

**Федеральное государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации»
(Финакадемия)**

УДК 330.4.:519.816:519.246.8

№ госрегистрации

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе
Финакадемии

_____ М.А. Федотова

«_____» _____ 2008 г.

ОТЧЕТ

по научно-исследовательской работе

Модели финансовых рынков и прогноз

Руководитель НИР,
д. ф-м. н., проф. каф. «Математика и
финансовые приложения »

Попов В.Ю.

Москва 2008

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

<p>Руководитель темы д. ф-м. н. проф. каф. «Математика и финансовые приложения»</p>	<p style="text-align: center;">Попов В.Ю. (Построение модели фондового рынка, отражающей появление паники перед наступающим кризисом)</p>
<p>Ответственный исполнитель к. ф-м. н. доц. каф. «Математика и финансовые приложения»,</p>	<p style="text-align: center;">Шаповал Н.Б. (Разработка оценки эффективности прогноза кризисов)</p>
<p>Исполнители: к. ф-м. н. зав. каф. «Математика и финансовые приложения»</p>	<p style="text-align: center;">Гисин В. Б. (Описание катастроф на фондовом рынке в терминах распределения Ципфа)</p>
<p>студентка 5го курса факультета математических методов в экономике и анализа рисков, гр. МЭК-5-2</p>	<p style="text-align: center;">Лунева Е. П. (Анализ агентно-ориентированной модели фондового рынка)</p>

РЕФЕРАТ

Отчет 18 с. , 2 рис. , 26 источников.

АГЕНТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ, ИНДЕКС ВАРИАЦИИ, «ТЯЖЕЛЫЕ ХВОСТЫ», ФРАКТАЛЬНОСТЬ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИПФА

Объект исследования.

В работе исследованы статистические характеристики фондового рынка. Анализ рыночных закономерностей сталкивается с естественной трудностью – малым количеством данных. Поэтому не всегда ясно, какие наблюдаемые характеристики типичны для фондового рынка. Теоретическое моделирование позволяет получить каталоги произвольной длины. Изменяя параметры модели, легко проверить устойчивость найденных закономерностей.

Особый интерес представляют свойства катастрофических событий – финансовых кризисов. Классический подход основывается на выделении основных факторов, влияющих на финансовые процессы и их качественной интерпретации. Напротив, количественный подход часто связывают с ARCH и GARCH-моделями, предполагающих линейную зависимость выделенных факторов. Параметры этих моделей чувствительны к качественным изменениям макроэкономических показателей и поэтому редко оказывается применимым в долгосрочной перспективе. Причина чувствительности лежит именно в линейности моделей. Переход к нелинейным моделям значительно затрудняет анализ. Полагая фондовый рынок сложной нелинейной динамической системой, естественно воспользоваться развитым аппаратом теории динамических систем.

Цель работы.

1. Вычислить фрактальные свойства индекса Российской торговой системы (РТС) и сравнить их с предсказанием обобщённой модели Изинга.
2. Оценить, как соотношение между долгосрочным и краткосрочным трендами влияет на выбор стратегии трейдера с помощью агентно-ориентированных моделей.
3. Описать катастрофические падения крупных индексов в терминах распределения Ципфа.

Методы исследования.

Исследование принадлежит сложной междисциплинарной области, лежащей на пересечении финансов, статистической физики, теории вероятностей, статистики и информатики. В работе использованы качественные оценки макроэкономических показателей и факторные модели развития фондового рынка. Для численного моделирования многоагентных систем использованы классически структуры программирования, оптимизированные под архитектуру используемого компьютера. Точность эмпирического анализа реальных данных подтверждается стандартными статистическими процедурами. Адекватность моделей устанавливается в терминах распределения логарифмической доходности, фрактальности временных рядов, кластеризации волатильности, частотных характеристик (Фурье-анализ). Приведены количественные оценки прогнозных стратегий, основанные на двух видах ошибок, возникающих при проверке статистических гипотез.

Полученные результаты и их новизна.

1. Реализована обобщённая модель Изинга финансовых рынков. Для оценки её адекватности впервые использован индекс фрактальности, вычисленный по Дубовикову и др. Найдены значения параметров модели, для которых имеет место близость модельной динамики и индекса РТС в терминах распределений логарифмических доходностей, кластеризации волатильности и фрактальных свойств временных рядов.
2. Разработано обобщение агентно-ориентированной модели фондового рынка, введённой Сато и Такайясу, за счёт предположения о влиянии соотношения между долгосрочным и краткосрочным трендами на стратегию рыночных агентов. Показано, что построенная модель устойчивее исходной и точнее следует наблюдаемым статистическим закономерностям фондового рынка.
3. Получена оценка размера катастрофических скачков крупных ценных бумаг и рыночных индексов. Результат получен в предположении о том, что логарифмические доходности обладают распределением Ципфа.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-06-00283-а.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 Обобщенная модель Изинга и индекс РТС	7
1.1 Правила эволюции	7
1.2 Индекс вариации	8
2 Обобщенная модель Сато-Такайасу	9
2.1. Определение	9
2.1.1 Предположения модели	9
2.1.2 Рыночный механизм	9
2.1.3 Стратегии агентов	10
2.1.4 Начальные граничные условия	11
2.1.5 Параметры	11
2.2 Модель и индекс DJ	11
3 Закон Ципфа и доходность рискованных активов	13

1 Введение

Традиционная экономическая теория описывает финансовые рынки как положение равновесия, возникшее у системы экономических агентов, которые действуют рационально, опираясь на одинаковую информацию [1, 2]. Однако этот подход сталкивается с трудностями при объяснении наблюдаемых достаточно общих статистических закономерностей (англ. stylized facts).

Опишем их подробнее.

Во-первых, для распределения логарифмической доходности характерны тяжелые хвосты [3, 4]. Например, если рассмотреть крупные индексы фондового рынка, то вероятность больших по модулю значений логарифмической доходности убывает степенным образом.

Во-вторых, центральная часть логарифмической доходности близка к экспоненте.

В-третьих, финансовые временные ряды демонстрируют фрактальные свойства [5]. Здесь речь идет не только о фрактальной размерности самих рядов, но и о различных наблюдаемых закономерностях, выдерживающих степенное перемасштабирование.

В-четвертых, финансовые временные ряды характеризуются долгой памятью, определяемой с помощью корреляционной функции (кластеризация волатильности).

В-пятых, деятельность некоторых рыночных агентов носит спекулятивный характер. В результате образуются так называемые пузыри (bubbles).

Определенное несогласие классической теории и статистических закономерностей привело к созданию альтернативных подходов к моделированию финансовых рынков. Появились факторные и (или) регрессионные модели. В них априори предполагается зависимость текущих рыночных показателей от их предыдущих значений и от некоторых фиксированных факторов. Задача заключается в нахождении этой зависимости с приемлемой ошибкой. Существенное продвижение в этом направлении связано с GARCH-моделями [6], в которых в качестве фактора используется значения волатильности исследуемого временного ряда.

При описании эволюции временного ряда возникает вопрос о моделировании случайных влияний. Естественное предположение — считать случайность винеровским процессом. В этом случае удастся построить математическую теорию финансовых рынков [7, 8], которая в определенной степени соответствует статистическим закономерностям [9].

В концептуальной работе [10] указывается, что фондовый рынок можно рассматривать как сложную систему с большим числом степеней свободы, к которой применимы методы исследования динамических систем [11, 12]. В этой системе рыночные цены устанавливаются в результате взаимодействия большого числа агентов, поведение которых различно и лишь ограничено совершенно. Возникшие цены не являются равновесным в обычном экономическом понимании этого термина. В сложной системе возможно достижение динамического равновесия (например, что шарик, покоящийся в яме, находится в состоянии равновесия, однако и движение шарика по кругу может быть равновесием динамической системы).

Модели, описывающие рынок с помощью большого числа агентов, называются агентно-ориентированными моделями (agent based models). Так как механизм финансовых рынков сложен и недостаточно изучен, можно лишь говорить об интерпретации систем, определяемых агентно-ориентированными моделями, в терминах финансовых рынков. Преимущества конкретной модели определяются не похожестью их правил на реальный механизм (который, вообще можно считать «черным ящиком»), а проявлением статистических закономерностей, перечисленных выше.

Не претендуя на полноту, остановимся на некоторых конкретных моделях (их общее число велико, обзор идей и приложений см. в [10]).

В ряде исследований обобщена известная в физике модель Изинга и показана применимость обобщений к социально-экономическим системам [13, 14, 15]. Обобщение модели Изинга определяет взаимодействие рыночных агентов. Каждый агент наделён стратегией, которая может быть ограниченно рациональна [16]. Решения агента (покупать или продавать, и по какой цене) зависят от собственных предыдущих решений и их результата, а также от действий других агентов. Именно обучаемость агентов является основным фактором, адаптирующим исходную физическую модель к коллективному поведению людей. Значительный случайный эффект во взаимном влиянии агентов обеспечивает «тяжелые хвосты» лог-доходности и кластеризацию волатильности [17]. Стратегии, определённые в [8, 9], приводят к «пузырям» и внезапным кризисам.

Другая модель, обсуждаемая в статье, интерпретационно близка к обобщенным моделям Изинга. В статье [20] моделируется взаимодействие между агентами. В простейшем случае два агента: покупатель и продавец — устанавливают цены покупки и продажи в соответствии со своими предпочтениями. Если установленная цена покупки больше цены продажи, то происходит сделка. В противном случае продавец понижает цену, а покупатель повышает до тех пор, пока сделка не сможет состояться. Цена, по которой совершена сделка, объявляется рыночной ценой. Эта схема обобщена на большое число агентов. Согласно [20], модельные лог-доходности обладают «тяжелыми хвостами». Кроме того, при большом числе агентов модельная динамика имеет общие черты с GARCH процессами.

Степенное распределение является частным случаем закона Ципфа [21] или закона Ципфа-Мандельброта [22], который проявляется в ситуациях, когда случайная величина возникает как сумма большого числа неравноправных случайных величин. Причем, как отмечал Ю.А.Шрейдер в [3], — в ситуациях с максимальным неравноправием (принцип минимума симметрии), когда имеется выделенный архетип нормального состояния объекта, описываемого этими случайными величинами. Если выделено конечное число состояний объекта, ранжированных по степени отклонения от архетипа, в соответствии с законом Ципфа-Мандельброта вероятность возникновения того или иного состояния обратно пропорциональна его рангу. Естественным образом возникает задача, опираясь на закон Ципфа-Мандельброта, оценить область значений доходности рискованных активов.

Настоящий отчет организован следующим образом. В разделе 1 обсуждается обобщённая модель Изинга. Найдены значения параметров, при которых модельная цена и индекс РТС (Российской торговой системы) имеют близкий индекс вариации. В разделе 2 обобщена модель Сато-Такуйясу [20]. Установлено, что построенная модель демонстрирует рыночные статистические закономерности. В разделе 3 описаны катастрофические события с помощью распределения Ципфа. Завершает статью заключение.

1 Обобщенная модель Изинга и индекс РТС

1.1. Правила эволюции

Следуя [21], опишем эволюцию системы из N агентов. В каждый момент времени t агент может быть либо покупателем, либо продавцом. Функция $s_i(t)$ равна 1, если агент i — продавец и -1 в противном случае. Предполагается, что выбор позиции в момент времени $t + 1$ зависит от следующих факторов:

- ожидание $E_i(s_j)(t)$, формируемое агентом i на основе предполагаемого решения агента j ;

- влияние внешних новостей $G(t)$;
- индивидуальная информация $\varepsilon_i(t)$ агента i .

Динамика модели описывается уравнением

$$(1) \quad s_i(t) = \text{sign} \left(- \sum_{j=1}^N K_{ij}(t) E(s_j) + g_i G(t) + \varepsilon_i(t) \right).$$

Набор функций $\varepsilon_i(t)$, $E_i(s_j)(t)$, $K_{ij}(t)$ определяет поведение агента i . Коэффициенты K_{ij} отличны от нуля только для некоторого (малого) количества индексов j . Это ограничение появляется из-за того, что лишь небольшое число агентов непосредственно влияют на решение агента i . Коэффициенты g_i описывают индивидуальное восприятие внешних новостей. Они предполагаются равномерно распределёнными на $(0, \sigma_{\max})$. Индивидуальную информацию ε_i также считают случайной величиной. Она имеет нормальное распределение с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = \sigma_0 + u_i$, где значения u_i равномерно распределены в промежутке $(0, 0.1)$. Предполагается, что

$$(2) \quad K_{ij}(t) = \beta_i + \beta K_{ij}(t-1) + \beta_G G(t-1).$$

Формула (2) связана с обучаемостью и приспособляемостью человеческого поведения, разделяя влияние агента j на агента i на три составляющие. Число β_i показывает насколько агент i подвержен влиянию. Коэффициент $\beta > 0$ (предполагаемый для простоты одинаковым для всех агентов) выражает влияние предыдущего решения на будущее и соответствует сопротивляемости общества новым тенденциям. Наконец, β_G отражает чувствительность к внешним новостям.

Рыночная цена $p(t)$ определяется следующими формулами:

$$r(t) = - \sum s_i(t) / (\lambda N),$$

$$p(t) = p(t-1) \exp(r(t)),$$

где λ является показателем ликвидности рынка.

Модельная динамика существенно зависит от параметров модели. В отчете [21] указаны комбинации параметров, для которых модельное поведение согласуется с рыночным. В частности, распределение логарифмической доходности является унимодальным и обладает «тяжёлыми хвостами». Для логарифмической доходности типична краткосрочная корреляция, а для волатильности — долгосрочная. Наконец, корреляционная функция логарифмической доходности обладает мультифрактальными свойствами.

1.2 Индекс вариации

В рамках гипотезы о фрактальности финансовых рынков, предпринимались многочисленные попытки оценить фрактальную размерность D , индекс Херста H и другие фрактальные характеристики финансовых временных рядов [5]. Для этих оценок обычно требуется значительное количество данных из-за медленной сходимости вычислительных алгоритмов. В статье [22] определён индекс фрактальности μ , который удовлетворительно вычисляется по относительно небольшой выборке и равен $D - 1$ при естественных предположениях об исследуемом ряде.

Индекс вариации μ вводится для произвольной функции $f(t)$, непрерывной на некотором интервале (a, b) . Разделим исходный интервал (a, b) на m одинаковых подинтервалов длины $\delta = (b - a)/m$. Положим

$$V_f(\delta) = \sum_{i=1}^m \left(\max_{[t_{i-1}, t_i]} f(t) - \min_{[t_{i-1}, t_i]} f(t) \right),$$

где $t_i = a + i\delta$, $i = 0, \dots, m$. Если $V(\delta) \sim \delta^{-\mu}$ при $\delta \rightarrow 0$, то μ называется *индексом вариации*.

Описанная конструкция легко адаптируется к дискретным данным. Установлено, что для индекса РТС $\mu(t) \in [0.30, 0.37]$ на интервале 09.12.1996 – 27.10.2006 (1024 рабочих дня).

Индекс вариации может быть использован как дополнительный критерий соответствия модели Изинга реальному рынку. В таб. 1 указаны значения параметра σ_0 , при которых модель реализует индекс вариации, близкий к значению, найденному для РТС.

σ_0	$\mu(t)$	
	нижняя	верхняя
0.53	0.30	0.37
0.50	0.27	0.36
0.55	0.35	0.40

ТАБЛИЦА 1. Значения σ_0 , порождающие индекс вариации РТС; $\beta_{\max} = 0.3$; $\sigma_{\max} = 0.03$.

2 Обобщенная модель Сато-Такайасу

2.1 Определение

2.1.1 Предположения модели

Примитивная схема взаимоотношения между покупателем и продавцом обобщается на случай произвольного числа агентов, обозначаемого N . Перечислим основные предположения о поведении агентов

- (1) В каждый момент времени агент является либо покупателем, либо продавцом.
- (2) Агенты торгуют единицу актива.
- (3) Агент сохраняет позицию (покупатель или продавец) до совершения сделки.
- (4) Торги происходят по принципу двойного аукциона.
- (5) Рыночная цена устанавливается как среднее между максимальным предложением покупки и минимальным предложением продажи.
- (6) Если агент не совершает сделку, то он изменяет свою цену в направлении рыночной цены в соответствии со своей стратегией.
- (7) Стратегии детерминированы.
- (8) После совершения сделки агент определяет новую позицию, ориентируясь на долгосрочные изменения цены торгуемого актива.

2.1.2 Рыночный механизм

Перейдем к формальному изложению правил эволюции, начиная с определения рыночного механизма. Итак, пусть на рынке представлены N агентов, из которых N_s продавцов и N_b покупателей, $N_s + N_b = N$. Значения N_s и N_b зависят от времени, которое предполагается дискретным. Агентов удобно перенумеровать, полагая первых N_s агентов продавцами, а следующих N_b — покупателями. Без ограничения общности можно считать, что цены p_i , выставленные агентами обеих групп, упорядочены в порядке возрастания

$$p_1 \leq \dots \leq p_{N_s}, \quad p_{N_s+1} \leq \dots \leq p_N.$$

Если наибольшая цена покупки меньше наименьшей цены продажи

$$(3) \quad p_N < p_1,$$

то сделки в данный момент времени не происходят. Рыночная цена $P(t)$ предполагается неизменной: $P(t) = P(t - 1)$.

Если условие (3) не выполняется, то сделку совершают те и только те пары агентов $(j, N - j)$, $j \leq N_s$, для которых

$$p_i \leq p_{N-i}.$$

Процесс сделок удобно представлять последовательно. В первую очередь удовлетворяются заявки продавца с наименьшей ценой и покупателя с наибольшей. Затем рассматривается следующая пара агентов $(2, N - 2)$. Сделка осуществляется, если цена продавца не больше цены покупателя: $p_2 \leq p_{N-2}$, — и т.д. При наличии сделок в момент времени t рыночная цена $P = P(t)$ определяется по формуле

$$P(t) = \frac{1}{2}(p_1 + p_N).$$

Рыночный механизм полностью определен.

2.1.3 Стратегии агентов

Пусть функция $S_i(t)$ в момент времени t равна единице, если i -ый агент — продавец и минус единице, если он покупатель. (Нумерация агентов, введенная выше, происходит на каждой итерации. Поэтому номер одного агента i , вообще говоря, зависит от времени: $i = i(t)$. Однако в последующих построениях эта зависимость не существенна). В момент времени t агент либо совершает, либо не совершает сделку. Предполагается, что если он не совершил сделку, то он сохраняет свою позицию (покупатель или продавец), $S_i(t + 1) = S_i(t)$ и изменяет свою цену по направлению к рыночной

$$(4) \quad p_i(t + 1) = p_i(t) - \alpha_i(t)S_i(t).$$

Функция $\alpha_i(t)$ количественно отражает согласие агента идти навстречу рынку. Можно было бы полагать, что значение $\alpha_i(t)$ зависит от всей истории изменения рыночной цены $P(t)$. Однако для простоты предполагается, что $\alpha_i(t)$ зависит только от изменения цены в последний момент времени и имеет вид

$$(5) \quad \alpha_i(t) = |1 + c_i \Delta P| a_i,$$

где a_i — некоторая положительная константы, а c_i — вещественная константа.

Если i -ый агент совершил сделку в момент времени t , то он должен определить новую позицию и цену, значения $S_i(t+1)$ и $p_i(t+1)$. В статье [20] агент принимает решения, опираясь на информацию о предыдущем моменте времени. Стремясь построить более реалистичный механизм, мы предполагаем, что агент выбирает позицию, сравнивая долгосрочные и краткосрочные тренды. Если в краткосрочной перспективе рынок ведет себя пессимистичнее, чем в долгосрочной (например, спад после долгого подъема), то агенты стремятся продавать, и наоборот. Формально, вводятся два временных интервала δ и Δ , на которых вычисляются линейные тренды (методом наименьших квадратов). Найденные наклоны обозначаются k и K соответственно. Тогда

$$(6) S_i(t + 1) = \begin{cases} -1, & \text{если } k > K \text{ (} i\text{-ый агент станет покупателем)} \\ 1, & \text{если } k < K \text{ (} i\text{-ый агент станет продавцом)} \end{cases}$$

Новые цены $p_i(t + 1)$ предполагаются равными

$$(7) \quad p_i(t+1) = P(t+1) + \Lambda_i S_i(t+1),$$

где $\Lambda_i > 0$ — некоторая константа.

Таким образом, стратегия i -го агента определяется числами a_i , c_i , Λ_i и детерминированными уравнениями (4)–(7). Для простоты все Λ_i предполагаются одинаковыми, $\Lambda_i = \Lambda$, а значения a_i и c_i порождаются случайными величинами, равномерно распределенными на отрезках $[0, a]$ и $[-c, c]$ соответственно, где Λ , a и c — положительные параметры.

2.1.4 Начальные граничные условия

Осталось определить начальные условия. Фиксируется некоторое начальное значение $P(0)$. В нулевой момент времени ΔP из формулы (5) полагают равным нулю. Формула (6) применима, начиная с момента времени Δ . Естественно считать, что первые моменты времени выбор позиции (значения $S_i(t)$) происходит наугад с равной вероятностью.

Ценовая заявка после выбора позиции формируется по формуле (7).

Переход модельной системы от момента времени t к следующему моменту полностью определен при условии, что среди агентов есть как продавцы, так и покупатели: $N_s > 0$, $N_b > 0$. Если это условие нарушается, то модель вырождается, и эволюция останавливается.

2.1.5 Параметры

Для проведения численного эксперимента необходимо зафиксировать семь параметров: количество агентов N , начальное значение рыночной цены $P(0)$, длины краткосрочных долгосрочных трендов δ и Δ и числа Λ , a и c , определяющие стратегии агентов. Естественно число агентов брать большим, ограничение сверху появится чисто техническое, чтобы компьютерный эксперимент не оказался слишком длинным. Долгосрочный тренд может оказаться на полпорядка или порядок длиннее краткосрочного. Например, δ можно понимать как несколько недель, а Δ — месяцев. Числа, определяющие индивидуальные стратегии агентов трудно интерпретировать, поскольку реальный механизм принятия решения сложен. Однако «хорошая» модель должна оказаться близка к рынку (в смысле статистических закономерностей) при большой области параметров. При получении последующих результатов использовано $N = 200$, $\Lambda = 0.02$, $a = 0.015$, $c = 100$, $\delta = 40$, $\Delta = 100$, $P(0) = 520$. Эти результаты являются типичными для значительной области параметров.

2.2 Модель и индекс DJ

Перейдем к построению распределений модельных и реальных доходностей. В качестве рыночных данных использован индекс Доу Джонс (DJ). Ежедневные значения индекса взяты в Интернете (www.yahoo.com).

Для построения модельного распределения и его последующего сравнения с индексом DJ необходимо определить рабочий день в модельной динамике. Предположим, что z единиц модельного времени образуют рабочий день. Тогда значения цен $P(z)$, $P(2z)$, $P(3z)$..., интерпретируются как цены закрытия и обозначаются $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, Логарифмическая доходность в день n определяется формулой

$$(8) \quad r(n) = \log \left(\frac{p(n)}{p(n-1)} \right).$$

По формуле (8) также вычисляется логарифмическая доходность индекса DJ.

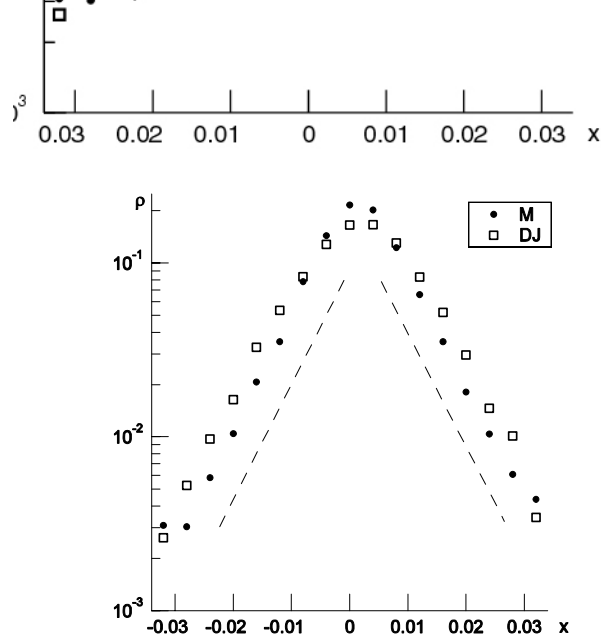


Рис. 1. Гистограмма (центральная часть) лог-доходностей для модели (М) и индекса Доу (DJ), $\rho(x)$ — это доля дней, за которые логарифмическая доходность $r \in [x - \Delta x, x + \Delta x)$, $\Delta x = 0.002$.

На рис. 1 показана центральная часть распределения логарифмических доходностей (гистограмма) для модели (с $z = 20$) и для DJ. Здесь $\rho(x)$ — это доля дней, за которые логарифмическая доходность $r \in [x - \Delta x, x + \Delta x)$, число Δx фиксировано равным 0.002 В соответствии с [9], функция $\rho(x)$ на рис. 1 для DJ близка к экспоненте. Следовательно, при логарифмическом масштабе вертикальной оси точки на графике должны лежать вокруг прямых линий. Это утверждение справедливо как для индекса DJ, так и для модельных данных.

Рис. 2 показывает «хвосты» распределений в двойном логарифмическом масштабе. Прямые участки свидетельствуют о степенном убывании функции $\rho(x)$. Таким образом, модельное (как и реальное!) распределение лог-доходностей обладает тяжелыми хвостами.

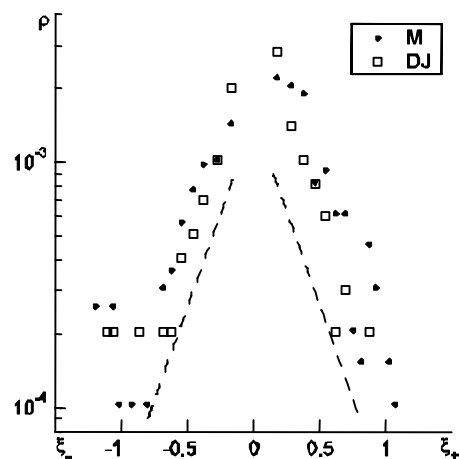


Рис. 2. Гистограмма («хвосты» распределения) для модели (М) и индекса Доу (DJ). Горизонтальная ось получается из оси x рис. 1 преобразованием $\xi_{\pm} = \log(\pm x) - (\pm \log(0.03))$, число 0.03 разделяет центральную часть и «хвосты».

Из рис. 1 и 2 видно, что $\rho(x) > \rho(-x)$ для «средних» положительных значений x ($|x| \in [0.2, 0.3]$, $|\xi_{\pm}| < 0.5$). Это наблюдение согласуется с известным фактом, что экономика чаще находится в фазе роста, чем спада. Интересно, что модельная гистограмма демонстрирует

ту же асимметрию. По-видимому, асимметрия модельного графика $\rho(x)$ является следствием формулы (5), которая по-разному определяет увеличение и уменьшение цен, выставляемых агентами. Однако появление асимметрии $\rho(x)$, согласующейся с реальностью, априори не следует из (5), а, скорее, является аргументом в пользу ее обоснованности (и, конечно, модели в целом).

Подчеркнем, что правила эволюции модели полностью детерминированы. Случайность имеет место только при начальном определении параметров, задающих индивидуальные стратегии агентов. Найденное сходство модели с рыночным индексом показывает, что наша детерминированная система проявляет хаотические свойства. Это типичная ситуация для систем с большим числом степеней свободы (в данном случае, агентов).

3 Закон Ципфа и доходность рискованных активов

В общем виде закон Ципфа-Мандельброта формулируется следующим образом. Пусть имеется некоторый класс объектов N , каждый из которых может быть отнесен к одному из K непересекающихся таксонов. Каждому из таксонов присвоен его ранг i , меняющийся от единицы до K . Неформально предполагается, что первый таксон содержит наиболее типичные объекты класса N , а с увеличением ранга «типичность» объектов, а с ней и объем таксона убывают. Пусть M — некоторое семейство объектов класса N (возможно, повторяющихся). Обозначим через n_i число объектов семейства M , попавших в таксон i , $i = 1, 2, \dots, K$. Семейство M удовлетворяет закону Ципфа-Мандельброта, если доля объектов, попавших в таксон ранга i , равна величине

$$(8) \quad \frac{A}{(B+i)^\gamma},$$

где A, B, γ — постоянные.

Можно было бы ввести понятие класса, удовлетворяющего закону Ципфа-Мандельброта, считая, например, что класс N удовлетворяет этому закону, если ему удовлетворяют (с определенной вероятностью) достаточно семейства объектов из N достаточно большого объема. Однако к подобным попыткам вероятностного объяснения закона Ципфа-Мандельброта нужно относиться с определенной осторожностью. Этот закон хорошо выполняется лишь в тех случаях, когда есть основания говорить о некоторой целостности семейства M (см. [25]). Например, если N — это совокупность словоупотреблений в некотором наборе тестов, то закон Ципфа-Мандельброта хорошо выполняется в том случае, когда в качестве M берется целостный текст, принадлежащий одному автору. Поэтому для выполнения закона Ципфа-Мандельброта оказывается значимым не только и не столько объем семейства M , сколько принадлежность его к некоторому выделенному классу семейств.

В настоящей работе закономерности, связанные с законом Ципфа-Мандельброта изучаются применительно к доходности рискованных активов.

Рассмотрим эволюцию цен рискованного актива $P = (P_t)$. Зафиксируем временной интервал Δt . Пусть

$$R_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-\Delta t}} —$$

логарифмическая доходность на интервале Δt . Анализ цен рискованных активов на фондовых рынках дает основания считать, что распределение вероятности доходности R_t , рассматриваемой как случайная величина, имеет степенной хвост. Более точно:

$$(9) \quad P(|R_t| > x) \sim x^{-\zeta}.$$

(см. [26]).

Формула (9) является в определенном смысле непрерывным аналогом закона Ципфа-Мандельброта. Вероятность попадания модуля доходности в промежуток $I = [x - h, x]$ пропорциональна величине $x^{-\zeta} - (x - h)^{-\zeta}$. Поэтому

$$(10) \quad P(|R_t| \in I) \sim h \cdot x^{-(\zeta+1)}.$$

В последней формуле x по существу играет ту же роль, что и номер таксона i из (1).

В самом деле, рассмотрим поведение величины R_t на временном промежутке длительности T . Обозначим через r среднее значение доходности и положим $Q_t = |R_t - r|$. Соотношение (9) справедливо и для величины Q_t :

$$(11) \quad P(Q_t > x) \sim (x + b)^{-\zeta}.$$

Предположим, что на временном промежутке длительности T множество возможных значений величины Q_t ограничено. Разобьем область значений величины Q_t на промежутки длины h и перенумеруем получившиеся промежутки так, что

$$I_i = [(i-1)h, ih], \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Эти промежутки и играют в данном случае роль таксонов из закона Ципфа-Мандельброта. Действительно, используя (3) и (4), получаем

$$(12) \quad P(Q_t \in I_i) = A(i+B)^{-\gamma}.$$

Цель раздела состоит в том, чтобы, опираясь на закон Ципфа-Мандельброта, оценить область значений доходности.

В соответствии с гипотезой о толстых хвостах соотношение (12) выполняется для достаточно больших значений i . Наблюдения показывают, что отклонения от (12) невелики и для других значений i . Последующее изложение можно было бы строить в предположении, что (12) выполняется, начиная с некоторого $i = i_0$. Чтобы не усложнять чрезмерно выкладки, мы в дальнейшем будем предполагать, что (12) выполняется для всех i . Будем считать, что время t меняется дискретно и пробегает ряд значений $\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$.

Положим

$$(13) \quad p_i = A(i+B)^{-\gamma}, \quad i = 1, 2, \dots, K,$$

где K — наименьшее неотрицательное целое число, для которого интервал $[0, Kh]$ включает в себя область значений величины Q_t . Обозначим через $P_n(m, i)$ вероятность того, что в ряду из n значений Q_t в точности m значений окажется в интервале I_i . Мы предполагаем, что

$$P_n(m, i) = C_n^m p_i^m (1 - p_i)^{n-m}.$$

При больших n и относительно малых m и p_i можно считать, что

$$(14) \quad P_n(m, i) = \frac{(np_i)^m}{m!} e^{-np_i}.$$

Обозначим через k_m число интервалов I_i , в которые попало m значений величины Q_t . Очевидно,

$$(15) \quad E(k_m) = \sum_{i=1}^K P_n(m, i).$$

Положим

$$f_m(x) = \left(\frac{An}{(x+B)^\gamma} \right)^m e^{-\frac{An}{(x+B)^\gamma}}.$$

Тогда с учетом (14) равенство (15) примет следующий вид:

$$(16) \quad E(k_m) = \sum_{i=1}^K \frac{f_m(i)}{m!}.$$

Заменим в (16) сумму интегралом вида $\int_{\alpha}^{\alpha+K} f_m(x)dx$, $0 < \alpha < 1$, и оценим погрешность, возникающую при этой замене. На промежутке $[\alpha + i - 1; \alpha + i]$ разложим $f_m(x)$ по степеням $x - i$. Получаем:

$$(17) \quad f_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f_m^{(j)}(i)(x-i)^j.$$

Так как производные $f_m^{(j)}(i)$ ограничены в совокупности, ряд (17) сходится абсолютно. Применяя почленное интегрирование, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+i-1}^{\alpha+i} f_m(x)dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\alpha+i-1}^{\alpha+i} \frac{1}{j!} f_m^{(j)}(i)(x-i)^j dx = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_m^{(j)}(i)}{(j+1)!} [\alpha^{j+1} - (\alpha-1)^{j+1}]. \end{aligned}$$

Теперь суммируем по i :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+K} f_m(x)dx &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_m^{(j)}(i)}{(j+1)!} [\alpha^{j+1} - (\alpha-1)^{j+1}] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^K \frac{f_m^{(j)}(i)}{(j+1)!} [\alpha^{j+1} - (\alpha-1)^{j+1}]. \end{aligned}$$

Исходя из этой формулы, в первом приближении получаем:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+K} f_m(x)dx = \sum_{i=1}^K f_m(i) + \sum_{i=1}^K \frac{f_m'(i)}{2} (2\alpha - 1).$$

Заметим теперь, что с точностью до пренебрежимо малого слагаемого справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^K f_m'(i) = f_m(\alpha + K) - f_m(\alpha).$$

Таким образом,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+K} f_m(x)dx = \sum_{i=1}^K f_m(i) + (\alpha - 1/2)(f_m(\alpha + K) - f_m(\alpha)),$$

и, значит,

$$\sum_{i=1}^K f_m(i) = \int_{\alpha}^{\alpha+K} f_m(x)dx + (1/2 - \alpha)(f_m(\alpha + K) - f_m(\alpha)).$$

Так как $f_m(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow -B$, то, переходя к пределу при $\alpha \rightarrow -B$, получаем:

$$\sum_{i=1}^K f_m(i) = \int_{-B}^{-B+K} f_m(x)dx + (1/2 + B)f_m(-B + K).$$

Сделав в интеграле замену $y = \frac{An}{(B+x)^\gamma}$ и используя (9), приходим к следующему

равенству:

$$(18) \quad E(k_m) = \frac{(An)^{1/\gamma}}{\gamma m!} \int_{\frac{An}{K^\gamma}}^{\infty} y^{\frac{m-1}{\gamma}-1} e^{-y} dy + \frac{1}{m!} (1/2 + B) \left(\frac{An}{K^\lambda} \right)^m e^{-\frac{An}{K^\lambda}}.$$

Поделив обе части (18) на K , получаем равенство

$$\frac{E(k_m)}{K} = \frac{(An)^{1/\gamma}}{K\gamma m!} \int_{\frac{An}{K^\gamma}}^{\infty} y^{\frac{m-1}{\gamma}-1} e^{-y} dy + \frac{1}{Km!} (1/2 + B) \left(\frac{An}{K^\lambda} \right)^m e^{-\frac{An}{K^\lambda}},$$

в котором вторым слагаемым при больших K можно пренебречь. Таким образом, приходим к приближенному равенству

$$(19) \quad \frac{E(k_m)}{K} = \frac{(An)^{1/\gamma}}{\gamma m!} \int_{\frac{An}{K^\gamma}}^{\infty} y^{m-\frac{1}{\gamma}-1} e^{-y} dy .$$

Для интегралов вида

$$\Gamma(\mu, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} t^{\mu-1} e^{-t} dt$$

интегрированием по частям легко проверяется рекуррентное соотношение

$$(20) \quad \Gamma(\mu + 1, \rho) = \rho^{\mu} e^{-\rho} + \mu \Gamma(\mu, \rho).$$

Положим

$$v_m = \frac{E(k_m)}{K}; \quad \rho = \frac{An}{K^\gamma}; \quad \mu_m = m - \frac{1}{\gamma}.$$

В этих обозначениях (19) переписывается следующим образом:

$$v_m = \frac{\rho^{1/\gamma}}{\gamma m!} \Gamma(\mu, \rho).$$

Теперь, используя (20), получаем:

$$\begin{aligned} v_{m+1} &= \frac{\rho^{1/\gamma}}{\gamma(m+1)!} \Gamma(\mu+1, \rho) = \\ &= \frac{\rho^{1/\gamma}}{\gamma(m+1)!} (\mu \Gamma(\mu, \rho) + \rho^{\mu} e^{-\rho}) = \\ &= \frac{\mu}{m+1} v_m + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho^m e^{-\rho}}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$v_{m+2} = \frac{\mu+1}{m+2} v_{m+1} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho^{m+1} e^{-\rho}}{(m+2)!}.$$

Следовательно,

$$\frac{v_{m+2} - \frac{\mu+1}{m+2} v_{m+1}}{v_{m+1} - \frac{\mu}{m+1} v_m} = \frac{\rho}{m+2}.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$(21) \quad \rho = (m+1) \frac{(m+2)E(k_{m+2}) - (m+1 - \frac{1}{\gamma})E(k_{m+1})}{(m+1)E(k_{m+1}) - (m - \frac{1}{\gamma})E(k_m)}.$$

Содержательно ρ — это математическое ожидание числа попаданий Q_t в интервал с самым большим индексом, т.е. математическое ожидание числа появлений экстремальных значений абсолютной величины доходности, измеряемых с точностью h .

Заметим, что точность равенства (14) с ростом m понижается, поэтому вычислять ρ по формуле (14) имеет смысл лишь для небольших значений m . Например, при $m = 1$ имеем

$$\rho = 2 \frac{3E(k_3) - (2 - \frac{1}{\gamma})E(k_2)}{2E(k_2) - (1 - \frac{1}{\gamma})E(k_1)},$$

где k_1, k_2, k_3 — число интервалов, в которые абсолютная величина доходности попала соответственно 1, 2 и 3 раза.

Зная параметры закона Ципфа-Мандельброта и величину ρ , можно оценить число интервалов, покрывающих область значений абсолютной величины доходности:

$$K = \left(\frac{An}{\rho} \right)^{1/\gamma}.$$

Это в свою очередь позволяет оценить границы возможных значений доходности:
 $r - Kh < R_t < r + Kh.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 J. Y. Campbell, A. W. Lo, A. C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- 2 J. D. Farmer, *Comput. Sci. Eng. (IEEE)*, 1 (1999), 26 - 39.
- 3 V. Plerou, P. Gopikrishnan, L. N. Amaral, M. Meyer, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E*, 60, 6519 (1999).
- 4 P. Gopikrishnan, V. Plerou, L. N. Amaral, M. Meyer, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E*, 60, 5305 (1999).
- 5 B. B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance*, Springer, New York, 1997
- 6 T. Bollerslev, *J. Econometrics*, **31**, 307-327 (1986).
- 7 Б. Оксендаль, *Стохастические дифференциальные уравнения*, М.: Мир, 2003.
- 8 А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*. Том М.: ФАЗИС, 1998.
- 9 A. C. Silva, R. E. Prange, and V. M. Yakovenko, *Phys. A*, 344, 227-235 (2004)
- 10 R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- 11 M. Aoki *New approaches to macroeconomic modelling – Evolutionary stochastic dynamics, multiple, equilibria, and externalities of field effects*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1996)
- 12 D. Sornette A. Johansen, J.-P. Bouchaud *Stock market crashes, precursors and replicas*, *J. Phys. I France* 6, 167 - 175, (1996)
- 13 E. W. Montroll and W. W. Badger, *Introduction to quantitative aspects of social phenomena*, New York, Gordon and Breach, 1974
- 14 S. Galam et al. *Math. J. Sociology*, 9, 1 (1982).
- 15 A. Orlean, *J. Econ.Behav. Org.*, 28, 257 (1995).
- 16 B. M. Roehner and D. Sornette, *Eur. Phys. J. B*, 16, 729 (2000)
- 17 A. Krawiecki, et al., *Phys. Rev. Lett.*, 89, 158701 (2002).
- 18 A. Johansen, et al., *Int. J. Theor. Appl. Fin.*, 3, 219 (2000)
- 19 T. Kaizoji, et al., *Phys. A*, **316**, 441 (2002).
- 20 A.H. Sato and H. Takayasu, *Physica A*, 250 (1998), 231.

- 21 G.K. Zipf, Human behavior and the principle of the least effort. Cambridge, 1949.
- 22 М. Мандельброт, О рекуррентном кодировании, ограничивающем влияние помех. В сб.: Теория передачи сообщений (ред. Сифоров В.И.). М., 1957.
- 23 W.X. Zhou, D. Sornette, *Eur. Phys. J. B*, 55 (2), 175 (2007).
- 24 М. М. Dubovikov, N. V. Starchenko, M. S. Dubovikov, *Phys. A*, 339 (2004)
- 25 Ю.А. Шрейдер, А.А. Шаров, Системы и модели. М.: «Радио и связь», 1982.
- 26 X. Gabaix, P. Gopikrishnan., V. Plerou, H.E. Stanley, Quantifying and understanding the economics of large financial movements. *Journal of Economic Dynamics & Control* 32, 303–319 (2008).