний с низким курсом базового актива позволяет значительно понизить ожидаемый убыток при низкой стоимости страхования. Множество успешного хеджирования включает состояния, близкие к цене исполнения. Оно ограничено сверху, причем положение границы зависит положительно от величины начального капитала и отрицательно от допустимого уровня ожидаемых потерь. Рисунок 34 показывает множество успешного хеджирования в зависимости от нормированного ожидаемого успеха.

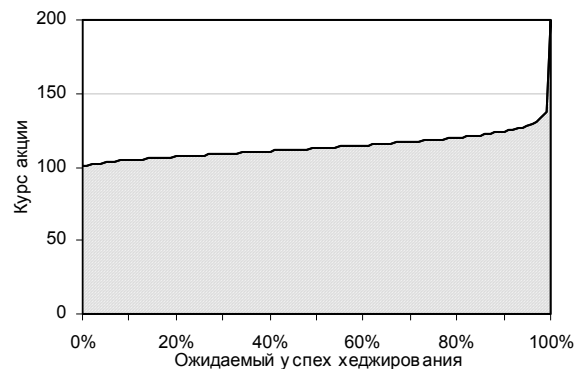


Рис. 34: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования, если средний темп роста не превышает процентную ставку (на примере опциона колл)

Успех защиты опциона от риска методом хеджирования ожидаемых потерь определяется параметрами базового процесса, особенностями опциона и величиной процентной ставки.

Средний темп роста базового процесса является одним из основных факторов, определяющих эффективность хеджа. Относительный вклад в успех хеджирования (см. формулу (103)) пропорционален отношению физической и риск-нейтральной вероятности возникновения состояния. Физическая вероятность зависит исключительно от параметров базового процесса и не подвержена воздействию изменений процентной ставки. Напротив, риск-нейтральная вероятность зависит также от процентной ставки. Поэтому, главным образом, отношение между средним темпом роста и процентной ставкой определяет форму зависимости между ожидаемым убытком и стоимостью хеджирования. Воздействие других параметров модели, таких как волатильность, цена и срок исполнения, имеет вторичный характер.

Рассмотрим опцион колл с ценой исполнения 100 и сроком исполнения, равным единице. Волатильность базового процесса составляет 0.05, процентная ставка равна 0.06. На рисунке 35 ожидаемый успех представлен, как функция от среднего темпа роста и стоимости хеджирования. Если

средний темп роста равен процентной ставке, то ожидаемый убыток обратно пропорционален стоимости хеджирования. В этом случае относительный вклад в успех хеджирования равен в каждом состоянии с ненулевыми выплатами. Чем больше средний темп роста отклоняется от процентной ставки, тем более выпуклой становится взаимосвязь.

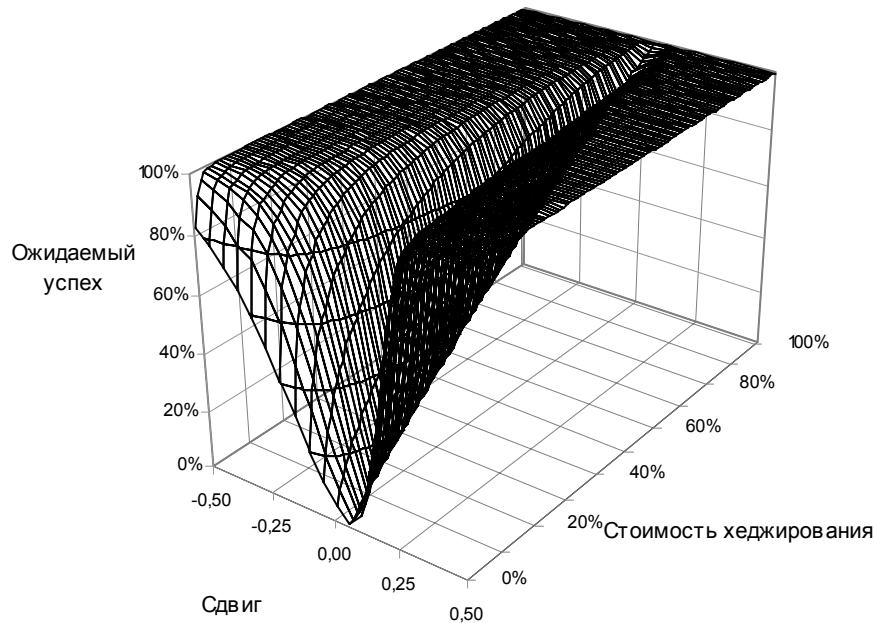


Рис. 35: Хеджирование ожидаемых потерь: ожидаемый успех как функция от среднего темпа роста и стоимости хеджирования (на примере опциона колл)

Волатильность базового процесса имеет вторичное влияние на ожидаемый успех. Низкий уровень волатильности усиливает выпуклость взаимосвязи, если средний темп роста процесса не равен процентной ставке. Ожидаемый успех хеджирования представлен на рисунке 36, как функция от волатильности и стоимости хеджирования. Средний темп роста принят равным 0.09, остальные параметры модели оставлены без изменений.

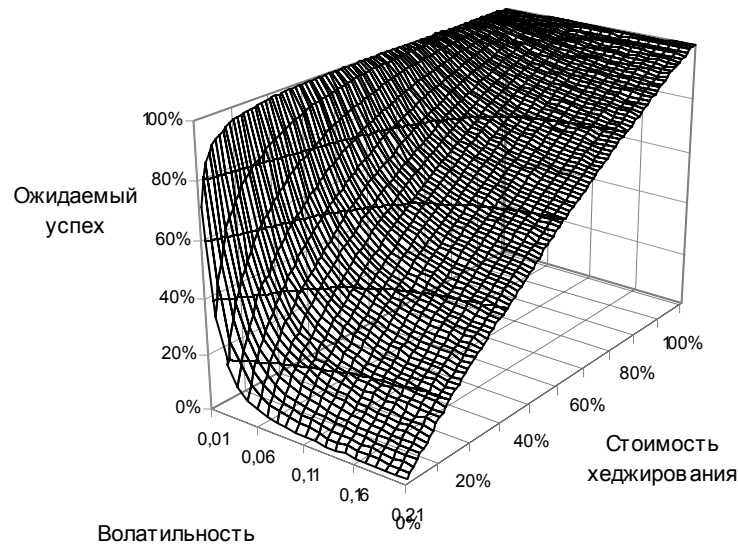


Рис. 36: Хеджирование ожидаемых потерь: ожидаемый успех как функция от волатильности и стоимости хеджирования (на примере опциона колл)

Воздействие срока исполнения на эффективность хеджирования также вторично. Оно усиливается при сильном отклонении среднего темпа роста от процентной ставки. На рисунке 37 представлен ожидаемый успех в зависимости от срока исполнения и стоимости хеджирования. Другие параметры модели оставлены без изменений, цена исполнения равняется 100.

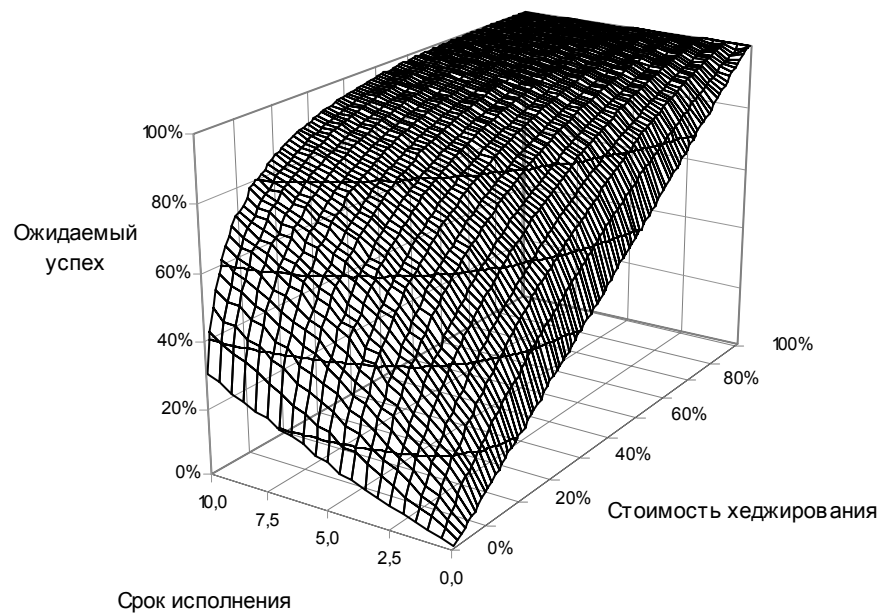


Рис.37: Хеджирование ожидаемых потерь: ожидаемый успех, как функция от срока исполнения и стоимости хеджирования (на примере опциона колл)

Процентная ставка оказывает сильное влияние на форму зависимости между ожидаемым успехом и стоимостью хеджирования. Как отмечалось выше, разница между средним темпом роста и процентной ставкой является основным фактором, определяющим форму зависимости ожидаемого успеха от расходов на хеджирование. Рисунок 38 иллюстрирует эту взаимосвязь, если срок исполнения опциона колл равен единице. Остальные параметры модели оставлены без изменений.

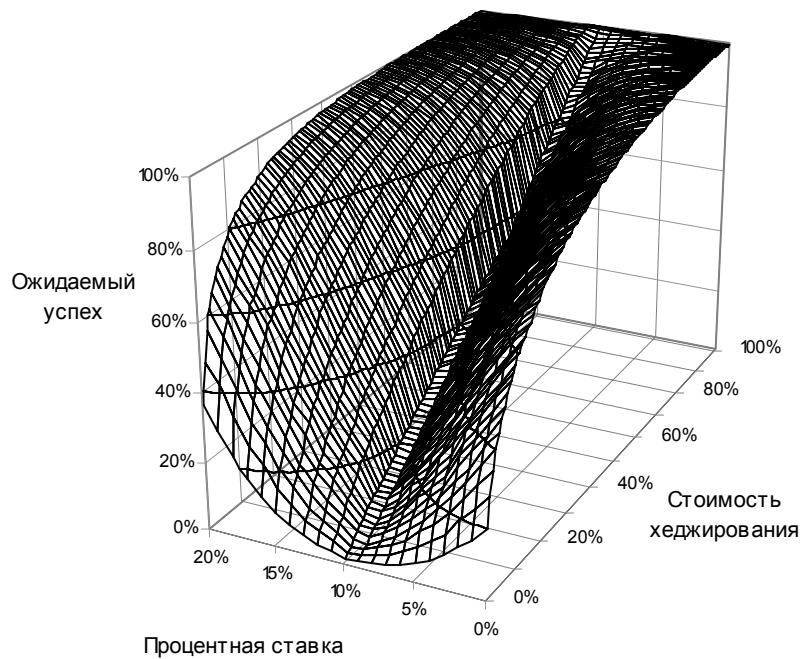


Рис. 38: Ожидаемый успех как функция от процентной ставки и стоимости хеджирования
(на примере опциона колл)

Метод хеджирования ожидаемых потерь позволяет владельцу срочной позиции контролировать величину предполагаемого убытка, а не только вероятность его возникновения. Потери возникают в незастрахованных состояниях. В среднем, они соответствуют заданному уровню ожидаемого убытка. Держатель срочной позиции учитывает вероятность возникновения убытка только косвенно, посредством установления уровня допустимых потерь.

Глава 4. Эффективность методов несовершенного хеджирования

4.1. Сравнительный анализ метода квантильного хеджирования и метода хеджирования ожидаемых потерь

Методы квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь относятся к методам несовершенного хеджирования. Они позволяют понизить стоимость хеджирования, допуская риск возникновения потерь. Выплаты платежного обязательства воспроизводятся в полном размере в части состояний, в оставшихся состояниях репликация не проводится.

Представленные методы определяют риск разными способами, и как было показано, разные критерии применяются для нахождения множества хеджируемых состояний. Метод квантильного хеджирования определяет риск, как вероятность возникновения потерь. Величина возможного убытка не оказывает влияния на решение о воспроизведении выплат в некотором состоянии или отказе от него. Напротив, согласно методу хеджирования ожидаемых потерь, риск определяется, как ожидаемый убыток. В этом случае и величина выплаты, и ее вероятность принимаются во внимание.

Структура множества успешного хеджирования зависит от применяемого метода и от параметров модели. В предыдущих разделах мы показали, что в рамках одной и той же концепции, характеристики базового процесса, спецификация контракта и процентная ставка определяют множество хеджируемых состояний. На рисунке 39 представлены комбинации среднего темпа роста μ , волатильности σ и процентной ставки r , определяющие вид множества успешного хеджирования.

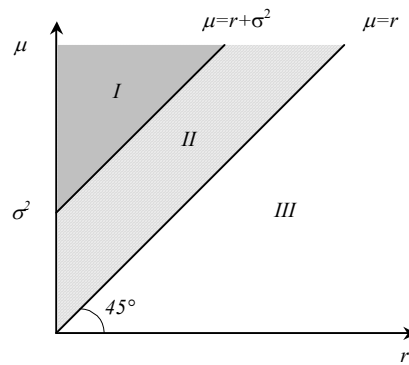


Рис. 39: Детерминанты множества успешного хеджирования

Возможны три случая. Рассмотрим их более подробно на примере опциона колл. В случае квантильного хеджирования, форма множества успешного хеджирования зависит от того, превышает ли выражение $(\mu - r)/\sigma^2$ единицу или нет. В первом случае (область I), множество успешного хеджирования состоит из двух зон. Первая зона включает состояния с низким курсом базового актива, близким к цене исполнения. Сверху она ограничена границей h_1 . Вторая зона состоит из состояний, с курсом базового актива, превышающим границу h_2 ($h_2 > h_1$). Расстояние между границами зон отрицательно зависит от величины начального капитала, и соответственно, от вероятности успеха. Если $(\mu - r)/\sigma^2$ меньше единицы (области II и III на графике 39), то множество успешного хеджирования охватывает состояния с курсом базового актива ниже некоторой границы h_3 .

Разность между средним темпом роста μ и процентной ставкой r определяет форму множества успешного хеджирования в случае хеджирования ожидаемых потерь. Если средний темп роста превышает процентную ставку (области I и II на графике 39), то воспроизводятся выплаты в состояниях справа от некоторой границы h_4 . В противном случае (область I), множество успешного хеджирования ограничено сверху границей h_5 . В таблице представлены возможные структуры множества успешного хеджирования в зависимости от параметров модели на примере опциона колл.

Обл.	Зависимость	Квантильное хеджирование	Хеджирование ожидаемых потерь
I	$(\mu - r)/\sigma^2 > 1$	$(0; h_1] \cap [h_2; \infty)$	$[h_4; \infty)$
II	$(\mu - r)/\sigma^2 \leq 1 \cap \mu > r$	$(0; h_3]$	$[h_4; \infty)$
III	$\mu \leq r$	$(0; h_3]$	$(0; h_5]$

Таблица 2: Множество успешного хеджирования в зависимости от параметров модели (на примере опциона колл)

В зависимости от метода хеджирования, структура множества успешного хеджирования отличается на областях I и II. Они соответствуют ситуации, в которой средний темп роста превышает процентную ставку. В этом случае, хеджирующая стратегия может быть оптимальна только согласно одному из критериев риска – либо квантиля, либо ожидаемых потерь. Напротив, если средний темп роста не превышает процентную ставку, то множества хеджируемых состояний совпадают. Тогда хеджирующая стратегия, оптимальная по одному критерию, также оптимальна и по другому. Как правило, в действительности на рынке редко наблюдается динамика курса базового актива со средним темпом роста ниже процентной ставки.

Рассмотрим описанную взаимосвязь на примере опциона колл с ценой исполнения 100 и сроком исполнения 0.1. Базовый процесс начинается на уровне 100 и имеет волатильность 0.20. Процентная ставка составляет 0.06. Предположим, что средний темп роста базового процесса равен 0.15. В этом случае выполняется условие $(\mu - r)/\sigma^2 > 1$, что соответствует области I рисунка 39. Применяя метод квантильного хеджирования, зависимость вероятности успеха и ожидаемого успеха от стоимости хеджирования имеет вид, представленный на рисунке 40.

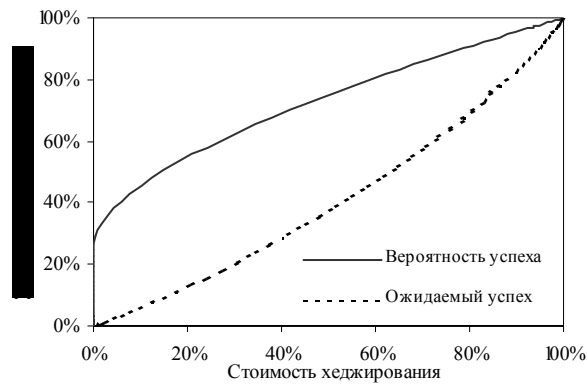


Рис. 40: Вероятность успеха и ожидаемый успех в случае квантильного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 > 1$.

Вероятность успеха является выпуклой, а соответствующий ожидаемый успех – вогнутой функцией от стоимости хеджирования. Соответственно, хеджирующая стратегия является оптимальной с точки зрения вероятности успеха, но она не способна минимизировать ожидаемый убыток на заданном ограничении на капитал.

Если применяется метод хеджирования ожидаемых потерь, то зависимость между ожидаемым успехом и стоимостью хеджирования выпукла. В тоже время, вероятность успеха прирастает меньшими темпами, чем увеличивается стоимость хеджа. Соответственно, хеджирующая стратегия оптимальна с точки зрения критерия ожидаемого успеха, но не является оптимальной по критерию квантиля. Рисунок 41 иллюстрирует успех хеджирования.

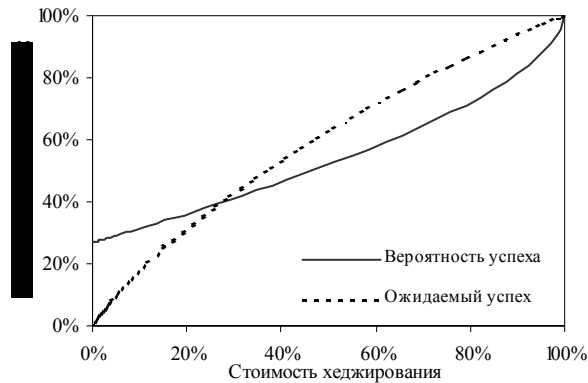


Рис. 41: Вероятность успеха и ожидаемый успех в случае хеджирования ожидаемых потерь, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 > 1$

Понизим средний темп роста μ до 0.07 и перейдем к области II рисунка 39. На рисунке 42 представлена вероятность успеха и соответствующий ей ожидаемый успех, как функция от стоимости хеджирования в случае квантильного хеджирования. Хеджирующая стратегия является оптимальной с точки зрения вероятности успеха, но слегка вогнутая пунктирная линия указывает на ее несовершенство с точки зрения минимизации ожидаемых потерь.

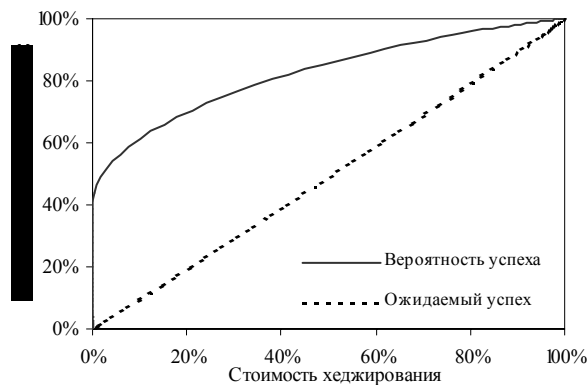


Рис. 42: Вероятность успеха и ожидаемый успех в случае квантильного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$.

В случае хеджирования ожидаемых потерь зависимость между ожидаемым успехом и стоимостью хеджирования выпукла. Однако вероятность успеха

возрастает увеличивающимися темпами роста при росте начального капитала. И в этом случае хеджирующая стратегия оптимальна только по отдельному критерию риска, положенного в основу выбранного метода хеджирования.

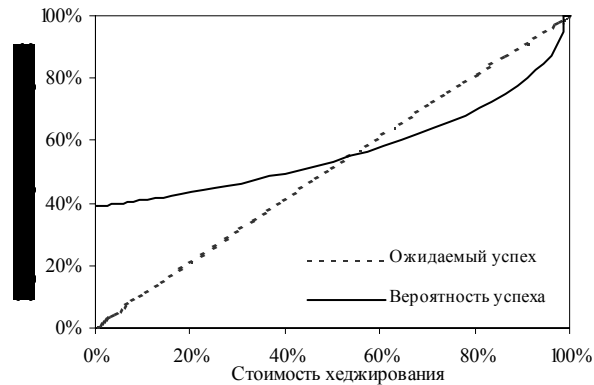


Рис. 43: Вероятность успеха и ожидаемый успех в случае хеджирования ожидаемых потерь, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$

Теперь перейдем к случаю, в котором средний темп роста меньше процентной ставки, и множества успешного хеджирования совпадают. Хеджирующие портфели, построенные согласно обоим методам, охватывают одно и тоже множество состояний. Соответственно, они оптимальны по обоим критериям. На рисунке 44 видно, что вероятность успеха и ожидаемый успех являются выпуклыми функциями от стоимости хеджирования.

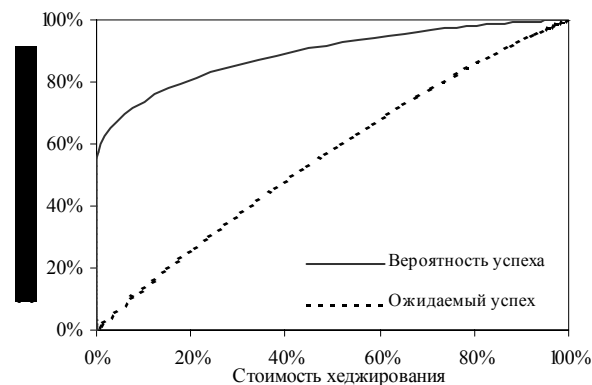


Рис. 44: Вероятность успеха и ожидаемый успех, если средний темп роста не превышает процентную ставку

Важную роль в формировании зависимости между успехом и стоимостью хеджирования играет тип опциона и его особенности. Мы приходим к совершенно другим результатам, если рассмотрим опцион пут. Структура множества успешного хеджирования в зависимости от среднего темпа роста, волатильности и процентной ставки представлена в таблице 3.

Обл.	Зависимость	Квантильное хеджирование	Хеджирование ожидаемых потерь
I	$(\mu - r)/\sigma^2 > 1$	$[h_1; \infty)$	$[h_4; \infty)$
II	$(\mu - r)/\sigma^2 \leq 1 \cap \mu > r$	$[h_1; \infty)$	$[h_4; \infty)$
III	$\mu \leq r$	$(0; h_2] \cap [h_3; \infty)$	$(0; h_5]$

Таблица 3: Множество успешного хеджирования в зависимости от параметров модели (на примере опциона пут)

В отличие от случая с опционом колл, множества успешного хеджирования обоих методов совпадают, если средний темп роста превышает процентную ставку. Это условие более реалистично. В обоих случаях выплаты опциона воспроизводятся в состояниях, в которых курс базового актива превышает некоторую границу. Соответственно, хеджирующий портфель оптимален как с точки зрения вероятности успеха, так и с позиций минимизации ожидаемых потерь. Напротив, если процентная ставка превышает средний темп роста, то хеджирование может быть оптимальным только по одному из критериев.

Примеры хеджирования опционов колл и пут показали, что хеджирующая стратегия может быть оптимальной с точки зрения максимизации вероятности успеха и минимизации ожидаемых потерь, если средний темп роста, волатильность и процентная ставка находятся в определенном отношении. Конкретная форма этого отношения зависит от вида опциона и его характеристик.

4.2. Оценка эффективности методов несовершенного хеджирования опционных позиций на российском фондовом рынке

Эмпирическая проверка представленных концепций хеджирования основывается на наиболее распространенном в силу своей простоты методе дельта хеджирования [10, 13]. Его суть состоит в том, что платежная функция срочного контракта воспроизводится динамически при помощи портфеля из базового актива и банковского счета. Доля акций в портфеле соответствует коэффициенту дельта опциона, который представляет собой отношение изменения цены опциона, вызванное изменением цены базового актива, к изменению цены актива. Математически коэффициент дельта соответствует первой производной от стоимости опциона по базовому активу. Он показывает скорость изменения цены опциона относительно изменения цены актива, лежащего в основе производного инструмента [99].

Прежде, чем перейти к описанию динамического хеджирования по методам квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь, рассмотрим механизм дельта хеджирования более подробно на примере опциона колл на акцию, не выплачивающую дивидендов. В рамках модели Блэка-Шоулса коэффициент дельта опциона колл равен:

$$\Delta = N(d_1), \text{ где} \quad (151)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

Пошагово операцию дельта хеджирования можно представить следующим образом. В момент выпуска опцион колл предлагается по цене, рассчитанной по формуле Блэка-Шоулса (59). Сразу после заключения сделки продавец опциона получает теоретическую премию в свое распоряжение.

В целях хеджирования он покупает акции в количестве, соответствующем коэффициенту дельта опциона колл (151). Покупка акций частично финансируется из полученной за опцион премии, а частично за счет кредита под фиксированную процентную ставку r . На конец первого дня хеджирования его портфель состоит из Δ штук акций и кредита B в размере стоимости акций за вычетом полученной от покупателя премии опциона C^{BS} :

$$B_0 = \Delta_0 \cdot S_0 - C_0^{BS} \quad (152)$$

Стоимость хеджирующего портфеля π составляет:

$$\pi_0 = \Delta_0 \cdot S_0 + B_0 \quad (153)$$

Отметим, что в первый день стоимости опциона и хеджирующего портфеля совпадают. Это нетрудно проследить, подставив формулу (152) в уравнение (153).

Пусть на следующий торговый день курс акции изменился. Также сократился на один день срок действия контракта. Это приводит к изменению коэффициента дельта и делает необходимым коррекцию хеджирующего портфеля. Предположим, что курс акции поднялся. В этом случае дельта опциона колл увеличивается, и хеджер должен докупить акций в хеджирующий портфель в количестве, равном приращению коэффициента дельта: $\Delta_1 - \Delta_0$. Стоимость покупки составляет $(\Delta_1 - \Delta_0) \cdot S_1$. Она финансируется за счет дополнительного кредита. Теперь стоимость акций в хеджирующем портфеле равна $\Delta_1 \cdot S_1$. Хеджер также должен выплатить проценты по кредиту, взятому в предыдущий день под постоянную процентную ставку r . Они составляют $r \cdot B_0 \cdot dt$. Таким образом, долг хеджера в первый день хеджирования возрастает до:

$$B_1 = B_0 + r \cdot B_0 \cdot dt + (\Delta_1 - \Delta_0) \cdot S_1 \quad (154)$$

После проведения коррекции хеджирующий портфель стоит:

$$\pi_1 = \Delta_1 \cdot S_1 + B_1 \quad (155)$$

Его стоимость может не совпадать с теоретической стоимостью опциона по формуле Блэка-Шоулса в результате так называемой ошибки хеджирования. Она возникает вследствие того, что дельта хеджирование страхует только линейную компоненту изменения цены опциона в зависимости от изменения цены базового актива, в то время как эта зависимость вогнута. Расхождение теории и практики является также следствием того, что параметры хеджирующего портфеля вычисляются не в непрерывной модели, а само хеджирование "на практике" осуществляется в дискретные моменты времени [13].

При движении курса акции вниз коррекция портфеля проводится аналогично, только в этом случае дельта опциона колл уменьшается, и часть акций продается, что приводит к сокращению размера кредита. В каждый торговый день вес составляющих хеджирующего портфеля пересматривается. В общем случае, размер кредита и совокупная стоимость хеджирующего портфеля выражаются согласно формулам (156) и (157):

$$B_t = B_{t-\delta t} + r \cdot B_{t-\delta t} \cdot \delta t + (\Delta_t - \Delta_{t-\delta t}) \cdot S_t \quad (156)$$

$$\pi_t = \Delta_t \cdot S_t + B_t \quad (157)$$

На момент исполнения опциона позиция по акциям ликвидируется, а вырученные средства идут на погашение задолженности по кредиту и, если опцион находится в деньгах, на выплаты по опциону.

Следует отметить, что существуют более совершенные методы динамического хеджирования [70, 89] в дискретном времени, однако для

иллюстрации представленных концепций дельта хеджирование представляет собой достаточно точную аппроксимацию.

В целях эмпирической проверки концепций квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь, представленный выше метод совершенного дельта хеджирования подвергается лишь незначительной коррекции. Единственное отличие заключается в способе расчета дельта коэффициента хеджирующего портфеля, который равен сумме дельта коэффициентов реплицирующих инструментов, взвешенных согласно соответствующим формулам.

Эмпирическое исследование основывается на котировках акции РАО "ЕЭС" на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ) за период с 29.08.2003 по 30.09.2003. Для повышения наглядности практической иллюстрации и устранения искажений, вызванных оценкой параметров, предполагается, что показатели среднего темпа роста и волатильности известны заранее. За указанный период они составляют в годовом исчислении 4,49% и 32,44% соответственно. Процентная ставка принята постоянной и равной 9% годовых.

В таблице 4 представлен процесс хеджирования опциона колл в классической модели Блэка-Шоулса по торговым дням. В ней для каждой даты изображены порядок сделки и структура хеджирующего портфеля:

- *курс акции* – курс акции на ММВБ на момент закрытия торгов;
- *№* – номер коррекции портфеля;
- *T* – срок к исполнению в годах;
- $\Delta C(K)$ – дельта опциона колл с ценой исполнения K , равной курсу акции РАО "ЕЭС" на начало периода 9,536;
- *Покупка акций* – количество акций, покупаемых или продаваемых в момент коррекции;

- *Стоимость покупки* – стоимость покупки или продажи акций в рублях;
- *Сумма кредита* – сумма кредита, взятого на покупку акций для хеджирования опциона;
- *Цена акций в портфеле* – стоимость акций в хеджирующем портфеле;
- *Цена портфеля* – стоимость хеджирующего портфеля, равная стоимости акций за вычетом суммы кредита.

В таблице отчетливо видно, что из-за ошибки хеджирования стоимость хеджирующего портфеля на момент исполнения опциона превысила размер выплат по опциону на 6%, что, впрочем, не представляет проблему с практической точки зрения.

Процедура квантильного хеджирования представлена в таблице 5. Техническое отличие от процедуры совершенного дельта хеджирования заключается в том, что коэффициент дельта рассчитывается несколько иным способом. Поскольку отношение $(\mu - r) / \sigma^2$ меньше единицы, то структура выплат хеджирующего портфеля воспроизводится комбинацией из двух стандартных опционов колл $C_T(K)$ и $C_T(h)$ с ценами исполнения K и h и бинарного опциона $CoN_T(h)$ с ценой исполнения h согласно формуле (58):

$$V_T = \underbrace{[S_T - K] \cdot I_{\{S_T \geq K\}}}_{C_T(K)} - \underbrace{[S_T - h] \cdot I_{\{S_T \geq h\}}}_{C_T(h)} - \underbrace{[h - K] \cdot I_{\{S_T \geq h\}}}_{CoN_T(h)}$$

В этом случае граница h может быть определена как аналитически по формуле (57), так и численно. Для вероятности успеха в 95% она составляет 11,16. Тогда коэффициент дельта хеджирующего портфеля рассчитывается следующим образом:

$$\Delta V_t = \Delta C_t(K) - \Delta C_t(h) - [h - K] \cdot \Delta CoN_t(h)$$

Таблица 5 отличается от таблицы 4 тем, что в нее добавлены столбцы дельта коэффициентов отдельных компонентов хеджирующего портфеля.

Дата	Курс акции	№	T	$\Delta C(K)$	Покупка акций, шт.	Стоимость покупки	Сумма кредита	Цена акций в портфеле	Цена портфеля
29.08.03	9,536	0	0,0880	0,4034	0,5519	5,2627	4,8594	5,2627	0,4034
01.09.03	9,760	1	0,0840	0,5274	0,0941	0,9180	5,7791	6,3043	0,5252
02.09.03	10,107	2	0,0800	0,7649	0,1299	1,3127	7,0939	7,8412	0,7473
03.09.03	10,080	3	0,0760	0,7345	-0,0050	-0,0504	7,0461	7,7699	0,7238
04.09.03	10,479	4	0,0720	1,0576	0,1144	1,1984	8,2470	9,2758	1,0288
05.09.03	10,450	5	0,0680	1,0240	-0,0009	-0,0095	8,2405	9,2406	1,0002
08.09.03	10,404	6	0,0640	0,9753	-0,0047	-0,0491	8,1943	9,1508	0,9565
09.09.03	10,130	7	0,0600	0,7343	-0,0722	-0,7315	7,4658	8,1784	0,7126
10.09.03	10,062	8	0,0560	0,6697	-0,0182	-0,1831	7,2854	7,9404	0,6550
11.09.03	9,810	9	0,0520	0,4719	-0,1036	-1,0165	6,2715	6,7250	0,4535
12.09.03	10,191	10	0,0480	0,7548	0,1632	1,6633	7,9370	8,6494	0,7124
15.09.03	10,321	11	0,0440	0,8589	0,0465	0,4798	8,4196	9,2395	0,8199
16.09.03	10,160	12	0,0400	0,7082	-0,0387	-0,3930	8,0296	8,7024	0,6728
17.09.03	10,030	13	0,0360	0,5882	-0,0395	-0,3965	7,6360	8,1945	0,5585
18.09.03	9,960	14	0,0320	0,5194	-0,0207	-0,2066	7,4321	7,9307	0,4986
19.09.03	9,780	15	0,0280	0,3696	-0,0912	-0,8918	7,5429	6,8955	0,3526
22.09.03	9,592	16	0,0240	0,2322	-0,1318	-1,2645	5,2808	5,4985	0,2177
23.09.03	9,575	17	0,0200	0,2042	-0,0132	-0,1261	5,1566	5,3626	0,2060
24.09.03	9,847	18	0,0160	0,3710	0,2388	2,3518	7,5103	7,8668	0,3565
25.09.03	9,778	19	0,0120	0,2984	-0,0245	-0,2397	7,2733	7,5720	0,2987
26.09.03	9,770	20	0,0080	0,2711	0,0348	0,3398	7,6157	7,9056	0,2899
29.09.03	9,960	21	0,0040	0,4286	0,1750	1,7428	9,3613	9,8021	0,4409
30.09.03	9,800	22	0,0000	0,2640	0,0159	0,1553	9,5200	9,8000	0,2800

Таблица 4: Моделирование процедуры совершенного хеджирования купленного опциона колл в классической модели Блэка-Шоулса

Дата	Курс акции	№	T	$\Delta C(K)$	$\Delta C(h)$	$\Delta C_{oN}(h)$	ΔV	Покупка акций, шт.	Цена покупки	Цена акций в портфеле	Сумма кредита	Цена портфеля
29.08.03	9,536	0	0,088	0,5519	0,0659	0,1192	0,2919	0,2919	2,7839	2,7839	2,4939	0,2900
01.09.03	9,760	1	0,084	0,6459	0,0965	0,1628	0,2844	-0,0076	-0,0738	2,7755	2,4210	0,3545
02.09.03	10,107	2	0,080	0,7758	0,1686	0,2458	0,2071	-0,0773	-0,7809	2,0933	1,6410	0,4523
03.09.03	10,080	3	0,076	0,7708	0,1537	0,2373	0,2308	0,0237	0,2390	2,3267	1,8806	0,4461
04.09.03	10,479	4	0,072	0,8852	0,2711	0,3410	0,0590	-0,1718	-1,8008	0,6180	0,0805	0,5376
05.09.03	10,450	5	0,068	0,8843	0,2525	0,3383	0,0810	0,0221	0,2305	0,8468	0,3110	0,5358
08.09.03	10,404	6	0,064	0,8795	0,2273	0,3292	0,1163	0,0352	0,3667	1,2098	0,6778	0,5320
09.09.03	10,130	7	0,060	0,8073	0,1324	0,2414	0,2819	0,1657	1,6781	2,8561	2,3562	0,4999
10.09.03	10,062	8	0,056	0,7891	0,1057	0,2132	0,3363	0,0544	0,5473	3,3842	2,9043	0,4799
11.09.03	9,810	9	0,052	0,6855	0,0497	0,1244	0,4333	0,0970	0,9516	4,2510	3,8569	0,3940
12.09.03	10,191	10	0,048	0,8487	0,1177	0,2487	0,3262	-0,1071	-1,0918	3,3243	2,7665	0,5578
15.09.03	10,321	11	0,044	0,8952	0,1442	0,2990	0,2643	-0,0619	-0,6391	2,7276	2,1284	0,5992
16.09.03	10,160	12	0,040	0,8565	0,0862	0,2172	0,4168	0,1525	1,5498	4,2348	3,6789	0,5559
17.09.03	10,030	13	0,036	0,8170	0,0488	0,1472	0,5286	0,1118	1,1211	5,3017	4,8014	0,5003
18.09.03	9,960	14	0,032	0,7963	0,0295	0,1037	0,5979	0,0694	0,6908	5,9555	5,4939	0,4616
19.09.03	9,780	15	0,028	0,7051	0,0090	0,0402	0,6306	0,0326	0,3190	6,1669	5,8149	0,3520
22.09.03	9,592	16	0,024	0,5732	0,0016	0,0091	0,5568	-0,0738	-0,7076	5,3408	5,1095	0,2314
23.09.03	9,575	17	0,020	0,5601	0,0005	0,0035	0,5538	-0,0030	-0,0288	5,3025	5,0825	0,2201
24.09.03	9,847	18	0,016	0,7989	0,0013	0,0096	0,7820	0,2282	2,2469	7,7001	7,3312	0,3689
25.09.03	9,778	19	0,012	0,7744	0,0001	0,0011	0,7724	-0,0096	-0,0935	7,5526	7,2403	0,3123
26.09.03	9,770	20	0,008	0,8092	0,0000	0,0000	0,8091	0,0367	0,3585	7,9049	7,6014	0,3035
29.09.03	9,960	21	0,004	0,9841	0,0000	0,0000	0,9841	0,1750	1,7435	9,8021	9,3476	0,4545
30.09.03	9,800	22	0,000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0159	0,1553	9,8000	9,5064	0,2936

Таблица 5: Моделирование процедуры квантильного хеджирования купленного опциона колл в классической модели Блэка-Шоулса

Динамика теоретической стоимости опциона колл и хеджирующего портфеля, рассчитанная по формуле Блэка-Шоулса, представлена на рисунке 45. На нем отчетливо видно, что квантильное хеджирование в данном случае успешно и позволят снизить стоимость хеджирования на 28,1%.



Рис. 45: Теоретическая стоимость опциона колл и квантильного хеджирующего портфеля

Стоимость совершенного и квантильного дельта хеджирования представлена на рисунке 46. На рисунке видно, что динамика стоимости хеджирующих портфелей отличается от теоретической стоимости на величину ошибки хеджирования, которая, впрочем, приводит к вполне приемлемым результатам.



Рис. 46: Стоимость совершенного и квантильного дельта хеджирования.

Процедура хеджирования производных инструментов методом хеджирования ожидаемых потерь приводится в таблице 6. Поскольку в рассматриваемый период времени показатель среднего темпа роста ниже уровня процентной ставки, то выплаты хеджирующего портфеля могут быть воспроизведены при помощи комбинации из двух стандартных опционов колл C_T с ценами исполнения h и K и бинарного опциона колл CoN_T с ценой исполнения h (см. формулу (144)):

$$V_T = \underbrace{(S_T - K) \cdot I_{\{S_T > K\}}}_{C_T(K)} - \underbrace{(S_T - h) \cdot I_{\{S_T > h\}}}_{C_T(h)} - \underbrace{(h - K) \cdot I_{\{S_T > h\}}}_{CoN_T(h)}$$

Для уровня ожидаемых потерь в 5% граница области хеджирования h равна 11,93.

Дата	Курс акции	№	T	$\Delta C(K)$	$\Delta C(h)$	$\Delta CoN(h)$	ΔV	Покупка акций, шт.	Стоимость покупки	Цена акций в портфеле	Сумма кредита	Цена портфеля
29.08.03	9,536	0	0,0880	0,5519	0,0140	0,0311	0,4634	0,4634	4,4192	4,4192	4,0462	0,3731
01.09.03	9,760	1	0,0840	0,6459	0,0223	0,0474	0,5102	0,0468	0,4564	4,9794	4,5040	0,4754
02.09.03	10,107	2	0,0800	0,7758	0,0462	0,0884	0,5179	0,0077	0,0782	5,2347	4,5838	0,6508
03.09.03	10,080	3	0,0760	0,7708	0,0390	0,0790	0,5426	0,0247	0,2491	5,4698	4,8346	0,6352
04.09.03	10,479	4	0,0720	0,8852	0,0851	0,1499	0,4412	-0,1014	-1,0627	4,6236	3,7737	0,8500
05.09.03	10,450	5	0,0680	0,8843	0,0734	0,1379	0,4807	0,0395	0,4124	5,0232	4,1874	0,8358
08.09.03	10,404	6	0,0640	0,8795	0,0598	0,1213	0,5293	0,0486	0,5053	5,5064	4,6943	0,8122
09.09.03	10,130	7	0,0600	0,8073	0,0256	0,0628	0,6315	0,1022	1,0354	6,3968	5,7313	0,6655
10.09.03	10,062	8	0,0560	0,7891	0,0172	0,0466	0,6603	0,0288	0,2903	6,6441	6,0237	0,6205
11.09.03	9,810	9	0,0520	0,6855	0,0055	0,0177	0,6376	-0,0228	-0,2232	6,2545	5,8026	0,4519
12.09.03	10,191	10	0,0480	0,8487	0,0170	0,0497	0,7128	0,0752	0,7668	7,2642	6,5715	0,6927
15.09.03	10,321	11	0,0440	0,8952	0,0208	0,0617	0,7266	0,0138	0,1421	7,4990	6,7159	0,7830
16.09.03	10,160	12	0,0400	0,8565	0,0085	0,0298	0,7767	0,0501	0,5089	7,8909	7,2272	0,6636
17.09.03	10,030	13	0,0360	0,8170	0,0031	0,0129	0,7830	0,0063	0,0635	7,8534	7,2933	0,5601
18.09.03	9,960	14	0,0320	0,7963	0,0012	0,0058	0,7811	-0,0019	-0,0189	7,7797	7,2771	0,5026
19.09.03	9,780	15	0,0280	0,7051	0,0002	0,0010	0,7025	-0,0786	-0,7684	6,8707	6,5113	0,3594
22.09.03	9,592	16	0,0240	0,5732	0,0000	0,0001	0,5731	-0,1295	-1,2419	5,4967	5,2717	0,2250
23.09.03	9,575	17	0,0200	0,5601	0,0000	0,0000	0,5600	-0,0130	-0,1246	5,3624	5,1490	0,2133
24.09.03	9,847	18	0,0160	0,7989	0,0000	0,0000	0,7989	0,2388	2,3516	7,8664	7,5025	0,3638
25.09.03	9,778	19	0,0120	0,7744	0,0000	0,0000	0,7744	-0,0245	-0,2393	7,5720	7,2660	0,3060
26.09.03	9,770	20	0,0080	0,8092	0,0000	0,0000	0,8092	0,0348	0,3398	7,9056	7,6084	0,2972
29.09.03	9,960	21	0,0040	0,9841	0,0000	0,0000	0,9841	0,1750	1,7428	9,8021	9,3539	0,4482
30.09.03	9,800	22	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0159	0,1553	9,8000	9,5126	0,2874

Таблица 6: Моделирование процедуры хеджирования ожидаемых потерь в классической модели Блэка-Шоулса

(на примере продажи опциона колл)

На рисунке 47 представлена динамика теоретической стоимости опциона колл и хеджирующего портфеля, рассчитанная по формуле Блэка-Шоулса. На нем отчетливо видно, что хеджирование в данном случае успешно и позволят снизить стоимость хеджирования на 7,5% за счет риска возникновения потерь, оцененного в 5% от максимального матожидания потерь при физической мере вероятности.



Рис. 47: Теоретическая стоимость опциона колл и хеджирующего портфеля по методу хеджирования ожидаемых потерь

Стоимость дельта хеджирующих портфелей приведена на рисунке 48. На нем видно, что осуществление хеджирования на практике в дискретные моменты времени приводит к некоторому расхождению стоимостей хеджирующих стратегий.



Рис. 48: Стоимость совершенного дельта хеджа и дельта хеджа по методу хеджирования ожидаемых потерь

Представленное эмпирическое исследование показало, что концепции квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь могут быть достаточно просто интегрированы в концепции динамического хеджирования в дискретном времени. Даже применение наиболее простого варианта динамического хеджирования наглядно демонстрирует возможности представленных концепций несовершенного хеджирования, позволяющих понизить стоимость репликации на контролируемом уровне риска. Можно с достаточной достоверностью предположить, что применение усовершенствованных методов динамического хеджирования должно привести к повышению точности результатов.

4.3. Механизм реализации методов квантильного хеджирования и метода хеджирования ожидаемых потерь при принятии инвестиционных решений

Хеджирование спрэда быка

Спрэдом называется торговая стратегия, состоящая в открытии позиции в двух или нескольких опционах одного типа. Одним из наиболее известных видов спрэда является спрэд быка. Он может быть создан, если купить опцион колл с некоторой ценой исполнения и одновременно продать другой колл на тот же самый базовый актив, но с более высокой ценой исполнения. Сроки исполнения обоих опционов одинаковы. Спрэд быка также может быть создан, если купить пут с низкой ценой исполнения и продать пут с высокой ценой исполнения. Такая торговая стратегия ограничивает как риск проигрыша, так и возможность выигрыша [15, 48].

Квантильное хеджирование на примере спрэда быка

Рассмотрим хеджирование спрэда быка с нижней ценой исполнения K_1 и

высокой ценой исполнения K_2 методом квантильного хеджирования. Исходя из предположения о совершенном хеджировании, мы рассмотрим, как изменится множество успешного хеджирования при увеличении вероятности возникновения потерь. В отличие от стандартного опциона колл, здесь возможны три вида множеств хеджируемых состояний. Их форма определяется уравнением (47):

$$A = \left\{ \omega \mid S_T^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}} > g \cdot H_T \right\},$$

где константа g определяется из уравнения (48). В зависимости от отношения между средним темпом роста μ , волатильностью σ и процентной ставкой r степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ может быть вогнутой убывающей, выпуклой возрастающей или вогнутой возрастающей функцией от курса базового актива S_T .

Вариант 1: $\mu \leq r$, функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ вогнута и убывает

При увеличении уровня допустимой вероятности потерь, множество успешного хеджирования принимает три различные формы. Рисунок 49 показывает, что происходит при увеличении риска.

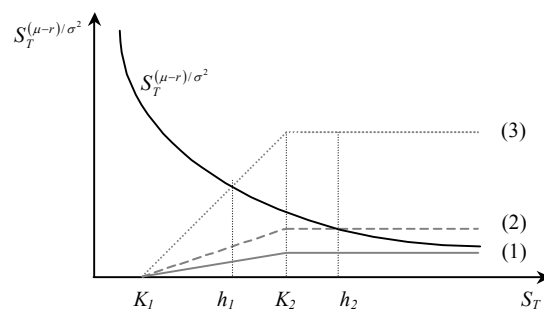


Рис. 49: Квантильное хеджирование: нахождение множества успешного хеджирования, если средний темп роста меньше процентной ставки (на примере спреда быка)

Чтобы полностью исключить риск, необходимо воспроизвести выплаты спреда во всех состояниях. На рисунке случаю совершенного хеджирования соответствует ограничение (1), которое находится ниже степенной функции $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ для любого курса базового актива. Если хеджер готов принять больший риск и инвестирует меньшее количество капитала в хеджирующую стратегию, линия ограничения поднимается вверх до позиции (2). Теперь степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ ниже ограничения для курсов базового актива, превышающих границу h_2 . Множество успешного хеджирования ограничено сверху и состоит из состояний, в которых курс базового актива ниже границы h_2 . Выплаты хеджирующего портфеля на момент исполнения имеют вид:

$$V_T = C_T(K_1) - C_T(K_2) - (K_2 - K_1) \cdot CoN_T(h_2) \quad (158)$$

При дальнейшем сокращении начального капитала и увеличении вероятности возникновения потерь линия ограничения поднимается еще выше (позиция (3) на графике 49). Она пересекается со степенной функцией $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ на интервале между ценами исполнения K_1 и K_2 . Соответственно, выплаты хеджирующего портфеля на момент исполнения приобретают вид:

$$V_T = C_T(K_1) - C_T(h_1) - (h_1 - K_1) \cdot CoN_T(h_1) \quad (159)$$

Если хеджер полностью отказывается от защиты от риска, то множество успешного хеджирования состоит исключительно из состояний с нулевыми выплатами. Графически оно соответствует линии ограничения, поднятой предельно высоко и пересекающейся со степенной функцией близко к низшей цене исполнения K_1 спреда. Таблица 7 представляет результаты в сжатой форме.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; +\infty)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(K_2)$
2	$(0; h_2)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(K_2) - (K_2 - K_1) \cdot CoN_T(h_2)$
3	$(0; h_1)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(h_1) - (h_1 - K_1) \cdot CoN_T(h_1)$

Таблица 7: Квантильное хеджирование: множество успешного хеджирования и выплаты хеджирующего портфеля, если $\mu < r$ (на примере спреда быка)

Вне зависимости от допустимого уровня вероятности возникновения потерь, множество успешного хеджирования ограничено сверху. На рисунке 50 оно представлено на примере спреда быка с ценами исполнения 100 и 120 и сроком исполнения, соответствующим единице. Базовый процесс начинается на уровне 100. Средний темп роста равен 0.04, а волатильность составляет 0.20. Процентная ставка равна 0.06.

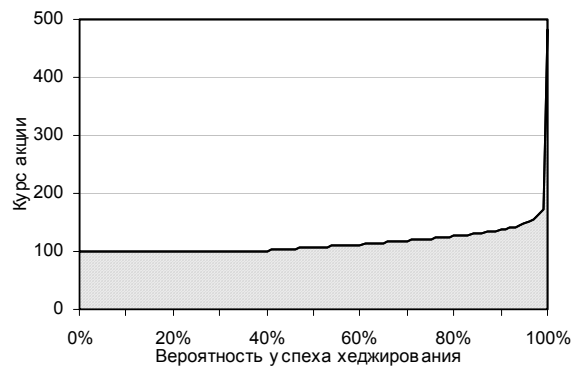


Рис. 50: Квантильное хеджирование: множество успешного хеджирования, если $\mu > r$ (на примере спреда быка)

Вариант 2: $(\mu - r)/\sigma^2 \leq 1$ и $\mu > r$, функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ выпукла и возрастает.

Множество успешного хеджирования состоит в этом случае из двух областей. Рисунок 51 показывает, как определить состояния, в которых должны воспроизводиться выплаты спреда.

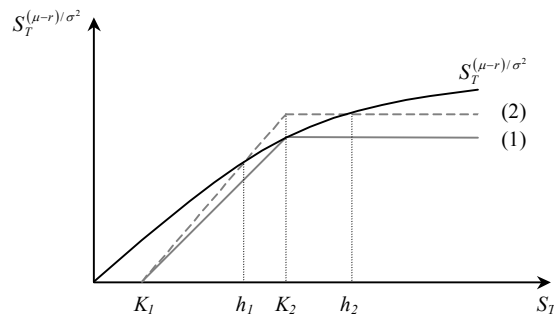


Рис. 51: Квантильное хеджирование: нахождение множества успешного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$ и $\mu > r$ (на примере спреда быка)

Линия ограничения (1) соответствует случаю совершенного хеджирования. При возрастании риска, она поднимается (позиция (2)) и дважды пересекает степенную функцию $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$. Абсцисса первой точки пересечения располагается между ценами исполнения спреда, вторая находится правее верхней цены исполнения. Множество успешного хеджирования охватывает состояния вне этих границ. При росте допустимого уровня вероятности потерь расстояние между границами увеличивается, и множество хеджируемых состояний сокращается. В таблице 8 представлены в сжатом виде выплаты хеджирующего портфеля в зависимости от уровня риска.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; +\infty)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(K_2)$
2	$(0; h_1) \cap (h_2; +\infty)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(h_1) - (h_1 - K_1) \cdot CoN_T(h_1) + (K_2 - K_1) \cdot CoN_T(h_2)$

Таблица 8: Множество успеха и выплаты хеджирующего портфеля на примере спреда быка в случае квантильного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$ и $\mu > r$.

Множество успешного хеджирования в зависимости от вероятности успеха представлено на рисунке 52. Средний темп роста базового процесса прият равным 0.09. Множество хеджируемых состояний состоит из двух областей. Состояния с высоким курсом базового актива образуют первую из них,

вторая область включает состояния с курсом базового актива, близки нижней цене исполнения. При увеличении вероятности успеха расстояния между ними сокращаются.

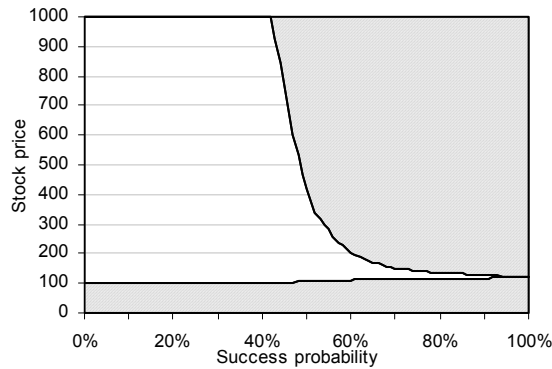


Рис. 52: Квантильное хеджирование: множество успешного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$ и $\mu > r$ (на примере спреда быка)

Вариант 3: $(\mu - r) / \sigma^2 > 1$, степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ вогнута и возрастает

Степенная функция дважды пересекается с линией ограничения, если хедж несовершенен. Возможные структуры множества успешного хеджирования представлены на рисунке 53.

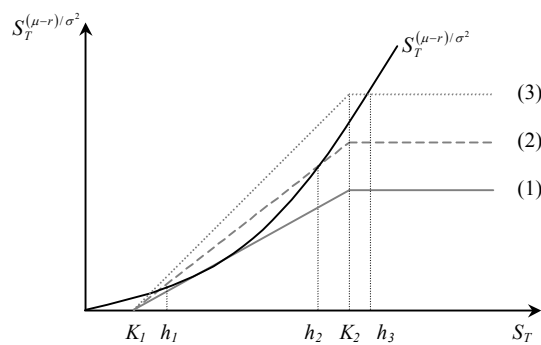


Рис. 53: Квантильное хеджирование: нахождение множества успешного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 > 1$ (на примере спреда быка)

Если хеджер принимает больший риск, линия ограничения поднимается, и множество успешного хеджирования изменяется согласно таблице 9.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; +\infty)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(K_2)$
2	$(0; h_1) \cap (h_2; +\infty)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(h_1) - (h_1 - K_1) \cdot CoN_T(h_1) + C_T(h_2) - C_T(K_2) + (h_2 - K_1) \cdot CoN_T(h_2)$
3	$(0; h_1) \cap (h_3; +\infty)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(h_1) - (h_1 - K_1) \cdot CoN_T(h_1) + (K_2 - K_1) \cdot CoN_T(h_3)$

Таблица 9: Множество успеха и выплаты хеджирующего портфеля на примере спреда быка в случае квантильного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 > 1$

Вероятность успеха квантильного хеджирования как функция от среднего темпа роста и стоимости защиты от риска представлена на рис. 54. Средний темп роста ниже 0.06 соответствует варианту 1, он принадлежит интервалу от 0.06 до 0.09 в варианте 2 и превышает 0.09 в варианте 3. Вероятность, что спред быка окажется вне денег высока, если базовый процесс обладает низким средним темпом роста. Соответственно, вероятность успеха зависит отрицательно от среднего темпа роста.

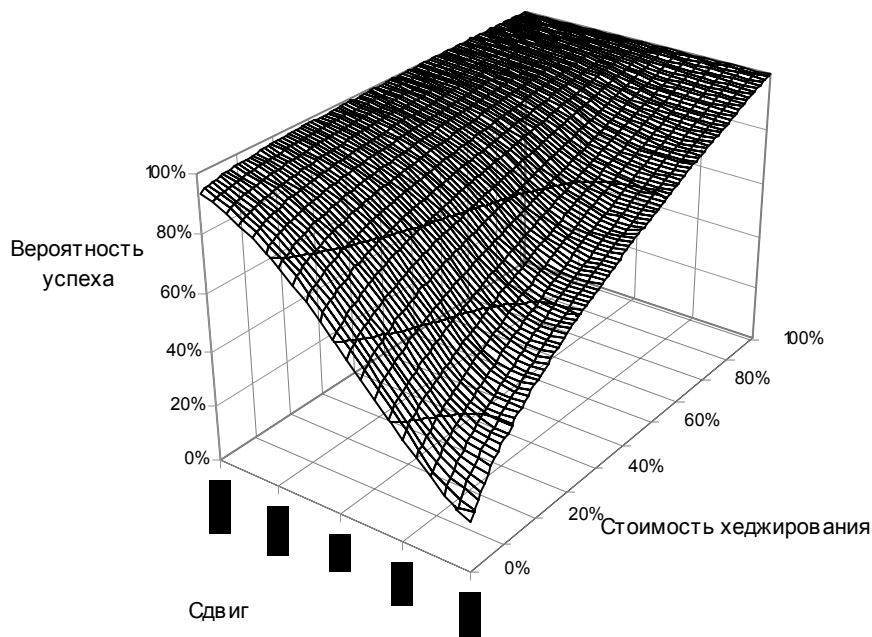


Рис. 54: Вероятность успеха, как функция от среднего темпа роста и стоимости хеджирования (на примере спреда быка)

На примере спреда быка легко проследить один существенный недостаток метода квантильного хеджирования, а именно отсутствие свойства аддитивности. На рисунке 55 видно, что при неполной защите от риска стоимость хеджирования спреда быка меньше, чем сумма стоимостей хеджирования составляющих его опционов. На лицо субаддитивность метода квантильного хеджирования.

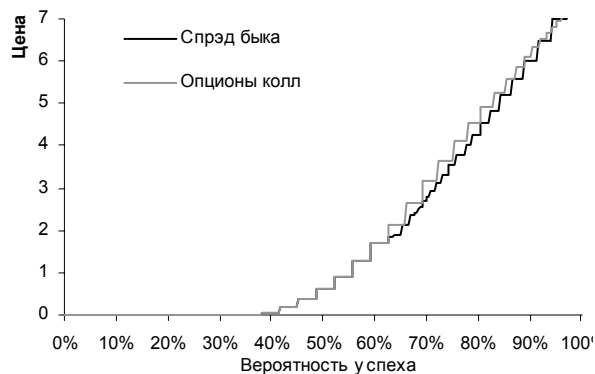


Рис. 55: Аддитивность квантильного хеджирования на примере спреда быка.

На рисунке 55 изображена зависимость цены спреда быка и цены составляющих его опционов колл на базовый актив со средним темпом роста 0.09, волатильностью 0.20 и стартовым значением 100. Цены исполнения опционов колл составляют 100 и 120, срок исполнения равен единице.

Хеджирование ожидаемых потерь на примере спреда быка

Если применяется метод хеджирования ожидаемых потерь, то множество успешного хеджирования состоит из одной целостной области. Его форма выводится из уравнения (109):

$$A = \left\{ \omega \left| S_T^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}} > g \right. \right\},$$

где константа g определяется из ограничения (110). Величина разности среднего темпа роста и процентной ставки определяет форму множества

успешного хеджирования. Степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ вогнута и убывает, если средний темп роста ниже процентной ставки. Состояния с курсом базового актива, близким к нижней цене исполнения, страхуются в этом случае в первую очередь. Напротив, если средний темп роста превышает процентную ставку, то степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ возрастает. Тогда множество успешного хеджирования состоит из состояний, в которых курс базового актива выше некоторой границы. Рассмотрим эти случаи по отдельности более подробно.

Вариант 1: $\mu \leq r$, степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ убывает

На рисунке 56 показано, как определяется структура множества успешного хеджирования в зависимости от допустимого уровня риска. Линия ограничения (1) соответствует отказу от защиты от риска. В этом случае степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ превышает ограничение, если курс базового актива меньше нижней цены исполнения спреда K_1 . Все состояния с ненулевыми выплатами остаются незастрахованными. Когда держатель срочной позиции инвестирует больше капитала в хеджирующую стратегию, линия ограничения передвигается вверх. Сначала она пересекает степенную функцию между ценами исполнения (позиция (2)), а при дальнейшем увеличении инвестиций абсцисса точки пересечения смещается правее высокой цены исполнения спреда K_2 .

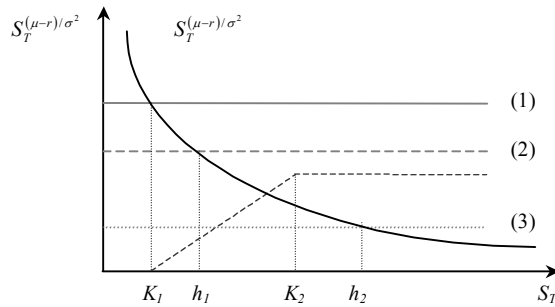


Рис. 56: Хеджирование ожидаемых потерь: нахождение множества успешного хеджирования, если $\mu < r$ (на примере спреда быка)

Вне зависимости от уровня начального капитала, множество успешного хеджирования всегда ограничено справа. Тем не менее, функция выплат хеджирующего портфеля изменяется в зависимости от курса базового актива. В таблице 10 показаны выплаты хеджирующего портфеля для различного уровня инвестиций.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; +\infty)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(K_2)$
2	$(0; h_1)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(h_1) - (h_1 - K_1) \cdot CoN_T(h_1)$
3	$(0; h_2)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(K_2) - (K_2 - K_1) \cdot CoN_T(h_2)$

Таблица 10: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования и выплаты хеджирующего портфеля, если средний темп роста меньше процентной ставки (на примере спреда быка)

Структура множества успешного хеджирования в зависимости от ожидаемого успеха показана на рисунке 57. Средний темп роста и волатильность базового процесса составляют 0.03 и 0.05, процентная ставка равна 0.06. Срок исполнения контракта равен 0.25.

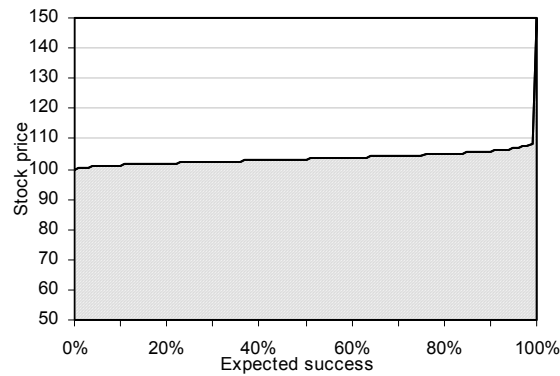


Рис. 57: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования, если средний темп роста меньше процентной ставки (на примере спреда быка)

Вариант 2: $\mu > r$, степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ возрастает.

Множество успешного хеджирования включает состояния с высоким курсом базового актива, если средний темп роста превышает процентную ставку. На рисунке 58 показано, как определяются хеджируемые состояния в зависимости от начального капитала и, соответственно, от допустимого уровня риска.

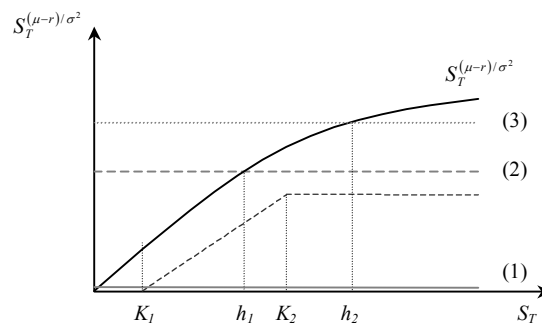


Рис. 58: Хеджирование ожидаемых потерь: нахождение множества успешного хеджирования, если средний темп роста больше ставки процента (спред быка)

Линия ограничения (1) соответствует совершенному хеджу. Если держатель срочной позиции готов пойти на больший риск и сокращает инвестиции в хеджирующую стратегию, то линия ограничения смещается вниз. Абсцисса

точки пересечения сдвигается налево. Структура множества успешного хеджирования и функция выплат хеджирующего портфеля в зависимости от допустимого риска представлены в таблице 11.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; \infty)$	$V_T = C_T(K_1) - C_T(K_2)$
2	$[h_1; \infty)$	$V_T = C_T(h_1) - C_T(K_2) + (h_1 - K_1) \cdot CoN_T(h_1)$
3	$[h_2; \infty)$	$V_T = (K_2 - K_1) \cdot CoN_T(h_2)$

Таблица 11: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования и выплаты хеджирующего портфеля, если средний темп роста больше процентной ставки (на примере спреда быка)

Множество успешного хеджирования в зависимости от ожидаемого успеха представлено на рисунке 59. Здесь средний темп роста равен 0.12, остальные параметры модели оставлены без изменений. Множество успешного хеджирования состоит из двух областей, разрыв между которыми сокращается при увеличении инвестиций в хеджирующий портфель.

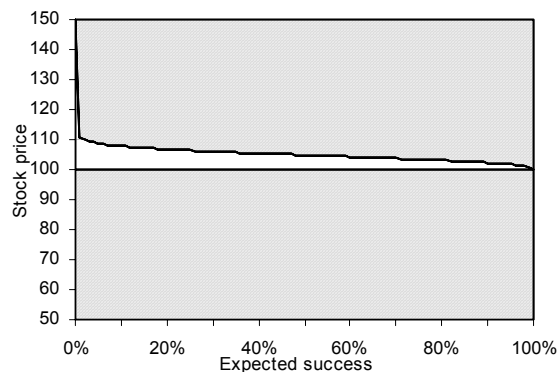


Рис. 59: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования, если средний темп роста больше процентной ставки (на примере спреда быка)

На рисунке 60 видно, что разность среднего темпа роста и процентной ставки оказывает сильное воздействие на успех страхования методом хеджирования ожидаемых потерь. Ожидаемый успех пропорционален стоимости хеджирования, если в средний темп роста равен процентной ставке. По мере

увеличения разности зависимость становится более выпуклой.

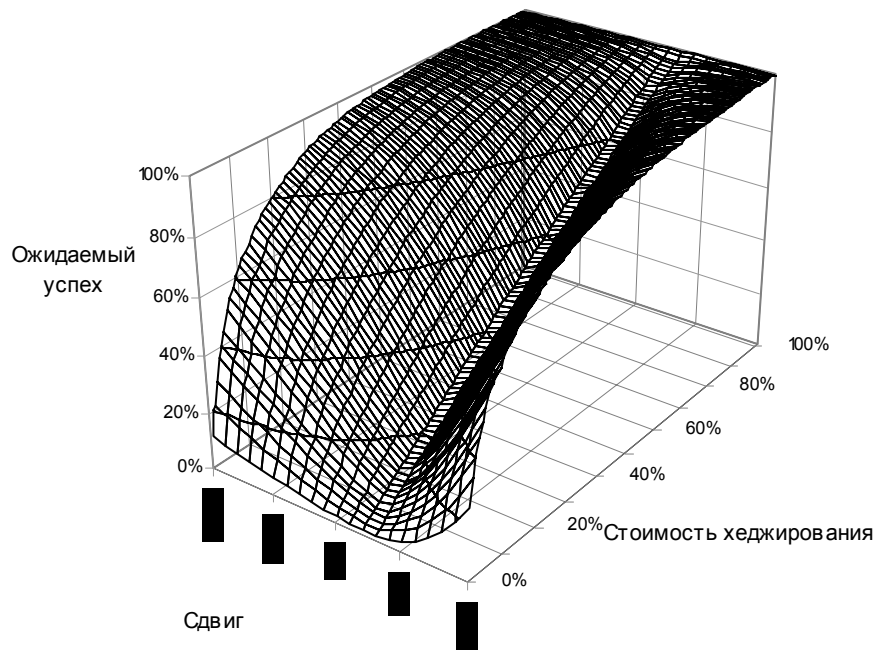


Рис. 60: Хеджирование ожидаемых потерь: ожидаемый успех, как функция от среднего темпа роста и стоимости хеджирования (на примере спреда быка)

На примере спреда быка численный анализ выявляет, что у метода хеджирования ожидаемых потерь также отсутствует свойство аддитивности. Стоимость хеджирования спреда быка превышает сумму стоимостей хеджирования составляющих его опционов колл, то есть имеет место супераддитивность.

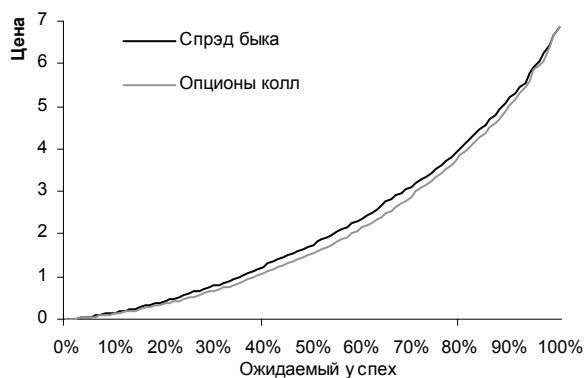


Рис. 61: Аддитивность хеджирования ожидаемых потерь на примере спреда быка

На рис. 61 рассматриваются срочные позиции на базовый актив со средним темпом роста 0.15, волатильностью 0.10 и стартовым значением 100. Цены исполнения спреда равны 100 и 120, срок исполнения равен единице.

В таблице 12 подводится итог анализ на примере спреда быка защиты от риска по методу квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь. Множества успешного хеджирования совпадают, если средний темп роста меньше процентной ставки. Тогда хеджирующая стратегия может быть оптимальной как по критерию квантиля, так и по критерию ожидаемого убытка. В действительности такие условия наблюдается достаточно редко. В более реалистичном случае, когда средний темп роста превышает процентную ставку, множества хеджируемых состояний различны. Тогда стратегия защиты от риска может быть оптимальной только по одному из критериев, но не по обоим одновременно.

Зависимость	Квантильное хеджирование	Хеджирование ожидаемых потерь
$(\mu - r)/\sigma^2 > 1$	$(0; h_1] \cap [h_2; +\infty)$	$[h; \infty)$
$(\mu - r)/\sigma^2 \leq 1 \cap \mu > r$	$(0; h_1] \cap [h_2; +\infty)$	$[h; \infty)$
$\mu \leq r$	$(0; h]$	$(0; h]$

Таблица 12: Множество успешного хеджирования в зависимости от параметров модели (на примере спреда быка)

В следующем разделе мы применим оба метода для управления риском более агрессивной опционной стратегии – комбинации стрэддл.

Хеджирование стрэддла

Комбинацией называется опционная торговая стратегия, которая заключается в открытии позиций одновременно в опционах пут и колл на

один и тот же базовый актив. Наиболее известными комбинациям являются стрэддл, стрип, стрэп и стрэнгл. Стрэддл заключается в покупке опционов колл и пут с одинаковыми ценой и сроком исполнения на одну и ту же акцию. Использование такой стратегии целесообразно, если инвестор ожидает сильного скачка цены базового актива, но не знает его направления. Стрип состоит из длинной позиции в одном опционе колл и двух опционах пут с одинаковыми ценами и сроками исполнения. В этом случае инвестор так же заключает пари на сильное движение базового актива, но считает понижение его стоимости более вероятным. Напротив, выбирая стратегию стрэп, инвестор предполагает, что сильное движение более вероятно вверх, и покупает два опциона колл и один пут с одинаковыми ценами и сроками исполнения. Стрэнгл схож со стрэддлом. Инвестор также покупает колл и пут с одинаковой длительностью, но цена исполнения кола превышает цену исполнения пута. Это позволяет снизить стоимость торговой стратегии [99].

С точки зрения защиты от риска, эти комбинации очень схожи. Множества успешного хеджирования имеют похожие структуры, и методы их нахождения аналогичны. В следующем разделе мы представим их на примере стрэддла. Сначала будет рассмотрено квантильное хеджирования. Исходя из предположения о совершенном хедже, мы рассмотрим изменение множества успешного хеджирования при увеличении риска. Затем мы перейдем к хеджированию ожидаемых потерь и изучим зависимость между ожидаемым успехом и стоимостью хеджирования для различных уровней ожидаемого убытка.

Квантильное хеджирование на примере стрэддла

Множество успешного хеджирования определяется согласно формуле (47):

$$A = \left\{ \omega \left| S_T^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}} > g \cdot H_T \right. \right\},$$

где константа g выводится из уравнения (48). Отношение среднего темпа роста μ , процентной ставки r и волатильности σ определяют вид степенной функции $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ в левой части неравенства. В зависимости от этих параметров возможны три различных структуры множества успешного хеджирования.

Вариант 1: $\mu \leq r$, степенная функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ вогнута и убывает

На рисунке 62 показано, как определяется множество успешного хеджирования для различного уровня риска, если средний темп роста не превышает процентную ставку.

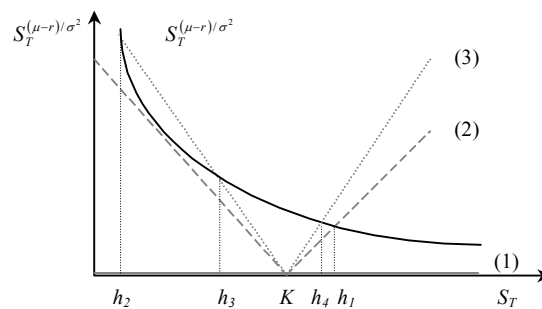


Рис. 62: Квантильное хеджирование: нахождение множества успешного хеджирования, если средний темп роста меньше процентной ставки (на примере стрэдда)

Линии ограничения (1) соответствуют случаю совершенного хеджирования. По мере увеличения склонности хеджера к риску, линии ограничения поднимаются и угол между ними заостряется. До тех пор, пока прямая слева не коснется степенной функции $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ (позиция (2)), множество успешного хеджирования состоит из единой области, ограниченной сверху границей h_1 . При дальнейшем увеличении допустимого уровня риска, прямые ограничения переходят в позицию (3). На графике видны три точки пересечения, и соответственно, множество успешного хеджирования состоит из двух областей. При увеличении риска расстояние между границами h_3 и h_4 , а также дистанция до нуля от границы h_1 сокращаются. Если хеджер

полностью отказывается от страхования, линии ограничения принимают вертикальное положение, и множества хеджируемых состояний сокращается до пустого множества. В таблице представлены выплаты хеджирующего портфеля и структура множества успешного хеджирования для различных уровней риска.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; +\infty)$	$V_T = P_T(K) + C_T(K)$
2	$(0; h_1)$	$V_T = P_T(K) + C_T(K) - C_T(h_1) - (h_1 - K) \cdot CoN_T(h_1)$
3	$[0; h_2] \cup [h_3; h_4]$	$V_T = P_T(h_2) + (K - h_2) \cdot [1 - CoN_T(h_2)] + P_T(K) - P_T(h_3) - (K - h_3) \cdot [1 - CoN_T(h_3)] + C_T(K) - C_T(h_4) - (h_4 - K) \cdot CoN_T(h_4)$

Таблица 13: Квантильное хеджирование: множество успешного хеджирования и выплаты хеджирующего портфеля, если средний темп роста меньше процентной ставки (на примере стрэддла)

Множество успешного хеджирования в зависимости от вероятности успеха имеет довольно экзотичный вид в этом случае. Оно представлено на рисунке 63. Средний темп роста и волатильность базового актива составляют 0.04 и 0.20. Базовый процесс начинается на уровне 100, срок исполнения равен единице, процентная ставка составляет 0.06.

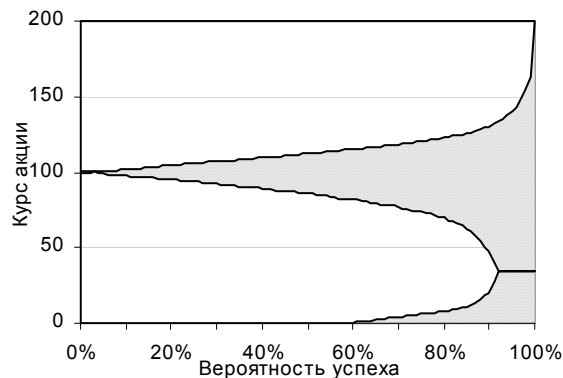


Рис. 63: Квантильное хеджирование: множество успешного хеджирования, если средний темп роста меньше процентной ставки (на примере стрэддла)

Вариант 2: $(\mu - r)/\sigma^2 \leq 1$ и $\mu > r$, функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ выпукла и возрастает

На рисунке 64 показано, как определяется структура множества успешного хеджирования при увеличении допустимого уровня риска.

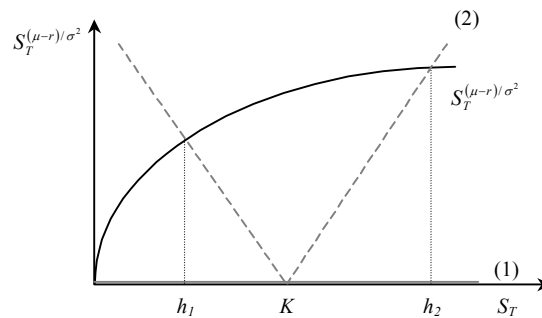


Рис. 64: Квантильное хеджирование: нахождение множества успешного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$ и $\mu > r$ (на примере стрэддла)

Множество успешного хеджирования состоит из целостной области, ограниченной абсциссами точек пересечения h_1 и h_2 . Расстояние между ними сокращается, если хеджер повышает допустимый уровень риска. В таблице 14 представлено множество успешного хеджирования и выплаты хеджирующего портфеля в зависимости от инвестированного капитала и соответствующему ему риска.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; +\infty)$	$V_T = P_T(K) + C_T(K)$
2	$(h_1; h_2)$	$V_T = P_T(K) - P_T(h_1) - (K - h_1) \cdot [1 - CoN_T(h_1)]$ $+ C_T(K) - C_T(h_2) - (h_2 - K) \cdot CoN_T(h_2)$

Таблица 14: Квантильное хеджирование: множество успешного хеджирования и выплаты хеджирующего портфеля, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$ и $\mu > r$ (на примере стрэддла)

Множество успешного хеджирования в зависимости от вероятности успеха представлено на рисунке 65. Средний темп роста равен 0.09, остальные параметры модели оставлены без изменений. Множество хеджируемых

состояний состоит из целостной области, включающей состояния, близкие к цене исполнения. Оно расширяется при повышении вероятности успеха.

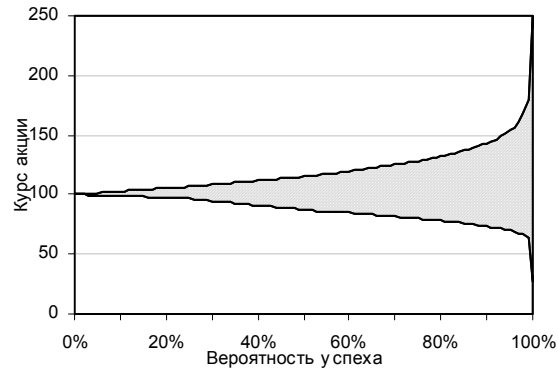


Рис. 65: Квантильное хеджирование: множество успешного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 \leq 1$ и $\mu > r$ (на примере стрэддла)

Вариант 3: $(\mu - r)/\sigma^2 > 1$, функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ вогнута и возрастает

Нахождение множества успешного хеджирования в зависимости от уровня риска показано на рисунке 66. При совершенном хеджировании прямые ограничения находятся в положении (1). По мере увеличения допустимого уровня риска, они поднимаются. Множество успешного хеджирования представляет собой целостную область, ограниченную слева, до тех пор, пока правая прямая не коснется степенной функции (позиция (2)). При дальнейшем увеличении риска страхуются состояния, близкие к цене исполнения, и состояния, в которых курс базового актива превышает некоторую высокую границу (позиция (3)). Прямые ограничения вертикальны и множество успешного хеджирования пусто, если хеджер отказывается от защиты от риска.

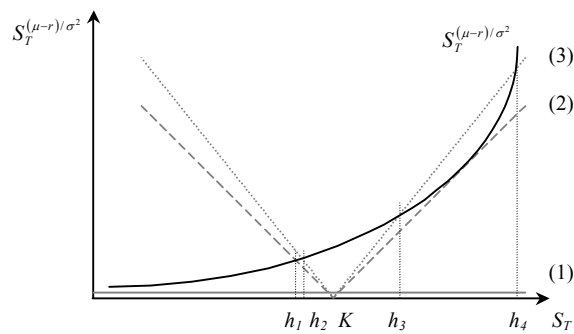


Рис. 66: Квантильное хеджирование: нахождение множества успешного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 > 1$ (на примере стрэддла)

Выплаты хеджирующего портфеля и структура хеджируемых состояний в зависимости от уровня риска показаны в таблице 15. Вероятность успеха уменьшается при переходе от ограничения 1 к ограничению 3.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; \infty)$	$V_T = P_T(K) + C_T(K)$
2	$(h_1; \infty)$	$V_T = P_T(K) - P_T(h_1) - (K - h_1) \cdot [1 - CoN_T(h_1)] + C_T(K)$
3	$(h_2; h_3) \cap (h_4; \infty)$	$V_T = P_T(K) - P_T(h_2) - (K - h_2) \cdot [1 - CoN_T(h_2)] + C_T(K) - C_T(h_3) - (h_3 - K) \cdot CoN_T(h_3) + C_T(h_4) + (h_4 - K) \cdot CoN_T(h_4)$

Таблица 15: Квантильное хеджирование: множество успеха и выплаты хеджирующего портфеля, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 > 1$ (на примере стрэддла)

И в этом случае множество успешного хеджирования, как функция от вероятности успеха, достаточно экзотично. Оно представлено на рисунке 67. Средний темп роста принят равным 0.15, остальные параметры оставлены без изменений.

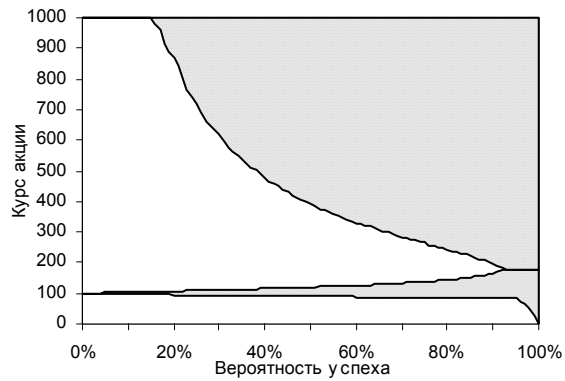


Рис. 67: Квантильное хеджирование: множество успешного хеджирования, если выполняется условие $(\mu-r)/\sigma^2 > 1$ (на примере стрэддла)

Зависимость вероятности успеха от параметров модели достаточно сложна, и следует применять численные методы для ее оценки. На рисунке 68 вероятность успеха показана, как функция от среднего темпа роста базового актива и стоимости хеджирования. Отчетливо видно, что механизм воздействия параметров модели на взаимосвязь между успехом и стоимостью хеджирования далеко нетривиален.

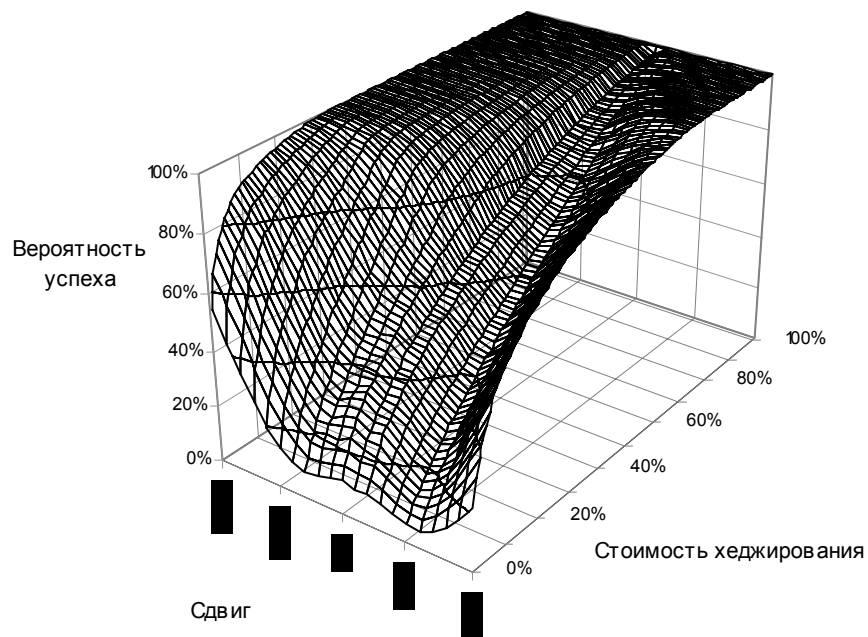


Рис. 68: Квантильное хеджирование: вероятность успеха как функция от среднего темпа роста и стоимости хеджирования (на примере стрэддла)

На примере стрэддла также отчетливо прослеживается отсутствие свойства аддитивности у метода квантильного хеджирования. На рисунке 69 видно, что стоимость хеджирования стрэддла выше, чем сумма стоимостей хеджирования составляющих его опционов. Это указывает на супераддитивность.

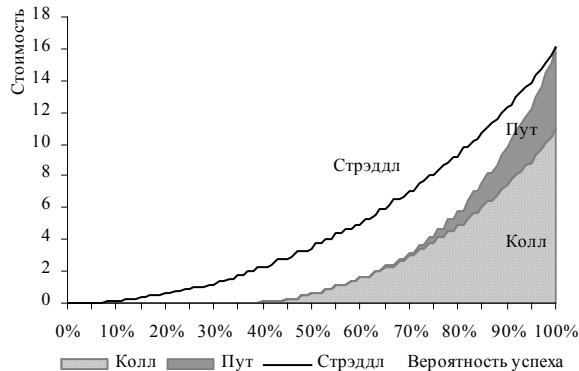


Рис. 69: Аддитивность квантильного хеджирования на примере стрэддла

В следующем разделе мы рассмотрим защиту от риска стрэддла с помощью метода хеджирования ожидаемых потерь. Структура множества успешного хеджирования проще в этом случае, и взаимосвязь между успехом и стоимостью хеджирования более прозрачна.

Хеджирование ожидаемых потерь на примере стрэддла

В случае хеджирования ожидаемых потерь множество успешного хеджирования состоит из одной целостной области. Его форма задается уравнением (109):

$$A = \left\{ \omega \left| S_T^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}} > g \right. \right\},$$

где константа g выводится из ограничения (110). Разность среднего темпа роста и процентной ставкой определяет форму множества успешного хеджирования.

Вариант 1: $\mu \leq r$, функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ убывает

Нахождение множества успешного хеджирования для различного уровня риска показано на рисунке 70. Прямая ограничения (1) соответствует совершенному хеджированию. Если хеджер допускает больший уровень риска, она сдвигается параллельно вверх. В положении (2) абсцисса h_1 точки пересечения прямой ограничения со степенной функцией $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ находится справа от цены исполнения K . Множество успешного хеджирования охватывает состояния слева от границы h_1 . Дальнейшее увеличение склонности к риску смещает прямую ограничения дальше вверх, и граница множества успешного хеджирования смещается влево.

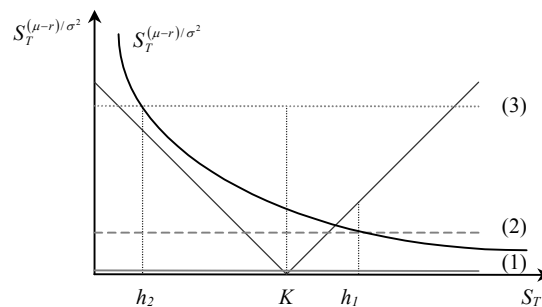


Рис. 70: Хеджирование ожидаемых потерь: нахождение множества успешного хеджирования, если средний темп роста меньше процентной ставки (на примере стрэддла)

В таблице 16 представлено множество хеджируемых состояний и выплаты хеджирующего портфеля в зависимости от допустимого уровня риска.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; \infty)$	$V_T = P_T(K) + C_T(K)$
2	$(0; h_1)$	$V_T = P_T(K) + C_T(K) - C_T(h_1) - (h_1 - K) \cdot CoN_T(h_1)$
3	$(0; h_2)$	$V_T = P_T(h_2) + (K - h_2) \cdot [1 - CoN_T(h_2)]$

Таблица 16: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успеха и выплаты хеджирующего портфеля, если средний темп роста меньше ставки процента (на примере стрэддла)

На рисунке 71 множество успешного хеджирования представлено в зависимости от ожидаемого успеха. Базовый процесс начинается на уровне 100, его средний темп роста и волатильность составляют 0.03 и 0.05. Процентная ставка равна 0.06. Срок исполнения стрэддла равен единице. На графике видно, что необходимо застраховать большее число состояний, чтобы достичь определенного увеличения ожидаемого успеха, если курс базового актива близок к цене исполнения. Это объясняется тем, что выплаты стрэддла в этом регионе малы, и их вклад в ожидаемый убыток и стоимость воспроизведения низки.

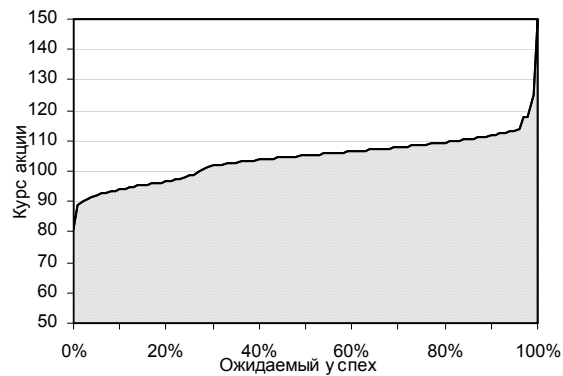


Рис. 71: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования, если средний темп роста меньше процентной ставки (на примере стрэддла)

Вариант 2: $\mu > r$, функция $S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$ возрастает

Если средний темп роста базового процесса превышает процентную ставку, то следует воспроизводить выплаты в состояниях с высоким курсом базового актива. На рисунке 72 показано, как определить множество успешного хеджирования в зависимости от инвестированного капитала и, соответственно, от допустимого уровня риска.

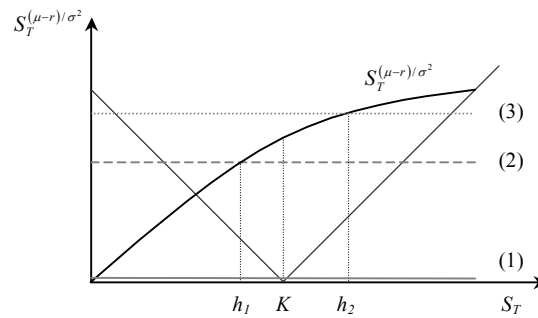


Рис. 72: Хеджирование ожидаемых потерь: нахождение множества успешного хеджирования, если средний темп роста больше процентной ставки (на примере стрэддла)

Прямая ограничения (1) соответствует случаю совершенного хеджирования. При увеличении склонности к риску, она смещается параллельно вверх (позиции (2) и (3)). Абсцисса точки пересечения степенной функции с функцией ограничения сдвигается вправо, и множество успешного хеджирования сокращается. В таблице 17 приведены его возможные виды и выплаты хеджирующего портфеля в зависимости о уровня риска.

Огр.	МУХ	Выплаты хеджирующего портфеля
1	$(0; \infty)$	$V_T = P_T(K) + C_T(K)$
2	$(h_1; \infty)$	$V_T = P_T(K) - P_T(h_1) - (K - h_1) \cdot [1 - CoN_T(h_1)] + C_T(K)$
3	$(h_2; \infty)$	$V_T = C_T(K) + (K - h_2) \cdot CoN_T(h_2)$

Таблица 17: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования и выплаты хеджирующего портфеля, если средний темп роста больше процентной ставки (на примере стрэддла)

Множество успешного хеджирования, как функция от ожидаемого успеха, представлено на рисунке 73. Средний темп роста принят равным 0.12, остальным параметры модели оставлены прежние значения. На графике видно, что множество успешного хеджирования охватывает состояния с высоким курсом базового актива. По мере увеличения инвестиций в хеджирующий портфель в него добавляются состояния с более низким курсом.

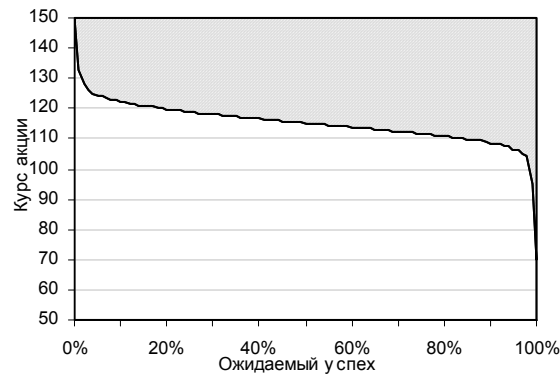


Рис. 73: Хеджирование ожидаемых потерь: множество успешного хеджирования, если средний темп роста больше процентной ставки (на примере стрэддла)

Величина среднего темпа роста в сравнении с процентной ставкой в значительной степени определяет зависимость успеха от стоимости хеджирования. Если они равны, то зависимость линейна. Чем сильнее они отличаются друг от друга, тем более выпукла взаимосвязь. На рисунке 74 ожидаемый успех представлен, как функция от среднего темпа роста и стоимости хеджирования.

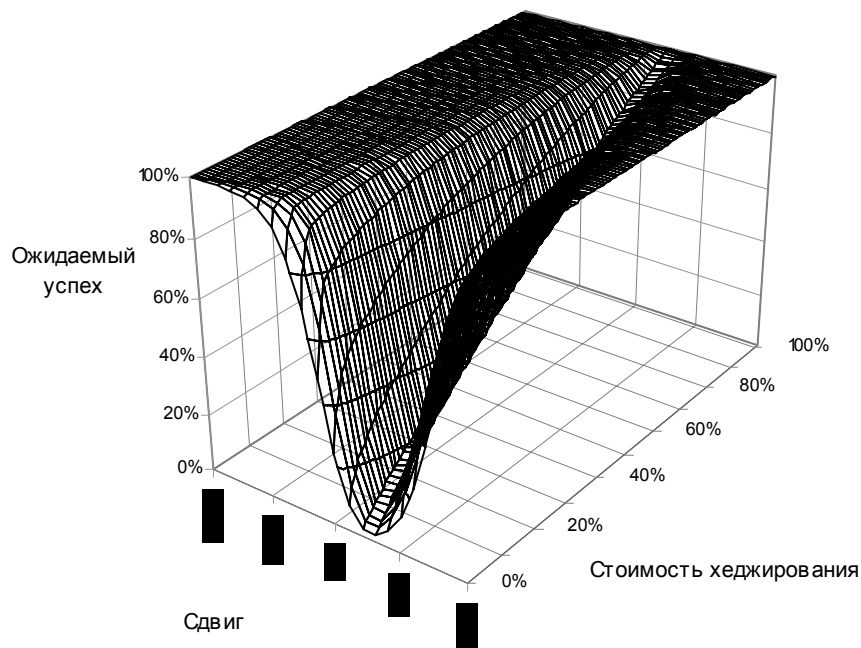


Рис. 74: Ожидаемый успех, как функция от среднего темпа роста и стоимости хеджирования, на примере стрэддла

На примере стрэддла также можно проследить, что свойство аддитивности у метода хеджирования ожидаемых потерь не выполняется. Стоимость защиты от риска стрэддла ниже, чем сумма стоимостей хеджирования составляющих его опционов колл и пут, то есть имеет место субаддитивность.

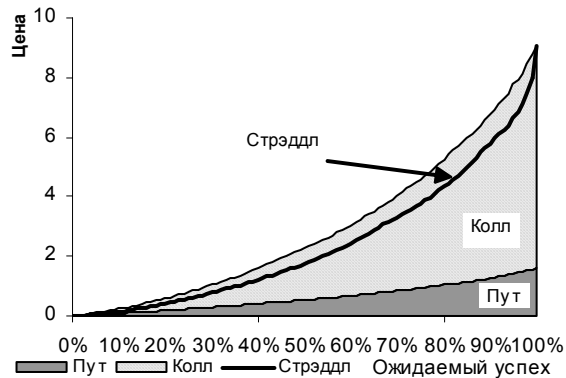


Рис. 75: Аддитивность хеджирования ожидаемых потерь на примере стрэддла

На рисунке 75 рассматриваются срочные позиции на базовый актив со средним темпом роста 0.15, волатильностью 0.10 и стартовым значением 100. Цена исполнения опционов колл и пут равна 100, срок исполнения равен единице.

Отметим, что множества успешного хеджирования при использовании методов квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь не совпадают ни при одной из комбинаций среднего темпа роста, процентной ставки и волатильности. Поэтому отсутствует хеджирующая стратегия, которая могла бы быть оптимальной как по критерию квантиля, так и по критерию ожидаемого убытка.

В этом разделе мы показали, что концепции квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь могут применяться для защиты от риска различных торговых стратегий из финансовых опционов. Для управления риском таких позиций сначала определяется структура выплат исходя из начального капитала и допустимого уровня риска. Она рассчитывается из

аналитического определения множества успешного хеджирования (см. формулы (47) и (109)). Затем выплаты срочной позиции реплицируются на множестве успешного хеджирования. Для анализа зависимости сложных опционных стратегий от процентной ставки, особенностей базового актива и ожиданий владельца срочной позиции следует применять численные методы.

Выводы по результатам исследования

В данном диссертационном исследовании ставилась цель изучения новых подходов к ценообразованию и хеджированию финансовых опционов, сравнения этих подходов с традиционно используемыми в финансовой индустрии методами и анализа возможностей их применения на российском срочном рынке.

1. В результате анализа методов теории хеджирования и ценообразования производных инструментов была составлена рабочая классификация основных направлений современных исследований. Было выявлено, что методы несовершенного хеджирования представляют собой новый подход к управлению риском позиции из производных инструментов, позволяющий учитывать ожидания держателя срочной позиции, его отношение к риску, а также особенности его инвестиционной стратегии при построении защиты от риска.

2. а). В диссертационном исследовании было установлено, что методы квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь позволяют снизить стоимость защиты от риска за счет возможных потерь. Для снижения стоимости хеджирования оба метода предполагают в некоторых состояниях полностью отказаться от репликации.

б). Множество хеджируемых состояний зависит от вида срочной позиции и выбранной меры риска. Хеджирующая стратегия может быть оптимальной как по критерию квантиля, так и ожидаемого убытка только при определенных условиях. Как правило, сложные позиции в производных инструментах могут быть оптимально защищены от риска только по одному из критериев.

в). Метод квантильного хеджирования вызывает критику, поскольку в нем рассматривается исключительно вероятность возникновения потерь и не учитывается их размер. Для практического применения предпочтительнее защита от риска по методу хеджирования ожидаемых потерь, поскольку она основывается как на вероятности, так и на величине возможного убытка.

г). На численных примерах было установлено, что свойство аддитивности отсутствует как у метода квантильного хеджирования, так и у метода хеджирования ожидаемых потерь. При использовании данных методов необходимо учитывать, что стоимость хеджирования срочной позиции, как правило, не равняется сумме стоимостей хеджирования составляющих ее инструментов.

3. а). Проведенное исследование показало, что метод квантильного хеджирования наиболее эффективен, если вероятность того, что срочная позиция будет исполнена "в деньгах" мала. В этом случае достигается наибольшее приращение вероятности успеха хеджирующей стратегии на единицу стоимости позиции.

б). Эффективность метода хеджирования ожидаемых потерь определяется, главным образом, соотношением ожидаемого темпа роста базового актива и процентной ставки. Чем сильнее различие между ними, тем чувствительнее ожидаемый успех к изменению капитала хеджирующего портфеля.

4. В ходе исследования был разработан трехэтапный механизм реализации хеджирующей стратегии по методам квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь:

Шаг 1: Нахождение структуры множества успешного хеджирования в зависимости от вида опционной позиции и ожидаемых роста и

волатильности базового актива и процентной ставки, а также отношения хеджера к риску.

Шаг 2: Определение выплат хеджирующей стратегии на множестве хеджируемых состояний.

Шаг 3: Репликация выплат хеджирующей стратегии (например, методом дельта хеджирования)

5. Защита от риска сложных позиций в производных инструментах предполагает использование методов численного анализа. Для этой цели была разработана специальная компьютерная программа, позволяющая анализ стратегий несовершенного хеджирования в зависимости от типа срочной позиции, ожиданий ее владельца и его отношения к риску.

6. При построении защиты от риска по методам квантильного хеджирования и хеджирования ожидаемых потерь держатель срочной позиции может корректировать хеджирующую стратегию, изменяя структуру множества хеджируемых состояний на основании своих ожиданий.

7. Текущее развитие фондового рынка в России позволяет эффективное использование методов несовершенного хеджирования на практике.

Дальнейшие исследования в данной области целесообразно направить на изучение возможностей комбинирования различных методов несовершенного хеджирования в рамках единой стратегии управления риском, а также подвергнуть их анализу на основе моделей неполного рынка, моделей с ограничениями и транзакционными издержками.

Литература

- 1 Аристотель. Политика. – М.: Издательство АСТ, 2002. – 394 с.
- 2 Архангельский А.Я. Программирование в C++Builder 5. – М.: ЗАО "Издательство БИНОМ", 2002. – 1152 с.
- 3 Балабушкин А.Н. Опционы и фьючерсы. – М.: Вега, 1996. – 176 с.
- 4 Балабушкин А.Н. Опционы и фьючерсы. Методическое пособие. – М.: Фондовая биржа РТС, 2002. – 92 с.
- 5 Берзон Н.И., Аршавский А.Ю., Буянова Е.А. Фондовый рынок: Учеб. пособие для высш. учебн. зав. экон. профиля / Гос. унив. – Высшая школа экономики. Высшая школа менеджмента. Под ред. Н.И. Берзона. – 3-е изд., – М.: Вита-пресс, 2002. – 560 с.
- 6 Берзон Н.И. Финансовый менеджмент. – М.: Академия, 2003. – 335 с.
- 7 Бернштейн П. Против богов: Укрощение риска / Пер. с англ. – М.: Олимп-Бизнес, 2000. – 400 с.
- 8 Биржевое дело: Учебник / Под ред. В.А. Галанова, А.И. Басова. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 304 с.
- 9 Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов: Пер. с англ. – М.: Олимп-Бизнес, 1997. – 1120 с.
- 10 Буренин А.Н. Рынки производных финансовых инструментов. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 368 с.
- 11 Буренин А.Н. Рынок ценных бумаг и производных инструментов: Учеб. пос. – М.: Научно-техническое общество имени академика С.И.Вавилова, 2002. – 351 с.

-
- 12 Вейсвеллер Р. Арбитраж. Возможности и техника операций на финансовых и товарных рынках: Пер. с англ. – М.: Церих-ПЭЛ, 1995. – 208 с.
 - 13 Волков С.Н., Крамков Д.О. О методологии хеджирования опционов // Обозрение прикладной математики. – 1997. – т. 4. – с. 18-65.
 - 14 Галанов В.А. Производные инструменты срочного рынка: фьючерсы, опционы, свопы: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 464 с.
 - 15 Галанов В.А., Басов А.И. Рынок ценных бумаг: Учебник, 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2002. - 448 с.
 - 16 Галиц Л. Финансовая инженерия: инструменты и способы управления финансовым риском. – М.: ТВП, 1996. – 576 с.
 - 17 Гуслистый А.В., Силантьев С.А. Логика опционной торговли. – М.: Интернет-трейдинг, 2003. – 344 с.
 - 18 Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1997. – 368 с.
 - 19 Ибрагимова Л.Ф. Рынки срочных сделок. – М.: Русская Деловая Литература, 1999. – 176 с.
 - 20 Ибрагимова Л.Ф. Рынки срочных сделок: для продолжающих и тех, кто призван регулировать. – М.: Изд-во РУДН, 2000. – 233 с.
 - 21 Кабанов Ю.М., Крамков Д.О. Отсутствие арбитража и эквивалентные мартингаловые меры: новое доказательство теоремы Харрисона-Плиски // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – т. 39. – с. 635-640.
 - 22 Казарин М. Высокие технологии в управлении инвестициями // Рынок ценных бумаг. – 2003. – № 15. – с. 12-17.

-
- 23 Колб Р.У. Финансовые дериваты: Учебник. – М.: Филинь, 1997. – 336 с.
- 24 Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – 3-е изд., М.: Фазис, 1998. – 144 с.
- 25 Крамков Д.О. О замыкании семейства мартингаловых мер и опциональном разложении семимартингалов // Теория вероятностей и ее применения. – 1996. – т. 41. – с. 892-896.
- 26 Малер Г. Производные финансовые инструменты: прибыли и убытки / Пер. с нем. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 160 с.
- 27 Маршал Дж.Ф., Бансал В.К. Финансовая инженерия. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 784 с.
- 28 Мельников А.В. О стохастическом анализе в современной математике финансов и страхования // Обзорные прикладной промышленной математики. – 1995. – т. 2, № 4. – с. 514-526.
- 29 Мельников А.В. Финансовые рынки: Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. – М.: ТВП, 1997. – 126 с.
- 30 Мельников А.В. Финансовые инновации и проблемы управления риском // Управление риском. – 1997. – т. 4. – с. 34-41.
- 31 Мельников А.В., Нечаев М.Л. К вопросу о хеджировании платежных обязательств в среднеквадратическом // Теория вероятностей и ее применения. – 1998. – т. 43. – с. 672-691.
- 32 Мельников А.В. Об инновационных и рискованных аспектах эволюции финансовой системы // Вопросы анализа риска. – 1999. – т. 1, № 1. – с. 22-27.

-
- 33 Мельников А.В. О глобальных инновационных процессах на финансовых рынках // Вопросы анализа риска. – 1999. – т. 1, № 2-3. – с. 10-14.
- 34 Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ-ВШЭ, 2001. – 260 с.
- 35 Миркин Я.М. Ценные бумаги и фондовый рынок: Профессиональный курс в Финансовой Академии при Правительстве РФ. – М.: Перспектива, 1995. – 536 с.
- 36 Миркин Я.М. Розничный спрос на ценные бумаги // Рынок ценных бумаг. – 2000. – № 19. – с. 29-31.
- 37 Миркин Я.М. Как изменять технологическую инфраструктуру фондового рынка? // Рынок ценных бумаг. – 2000. – № 21. – с. 34-36.
- 38 Миркин Я.М. Уход торговой активности на Запад: реалии 2000 года // Рынок ценных бумаг. – 2001. – № 1. – с. 36-39.
- 39 Миркин Я.М. Волатильность // Рынок ценных бумаг. – 2001. – № 6. – с. 32-35.
- 40 Миркин Я.М. Рынок ценных бумаг России: воздействие фундаментальных факторов, прогноз и политика развития. – М.: Альпина Паблишер, 2002. – 624 с.
- 41 Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- 42 Развитие рынка ценных бумаг в Российской Федерации (материалы к дискуссии). – М.: ФКЦБ России, Издательский дом "РЦБ", 2000. – 80 с.
- 43 Развитие рынка ценных бумаг в Российской Федерации (материалы к дискуссии). – М.: ФКЦБ России, 2002. – 312 с.

-
- 44 Рубцов Б.Б. Мировые рынки ценных бумаг. – М.: Экзамен, 2002. – 447 с.
- 45 Сафонова Т.Ю. Биржевая торговля производными инструментами: Учеб.-практ. пособие. – М.: Дело, 2000. – 544 с.
- 46 Фельдман А.Б. Основы рынка производных ценных бумаг. Курс: Производные ценные бумаги: Учебное пособие / Финансовая академия при Правительстве РФ. – М.: ФА, 1995. – 64 с.
- 47 Чекулаев М.В. Загадки и тайны опционной торговли. – М.: ИК Аналитика, 2001. – 432 с.
- 48 Чесноков А.С. Инвестиционная стратегия, опционы и фьючерсы. – М.: НИИ управления министерства экономики РФ, 1993. – 112 с.
- 49 Чурилин И.: Срочный рынок в ожидании "товарняка" // Рынок ценных бумаг. – 2003. – №15 (246). – с. 8-11.
- 50 Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ: 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 271 с.
- 51 Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 660 с.
- 52 Ширяев А.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. - 1994. – т. 39. – с. 5-22.
- 53 Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – т. 39. – с. 21-79.
- 54 Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II.

-
- Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – т. 39. – с. 80-129.
- 55 Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики, Т. 1,2. – М.: Фазис, 1998. – 1056 с.
- 56 Albrecht P., Maurer R. Investment- und Risikomanagement: Modelle, Methoden, Anwendungen. – Stuttgart: Schäffer-Poeschel, 2002. – 697 S.
- 57 Allayannis G., Weston J.P. The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value. – University of Virginia: Working paper, 1998. – 36 p.
- 58 Amram M., Kulatilaka N. Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World. – Boston: Harvard Business School Press, 1998. – 246 p.
- 59 Andersen T. Stochastic autoregression volatility: a frameworkk for volatility modelling // Mathematical Finance. – 1994. – Vol. 4. – pp. 75-102.
- 60 Bachelier L. Theory of Speculation, in Cootner (ed.). The Random Character of Stock Prices. – Cambridge: MIT, 1964. – pp. 17-78.
- 61 Baxter M., Rennie A. Financial calculus. An introduction to derivative pricing. – Cambridge: Cambridge university press, 1996. – 243 p.
- 62 Beaumont P.H. Financial Engineering Principles: A Unified Theory for Financial Product Analysis and Valuation. – Chichester: John Wiley & Sons, 2003. – 320 p.
- 63 Benninga S. Financial Modeling, 2nd Edition. – Cambridge: MIT Press, 2000. – 640 p.
- 64 Bensaid B., Lesne J.P., Pages H., and Scheinkman J. Derivative Asset Pricing with Transaction Costs // Mathematical Finance. – 1992. – Vol. 2. – pp. 63-86.

-
- 65 Bessis J. Risk Management in Banking, 2nd Edition. – Chichester: J.Wiley & Sons, 2002. – 812 p.
- 66 Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – pp. 637-659.
- 67 Boness A.J. Elements of a theory of stock-option value // Journal of Political Economy. – 1984. - Vol. 72. – pp. 163-175.
- 68 Bouchaud J.-Ph., Potters M. Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management, 2nd Edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 400 p.
- 69 Boyle P., Vorst T. Option Replication in Discrete Time with Transaction Costs // Journal of Finance. – 1992. – Vol. 47. – pp. 271-293.
- 70 Carr P., Wu L. Static Hedging of Standard Options. – 2002. – Working paper, New York University. – 32 p.
- 71 Clewlow L., Strickland Ch.: Implementing derivatives models. – Chichester: J.Wiley & Sons, 1998. – 330 p.
- 72 Copeland T., Antikarov V. Real Options. – New York: TEXERE LLC., 2003. – 384 p.
- 73 Copeland T., Koller T., Murrin J. Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies, 3rd Edition. – Chichester: J.Wiley & Sons., 2000. – 512 p.
- 74 Cox J., Ross R. The valuation of options for alternative stochastic processes // Journal of Financial Economics. – 1976. – Vol. 3. – pp. 145-166.
- 75 Cox J., Ross R., Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach // Journal of Financial Economics. – 1979. – Vol. 3. – pp. 229-263.

-
- 76 Cox J., Rubinstein M. Option markets. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1985. – 498 p.
- 77 Cvitanić J., Karatzas I. Hedging contingent claims with constrained portfolios // Ann. Appl. Probab. – 1993. – Vol. 3. – pp. 652-681.
- 78 Damodaran A. The Promise and Peril of Real Options. // Working paper <http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/pdfiles/papers/realopt.pdf>
- 79 Derman E., Kani I. The local volatility surface: Unlocking the information in index option prices // Financial Analysts Journal. – 1996. – Vol. 4. – pp. 25-36.
- 80 de La Vega, J. Die Verwirrung der Verwirrungen - 4 Dialoge über die Börse in Amsterdam, 2. Auflage. – München: Börsenmedien AG-Verlag, 2002. – 220 S. // перепечатка с Confusion de Confusiones (1688).
- 81 Duan J.-C. The GARCH option pricing model. // Mathematical Finance. – 1995. – Vol. 5. – pp. 13-22.
- 82 Duffie D. Futures Markets. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989. – 584 p.
- 83 Duffie D., Richardson H.R. Mean-variance hedging in continuous time // Annals of Applied Probability. – 1991. – Vol. 1. – pp. 1-15.
- 84 Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory, 3-rd Edition. – Princeton: Princeton University Press, 2001. – 472 p.
- 85 El Karoui N., Quenez M.C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // SIAM J. Control Optim. – 1995. – Vol. 33, No 1. – pp. 29-66.
- 86 Foellmer H., Leukert P. Quantile Hedging // Finance and Stochastics. – 1999. – Vol. 3. – pp. 251-273.

-
- 87 Foellmer H., Leukert P. Efficient Hedging: Cost versus shortfall risk // Finance and Stochastics. – 2000. – Vol. 4. – pp. 117-146.
- 88 Geczy C., Minton B., Schrand C. Why firms use currency derivatives? // Journal of Finance. – 1997. – Vol. 52. – pp. 865-879.
- 89 Gouriéroux C., Laurent J-P. Estimation of a Dynamic Hedge. – 1996. – Humboldt University: Working paper.
- 90 Harrison M.J., Kreps D.M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory. – 1979. – Vol. 20. – pp. 381-408.
- 91 Harrison M.J., Pliska S.R. A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets // Stochastic Process. Appl. – 1983. – Vol. 15. – pp. 313-316.
- 92 Harrison M.J., Pliska S.R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochastic Process. Appl. – 1981. – Vol. 11. – pp. 215-260.
- 93 Haug, E.G.: The Complete Guide to Option Pricing Formulas. – New York: McGraw-Hill, 1997. – 232 p.
- 94 Ho T., Lee S. The Oxford Guide to Financial Modeling: Applications for Capital Markets, Corporate Finance, Risk Management and Financial Institutions. – Oxford: Oxford University Press, 2004. – 735 p.
- 95 Hoffman N., Platen E., Schweizer M. Option pricing under incompleteness and stochastic volatility // Mathematical Finance. – 1992. – Vol. 2. – pp. 189-196.
- 96 Holton G. Value-at-Risk: Theory and Practice. – New York: Academic Press, 2003. – 405 p.
- 97 Hull J., White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities // Journal of Finance. – 1987. – Vol. 42. – pp. 281-300.

-
- 98 Hull J. *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 4th Edition. – New Jersey: Prentice Hall, 2001. – 512 p.
- 99 Hull J. *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th Edition. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 2002. – 744 p.
- 100 Hull J.: *Risk Management and Financial Engineering*. – New Jersey: Prentice Hall, 2003. – 520 p.
- 101 Jackwerth J., Rubinstein M: Recovering probability distributions from option prices // *The Journal of Finance*. – 1996. – Vol. 1(5). – pp. 1611-1631.
- 102 Jackson M., Staunton M. *Advanced modelling in finance using Excel and VBA*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2001. – 276 p.
- 103 Jorion Ph. *Value at Risk*. – New York: McGraw-Hill, 2000. – 364 p.
- 104 Karatzas I., Schreve S.E. *Methods of Mathematical Finance*. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 422 p.
- 105 Kariya T. *Quantitative Methods for Portfolio Analysis*. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 308 p.
- 106 Korn R. Contingent claim valuation in a market with different interest rates // *Zeitschrift für Operation Research*. – 1995. – Vol. 42. – pp. 274-292.
- 107 Kulldorff M. Optimal control of favorable games with a time-limit // *SIAM J. Control Optimization*. – 1993. – Vol. 31. – pp. 52-69.
- 108 Merton R.C. Theory of rational option pricing // *Bell J. Economics Manag. Sci.* – 1973. – Vol. 4, No1. – pp. 141-183.
- 109 Merton R.C. Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous // *Journal of Financial Economics*. – 1976. – Vol. 3. – pp. 125-144.

-
- 110 Merton R.C. *Continuous-Time Finance*. – Oxford: Basil-Blackwell, 1992. – 334 p.
- 111 Mikosch T. *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*. – New York: World Scientific Pub Co., 1999. – 224 p.
- 112 Mixon S. Factors explaining movements in the implied volatility surface // *Journal of Futures Markets*. – 2002. – Vol. 10. – pp. 915-937.
- 113 Mun J. *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2002. – 386 p.
- 114 Neftci S.N. *Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2nd Edition. – New York: Academic Press, 2000. – 527 p.
- 115 Neil A.C. *Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models*. – New York: McGraw-Hill, 1997. – 496 p.
- 116 Overhaus M., Ferraris A., Knudsen Th., Milward R., Nguyen-Ngoc L., Schindlmayr G. *Equity Derivatives*. – Chichester: J. Wiley & Sons, Inc., 2001. – 208 p.
- 117 Reiner E., Rubenstein M.: Breaking down the barriers // *Risk*. – 1991. – Vol. 4. – pp. 28-35.
- 118 Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // *Industrial Management Review*. – 1965. – Vol. 6. – pp. 13-31.
- 119 Schweizer M. *A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches*. – 1999. – Working paper, Technische Universität Berlin.
- 120 Shephard N. *Stochastic Volatility (Advanced Texts in Econometrics)*. – Oxford: Oxford University Press, 2004. – 352 p.

-
- 121 Sprenkle C.M.: Warrant prices as indicators of expectations and preferences, in *The random character of stock market prices*, ed. Paul H. Cootner, Cambridge: MIT Press. 1964. P. 412-474.
- 122 Steiner P., Uhlir, H. *Wertpapieranalyse*, Auflage 4. – Heidelberg: Physica-Verl., 2001. – 370 S.
- 123 Taleb N. *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options* – Chichester: J.Wiley & Sons, 1996. – 528 p.
- 124 Tavella D., Randall C. *Pricing Financial Instruments: the Finite Difference Method*. – Chichester: J.Wiley & Sons, 2000. – 237 p.
- 125 Tavella D. *Quantitative Methods in Derivatives Pricing: An Introduction to Computational Finance*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2002. – 256 p.
- 126 Trigeorgis, L.: A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-option Investments // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. – 1991. – Vol. 26. – pp. 309-326.