

М.М. Дубовиков
Финансовая компания «Интраст»

ЭКОНОФИЗИКА И АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Наряду с краткой историей финансовой математики и обзором эконофизики в работе подробно излагается фрактальный анализ финансовых временных рядов. На основе минимальных покрытий вводятся новые фрактальные характеристики: размерность минимального покрытия D_μ и индекс фрактальности μ тесно связанный с D_μ . На примере цен акций, входящих в индекс Доу Джонса, показано, что минимальный масштаб τ_μ , необходимый для определения μ с приемлемой точностью, на два порядка меньше чем соответствующий масштаб для определения показателя Херста H . Это позволяет рассматривать индекс μ как локальную характеристику и ввести функцию $\mu(t)$. Показано, что эта функция является индикатором локальной стабильности временного ряда: чем больше значение μ , тем стабильнее ряд. Обоснован и подтвержден расчетами эффект увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных.

Введение

Наука о финансовых временных рядах долгое время развивалась в виде двух несвязанных направлений и лишь в последнее время наметилась некоторая тенденция к их сближению.

Первое направление, которое можно назвать статистическим, берет свое начало от работы Луиса Башелье 1900 г. [1], где автор, еще за пять лет до Эйнштейна, предложил первую модель броуновского движения (модель случайного блуждания) и применил ее для описания колебания цен акций на фондовой бирже. Строго математически эта модель была обоснована в начале 20-х гг. прошлого века Норбертом Винером [2] и применительно к рынку долгое время развивалась исключительно в академической среде. Последнее было связано с тем, что в соответствии с этой моделью принципиально невозможно получить прибыль больше средней по рынку. Однако это противоречило опыту реального трейдинга. Поэтому среди инвесторов броуновскую модель стали серьезно принимать в расчет только в начале 60-х гг., когда окончательно оформилась концепция «эффективного рынка» (рынка, на котором цены в полной мере отражают всю доступную информацию). Согласно Фамэ

[3 – 4] для существования такого рынка достаточно предположить, что на нем действует большое число полностью информированных агентов, которые мгновенно реагируют на внешние события, действуя при этом рационально и независимо. Необходимость подобной концепции диктовалась тем, что в ее рамках обрела смысл теория формирования оптимального портфеля Уильяма Шарпа (Ноб. премия по экономике 1990 г.) [5], которая имела большое практическое значение. Основной же моделью поведения цены на таком рынке стала модель броуновского движения. Высшим достижением подхода, основанного на этой модели, стали работы Блэка, Шоулза и Мертона (Ноб. премия по экономике 1997 г.) [6 – 7], которые позволяли точно рассчитывать «справедливые» цены опционов. Напомним, что классическая модель броуновского движения основана на двух постулатах. Во-первых, приращения процесса на любом интервале времени имеют нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним, которое следует из центральной предельной теоремы и получается как результат суммирования достаточно большого числа независимых случайных факторов. Во-вторых, приращения на непересекающихся интервалах являются статистически независимыми. Однако наблюдения финансовых временных рядов выявили ряд особенностей, которые не согласуются с этими постулатами. Наиболее важные из них связаны с тем, что сильные изменения временного ряда происходят значительно чаще, чем следовало бы ожидать исходя из гауссова распределения (проблема «толстых хвостов»), причем такие изменения обычно разделены колебаниями относительно малой интенсивности (эффект кластеризации волатильности). По этой причине параллельно с броуновской моделью стали развиваться всевозможные ее обобщения, которые были связаны с отказом либо от условия нормальности распределения приращений (первый постулат), либо от условия независимости последних (второй постулат). В первом случае мы приходим к движению Леви (Levi Motion) и, в частности, к устойчивым распределениям Парето [8 – 12]. Во втором – к процессам с памятью и обобщенному броуновскому движению (Fractional Brownian Motion) [13 – 14]. Наконец, если мы готовы отказаться от обоих постулатов броуновской модели, то мы приходим к идеям авторегрессионной условной гетероскедастичности (зависимости

значений временного ряда от его предыдущих значений при изменении дисперсии во времени), или ARCH – моделям Энгла (Ноб. премия по экономике 2003 г.), и различным ее обобщениям (см. обзор [15]). Наиболее полно и последовательно статистический подход, связанный с гипотезой эффективного рынка (Effective Market Hypothesis), изложен в двухтомной монографии Ширяева [16].

Второе направление, которое естественно назвать *динамическим*, родилось и стало развиваться в среде практикующих трейдеров в начале 30-х гг. прошлого века. Этот подход получил название «технический анализ» (в отличие от фундаментального анализа, основанного на расчете «справедливой» цены акции в виде дисконтированной стоимости будущих доходов). Идеологической основой такого подхода стало известное положение Чарльза Доу (главного автора известного индекса), выдвинутое им еще в конце XIX в. Доу утверждал, что естественное состояние цены – это тренд (направленное движение вверх или вниз), который является результатом совместного действия толпы и отражает действующую на рынке социальную тенденцию. Поэтому тренд будет продолжаться до тех пор, пока на рынке не произойдет смена этой тенденции. Цель технического анализа – вскрыть внутренние закономерности временного ряда, на основе которых можно прогнозировать переходы из тренда во флэт (относительно стабильное состояние рынка) и обратно. На этом пути были открыты многочисленные формы относительно устойчивого поведения временного ряда (фигуры технического анализа). Первые работы в этом направлении принадлежат Уильяму Ганну и Ральфу Эллиоту [17]. Уже в 50-е гг. почти все классические фигуры технического анализа («треугольник», «трапеция», «голова и плечи» и т.д.) были известны. Однако лишь в 80-е гг. в известных монографиях Джона Мерфи [18] и Роберта Прехтера [19] происходит их систематизация. Последняя по времени совпала с неожиданной поддержкой, которую в эти годы технический анализ получил со стороны теории динамического хаоса. Из общей теории следовало, что временной ряд, который внешне выглядел как реализация случайного процесса, вполне мог порождаться нелинейной динамической системой малой размерности. Это означает, что его можно представить в виде одномерной проекции траектории такой системы в расширенном фазовом про-

странстве, которая описывается с помощью небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Согласно же концепции Доу поведение цен акций определяется стадным инстинктом, который (как убедительно свидетельствуют данные социальной психологии) подчиняется крайне примитивному механизму. Поэтому вполне обоснованной кажется гипотеза о том, что такой механизм представляет собой динамическую систему. В этом случае, используя теорему Такенса [20], можно восстановить текущее значение временного ряда, исходя из достаточно большого числа исторических данных. Причем для такого восстановления совсем не обязательно знать конкретный вид и число уравнений системы. По существу эта процедура сводит задачу экстраполяции одномерного ряда к задаче интерполяции некоторой многомерной функции. Последняя же является типовой задачей для нейронных сетей [21]. Поэтому теорию динамического хаоса можно считать идеологической основой того мощного внедрения нейротехнологий в бизнес, которое мы повсеместно наблюдали в 90-х гг.

Однако с точки зрения стационарного подхода точный прогноз финансового временного ряда в принципе невозможен. Чтобы разрешить противоречие двух подходов, следует обратиться к результатам экспериментального исследования рынка. Как показывают подобные исследования [22], на реальном рынке вся совокупность агентов распадается на кластеры (референтные группы), в каждом из которых агенты подражают друг другу. Кластеры могут образовывать довольно сложные иерархические связи, могут сливаться в более крупные и распадаться на более мелкие. При этом ясно, что концепция эффективного рынка и концепция Доу описывают два предельных случая. В первом случае на рынке присутствует большое число примерно одинаковых кластеров. Рынок находится в наиболее стабильном состоянии и его эволюция в основном определяется внешней информацией, которая имеет случайный характер. Во втором же случае на рынке присутствует один большой кластер, значительно превосходящий все остальные. Рынок наиболее близок к обвалу и его динамика подчиняется исключительно внутренним факторам. В связи с вышесказанным возникают естественные вопросы: «По каким законам эволюционирует кластерная структура и какова причина образования больших кластеров?». От-

ветить на подобные вопросы и означает осуществить синтез двух указанных концепций. В последнее десятилетие серьезные результаты в этом направлении были получены в рамках эконофизики. Целью настоящей работы является изложить наиболее яркие достижения этой новой, быстроразвивающейся дисциплины и, в частности, некоторые новые результаты фрактального анализа финансовых временных рядов.

В первом разделе дается краткий обзор эконофизики. При этом затрагиваются только те результаты, которые относятся к финансовому рынку. Принято считать, что именно здесь достижения эконофизики являются наиболее убедительными. Во втором разделе вводятся базовые понятия, на которых строится фрактальный анализ. Эти понятия разъясняются на простейших примерах фрактальных структур, как модельных, так и природных. Следует заметить, что фрактальные структуры явно или неявно возникают в большинстве эконофизических построений. Третий раздел посвящен фрактальному анализу финансовых временных рядов. Эта тема в настоящее время является одной из наиболее актуальных в эконофизике. В данном разделе вводятся новые понятия: индекс фрактальности μ и размерность минимального покрытия D_μ . Затем на основе индекса μ анализируются ценовые ряды акций, входящих в индекс Доу-Джонса. Показано, что использование индекса μ позволяет выявить для этих рядов степенной закон, который выполняется с удивительной точностью. При сравнении индекса μ с другими фрактальными показателями оказывается, что для надежного определения этого индекса с приемлемой точностью требуется данных на два порядка меньше, чем, например, для определения показателя Херста H . Это приводит к возможности построения локального фрактального анализа временных рядов с помощью функции $\mu(t)$. Использование такой функции позволяет существенно продвинуться как в плане идентификации временных рядов, так и в плане их прогноза. В заключительном разделе подводятся основные итоги и перечисляются области возможного применения изложенных в работе идей.

1. Обзор эконофизики

Как отдельное направление эконофизика стала оформляться с середины 90-х гг. прошлого века на стыке экономики и физики. При этом само слово «эконофизика» вошло в общее употребление лишь после того, как в 1997 г. Имре Кондор и Янош Кертис организовали в Будапеште «симпозиум по эконофизике» (Workshop on Econophysics). Становление новой дисциплины во многом было связано с приходом в экономику крупных физиков, таких как Филипп Андерсон (Нобелевская премия по физике 1977 г.), Пер Бак, Юджин Стенли и целый ряд других. К тому времени в экономике и, в первую очередь, в финансах накопились задачи, которые не могли быть решены в рамках этих наук. Для решения таких задач предполагалось использовать аппарат и методологию теоретической физики. Заметим, что подобные попытки сблизить экономику и физику многократно предпринимались и раньше (см. например [23]). Однако никогда еще этот проект не вызывал такого общественного резонанса. Продолжает неуклонно расти число научных статей, монографий и конференций по эконофизике. Престижные университеты включают соответствующие курсы в свои учебные программы. Все больший интерес проявляют к этой науке и финансовые структуры¹. Помимо этого, эконофизику уже начинают рассматривать в качестве единой теории, описывающей как функционирование глобальной системы мирового капитала, так и поведение на рынке отдельных экономических субъектов. Следует сказать, что в концептуальном плане эконофизика опирается на позицию, которая не является традиционной в теоретической физике. Такая позиция была представлена Филиппом Андерсом в программной статье [24] еще в 1972 г. В этой работе автор утверждал, что «физика элементарных частиц и, в частности, редукционистские подходы обладают лишь ограниченной возможностью объяснить устройство мироздания. Реальность имеет иерархическую структуру, каждый уровень которой в определенной степени независим от уровней, находящихся выше и ниже. На каждой стадии

¹ Согласно журналу Института физики Великобритании «финансовый сектор экономики стал одним из основных работодателей молодых физиков теоретиков».

необходимы совершенно новые законы, концепции и обобщения, требующие не меньшего вдохновения и творчества, чем на предыдущих». «Психология – это не прикладная биология, так же как и биология – это не прикладная химия» – отмечал Андерсон. Таким образом, если раньше «первые принципы, которые не могут быть объяснены в терминах более глубоких принципов» по определению содержала только физика элементарных частиц, теперь оказалось, что такие принципы может содержать любая дисциплина. Концепция Андерсона стала объединяющим лозунгом обширных мультидисциплинарных исследований, для проведения которых в середине 80-х гг. в Нью-Мексико был создан Институт Санта-Фе. Предполагалось, что эти исследования внесут «серьезный вклад в решение таких острых долгосрочных проблем, как дефицит торгового баланса, СПИД, генетические дефекты, умственное здоровье, компьютерные вирусы». Именно в этом институте впервые стали появляться работы по экономике с использованием самого современного аппарата теоретической физики. В настоящее время Институт Санта-Фе является одним из главных центров экономифизики, где эта наука развивается в рамках общей теории сложных адаптивных систем. Примерами подобных систем служат центральные нервные системы и нейросети, экосистемы и колонии муравьев, социальные структуры и политические системы, и, конечно, различные структуры, возникающие в экономике. Все эти системы состоят из множества взаимодействующих элементов, которые способны накапливать опыт в процессе взаимодействия с другими элементами, а затем изменяться таким образом, чтобы приспособиться к окружающей среде. Характерным этапом эволюции всех адаптивных систем является процесс самоорганизации, при котором в результате самоусиления отдельных взаимодействий в системе спонтанно возникает порядок. При этом сама система как целое приобретает новое качество, которое может отсутствовать у отдельных элементов. Базовым примером самоорганизации в экономике служит процесс, управляемый «невидимой рукой» Адама Смита [25], где множество индивидуумов, стремясь удовлетворить исключительно свои личные материальные потребности, рождает поведенческое целое с принципиально иным качеством. Как показали исследования, проведенные большой группой экономистов

(библиография этих исследований содержит более тысячи работ [26]), «во многих экспериментах по моделированию рыночных систем плохо информированные, склонные к ошибкам и непонятливые субъекты, контактируют между собой на основе установленных правил и создают социальные алгоритмы по максимизации общих материальных ценностей, явно приближающиеся к оптимальным результатам, которые, как традиционно считалось, можно было бы получить лишь на основе полной информации и с помощью когнитивно-рациональных личностей» [27]. Кроме того, эти работы также показывают, что с течением времени рынок может приближаться к эффективному. Это означает, что он способен агрегировать в себе с помощью цен всю значимую информацию. При этом на промежуточных временах из-за того, что субъекты постоянно совершают как ошибки восприятия, так и ошибки под действием эмоций, а также из-за того, что при недостатке информации они обычно начинают подражать друг другу, в системе могут возникать самоорганизующиеся информационные «миражи», которые в скором времени распадаются. Таким образом, можно сказать, что «люди эволюционируют к рациональности, учась на ошибках». Эти экспериментальные исследования стали побудительным мотивом для появления целого раздела эконофизики, посвященного «игре в меньшинство» (Minority Game) [28 – 31]. Цель этой «игры» – показать на простой модели, каким образом экономические агенты с ограниченной рациональностью при неполной информации могут создавать эффективный рынок. Существует множество вариантов такой игры. Они с разных сторон формализуют одну важную особенность систем, где агенты, конкурируя за ограниченные ресурсы, пользуются определенными стратегиями. Смысл этой особенности в том, что если некоторой удачной в прошлом стратегией начинает пользоваться большинство, то такая стратегия проигрывает. Поэтому участники игры должны время от времени менять свои стратегии, если они хотят победить. Игра в меньшинство обычно проходит в дискретном времени и предполагает наличие N агентов, каждый из которых может выбирать одно из двух состояний: buy (+1) или sell (-1). Это состояние описывается функцией $a_i(t)$ ($i = 1 \dots N, t = 0, 1 \dots \infty$). В начале игры каждый из агентов получает

определенный капитал. На каждом шаге выигрывают те, кто оказывается в меньшинстве, при этом выигрыш $A(t)$ определяется по формуле:

$$A(t) = \sum_{j=1}^N a_j(t). \quad (1)$$

После этого у каждого проигравшего из его капитала вычитается сумма

$$u_i(t) = 2|A(t)|/(N + |A(t)|) \quad (2)$$

и, соответственно, каждому выигравшему начисляется сумма

$$u_i(t) = 2|A(t)|/(N - |A(t)|). \quad (3)$$

Затем игра повторяется снова. В более интересных вариантах игры каждый из агентов получает капитал в двух формах: наличности (cash) и определенного количества акций, которые в начале игры имеют фиксированную стоимость. В любой момент времени каждый из агентов совершает покупку или продажу одной акции (в более общем случае нескольких акций). Цена акции $p(t)$ определяется из соотношения баланса спроса и предложения по формуле:

$$p(t) = p(t-1) \frac{N + a(t)}{N - a(t)}, \quad (4)$$

где $a(t)$ – разность между количеством ордеров на покупку и на продажу акций. Отсюда сразу видно, что увеличивают свой капитал те, кто оказывается в меньшинстве, поскольку, например, если покупающих больше, чем продающих, то сделка совершается по цене $p(t) > p(t-1)$, и поэтому выигрывают продающие. Кроме капитала каждый агент получает определенное количество стратегий, дающих рекомендации относительно покупки или продажи акций в следующей момент. Каждая такая стратегия имеет внутреннюю стоимость, которая зависит от числа выигрышей в ближайшем прошлом, называемом историей. Такие истории могут иметь различную глубину, определяющую степень информированности агента. В играх с *индуктивной динамикой* агент выбирает стратегии с наибольшей внутренней стоимостью (в более общем случае выбор является случайным, что естественно интерпретировать как

ограниченную рациональность агента). После потери капитала агент уходит с рынка.

Несмотря на то, что эта модель не учитывает внешних факторов, она демонстрирует богатую и весьма реалистическую динамику. В частности, она показывает, каким образом степень информированности агентов связана с эффективностью рынка. Оказывается, что если ввести управляющий параметр $\alpha = I / N$, где I – число различных состояний фундаментальной информации, то в некоторой точке α_c происходит фазовый переход. При этом если $\alpha < \alpha_c$, то мы находимся в симметричной фазе, где не существует никакой дополнительной информации, которую можно было бы использовать для более точного предсказания, и рынок оказывается эффективным. Напротив, если $\alpha > \alpha_c$, то мы находимся в асимметричной фазе, где наиболее информированные агенты имеют действительное преимущество над остальными и рынок оказывается не эффективным. Кроме того, модель позволяет детально проследить, как на рынке образуется равновесие и как оно нарушается по причине того, что агенты, которые ведут себя независимо, начинают вести себя единым образом. На эту модель можно отчасти ориентироваться и при решении более важных проблем. Одна из проблем подобного рода, которая возникает при исследовании любой адаптивной системы, связана с очень быстрым и очень резким изменением ее состояния. В результате такого изменения, называемого *катастрофой*, система приходит в соответствие с окружающей средой. На практике катастрофы приносят огромные разрушения и неисчислимы бедствия. Поэтому очень важно понять их причину и научиться их вовремя предсказывать. Пер Бак [32] разработал целостную теорию таких явлений и назвал ее *теорией «самоорганизованной критичности»* (Self-Organized Criticality). Он предположил, что катастрофы в сложных системах происходят не только вследствие внешних причин, но и вследствие того, что мелкие события, складываясь вместе, могут приводить к цепной реакции. Для иллюстрации подобного явления Бак обычно использует метафору кучи песка, которая медленно насыпается сверху. При этом очевидно, что время от времени будет возникать ситуация, когда достаточно всего лишь одной песчинки, чтобы вызвать лавину. По-

сле этого куча оседает и процесс повторяется снова. Метафора кучи песка позволяет понять многие природные и социальные системы, у которых мы видим одну и ту же динамику: эволюционируя, эти системы самоорганизуются до критического предела, после чего стремительно разрушаются, чтобы затем опять спонтанно организоваться. В работе [33], которая является одной из базовых в эконофизике, авторы применили теорию самоорганизованной критичности к фондовому рынку. Они построили модель, в которой все действующие на этом рынке агенты были разделены на рациональных инвесторов (агентов, которые покупают и продают акции исходя из разницы между котировкой акции и «справедливой» ценой) и шумовых трейдеров (агентов, которые следуют тренду, чтобы извлечь прибыль благодаря краткосрочным изменениям на рынке). Большую часть времени число первых и вторых сбалансировано. Однако, когда цены начинают расти, увеличивается число рациональных инвесторов, желающих продать акции и уйти с рынка. На их место приходит все большее число шумовых трейдеров, которых привлекают растущие цены. Таким образом возникает фазовый переход, в результате которого резко возрастает относительное число шумовых трейдеров. Это приводит к сильному росту цен, образованию «пузырей» и последующим обвалам. Следует заметить, что теория самоорганизованной критичности дает возможность лишь качественно понять возникновение катастроф. Однако она не позволяет проследить возникновение и развитие каждой отдельной катастрофы. Эту проблему применительно к фондовым рынкам отчасти решил Дидье Сорнет (ошибочно переведенный на русский язык в [34] как Сорнетте). Он показал, что нелинейное взаимодействие рациональных инвесторов и шумовых трейдеров может приводить к появлению критической точки t_c на временной оси, в которой вероятность резкого обвала является максимальной. В окрестности этой точки ценовой ряд $p(t)$ имеет вид:

$$p(t) = a_0 + a_1(t_c - t)^\gamma [1 + b \cos(\omega \ln(t_c - t) + C)], \quad (5)$$

где $a_0, a_1, \gamma, b, \omega, C$ – константы.

Из формулы (5) видно, что по мере приближения к моменту t_c функция $p(t)$ совершает все более быстрые колебания, период которых стремится к нулю. Таким образом, появление у функции $p(t)$ подобных осцилляций можно рассматривать в качестве предвестника катастрофы. При этом, поскольку отношение двух последовательных периодов таких осцилляций остается постоянным, то исходя из положения трех последовательных локальных максимумов t_n, t_{n+1}, t_{n+2} можно оценить значение t_n по формуле:

$$t_c = \frac{t_{n+1}^2 - t_{n+2}t_n}{2t_{n+1} - t_n - t_{n+2}}. \quad (6)$$

Используя эту методику, Сорнет исследовал все основные крахи, известные из истории финансовых рынков. В результате выяснилось, что поведение цен перед крахом во всех случаях достаточно хорошо можно приблизить формулой (6). Однако при попытке использовать (6) для предсказания обвалов в реальном режиме времени выяснилось, что она работает лишь в большинстве, но не во всех случаях. Как оказалось, окончательное решение проблемы предсказания катастроф является задачей более сложной и, возможно, до конца принципиально не разрешимой.

Особое место в эконофизике занимает работа [35], где неожиданно была обнаружена аналогия, которая существует между энергетическим каскадом в гидродинамической турбулентности и информационным каскадом на финансовом рынке. Как известно, в трехмерном турбулентном потоке кинетическая энергия передается от больших пространственных масштабов к малым, начиная с некоторого характерного масштаба, на котором происходит подкачка энергии со стороны внешней силы [36 – 37]. При этом существует некоторый интервал масштабов (инерционный интервал), где все наблюдаемые характеристики $g_i(x)$ (в данном случае статистические моменты поля скорости) уже не зависят от характерного масштаба и являются пространственно однородными. Это означает, что при изменении масштаба $x \rightarrow \lambda x$ функция $g_i(x)$ просто умножается на некоторое число $\mu = \mu(\lambda)$. Другими словами,

$$g_i(\lambda x) = \mu(\lambda)g_i(x). \quad (7)$$

Решением этого уравнения является степенная функция

$$g_i(x) = cx^{\alpha_i}, \quad (8)$$

где c, α_i – некоторые константы.

При этом показатель α_i называется *размерностью функции* $g_i(x)$. Степенные зависимости являются отличительным признаком масштабной инвариантности, поскольку коэффициент

$$\lambda^{\alpha_i} = \frac{g_i(\lambda x)}{g_i(x)} \quad (9)$$

не зависит от x . Это означает, что относительное значение наблюдаемой величины зависит только от отношения масштабов. В работе [35] замечено, что распределение вероятности изменения Δx на временном масштабе Δt является однородным при вариациях Δt от нескольких минут до нескольких дней. Кроме того, это семейство распределений $P_{\Delta t}(\Delta x)$ удивительно напоминает при соответствующей нормировке семейство распределений $P_{\Delta l}(\Delta u)$ для разности скоростей Δu в точках, находящихся на расстоянии Δl в турбулентном потоке. По мнению авторов [35], это вызвано тем, что на рынке существует механизм распространения возмущений, напоминающий турбулентный каскад. При этом роль кинетической энергии, которая однородно распространяется по пространственным масштабам, на финансовом рынке играет величина

$$I(\Delta t) = -\int P_{\Delta t}(\Delta x) \log P_{\Delta t}(\Delta x) d(\Delta x), \quad (10)$$

которая, как оказывается, является однородной по Δt . Эту величину можно интерпретировать как «чистый поток информации», который передается от агентов с относительно большим инвестиционным горизонтом (тех, кто «заглядывает на рынок лишь время от времени» и в основном ориентируется на внешние события) к агентам с малым инвестиционным горизонтом (тех, кто «следит за рынком непрерывно» и ориентируется исключительно на колебания цен). Таким образом, роль пространственных масштабов играют временные масштабы, а роль энергии – информация. Более того, как показано в [35], даже хорошо известная перемежаемость

между турбулентным и ламинарным движением имеет соответствие на рынке в виде перемежаемости кластеров высокой и низкой волатильности временного ряда. Надо сказать, что эта работа оказалось правильной лишь отчасти. Однако во многом именно она инициировала целый поток работ, посвященный устойчивым степенным законам. Такие законы были установлены, в частности, для распределения доходности акций, объема продаж и числа сделок [38-46]. Рассмотрим эти результаты более подробно.

Определим доходность акции $r_{\Delta t}$ на интервале Δt в виде:

$$r_{\Delta t} \equiv \ln p(t) - \ln p(t - \Delta t) = \ln \frac{p(t)}{p(t - \Delta t)}. \quad (11)$$

Легко видеть, что для небольших изменений курса $r_{\Delta t}$ это просто относительное изменение цены. Как показывают эмпирические данные

$$P(|r_{\Delta t}| > x) \sim x^{-\xi_r}, \quad (12)$$

где $\xi_r \approx 3$. Аналогичные степенные законы были обнаружены для объемов продаж $V_{\Delta t}$ и соответствующего числа сделок $N_{\Delta t}$ на интервале Δt :

$$P(|V_{\Delta t}| > x) \sim x^{-\xi_v}, \quad (13)$$

где $\xi_v \approx 1.5$, а также

$$P(|N_{\Delta t}| > x) \sim x^{-\xi_N}, \quad (14)$$

где $\xi_N \approx 3.4$. Эти законы являются универсальными для любых значений Δt от 1 мин до 1 мес. на самых различных временных интервалах и для самых различных финансовых инструментов, причем формула (12) остается верной даже для самых различных индексов. Более того, оказалось, что даже наиболее драматические события, включающие финансовые крахи 1929 и 1987 гг. вполне согласуются с распределениями (12) – (14). Помимо распределений степенные законы были также обнаружены для некоторых автокорреляционных функций. Заметим, что для временных рядов доходностей акций такие функции обычно быстро убывают. Так, на-

пример, для финансовых рядов с минутным интервалом время корреляции составляет обычно порядка нескольких минут. Однако временной ряд для нормированной волатильности

$$v(\Delta t) = \frac{|r_i(\Delta t)|}{R(\Delta t)}, \quad (15)$$

где

$$R(\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |r_i(\Delta t)|, \quad (16)$$

N – общее число временных интервалов длительностью Δt , имеет длинные автокорреляции, которые подчиняются устойчивым степенным законам. Так, например, спектр нормированной волатильности (16) для всех компаний, входящих в индекс S&P500, имеет вид:

$$S(f) \sim f^\xi \quad (17)$$

и распадается на две части. Для более высоких частот ($1/f < 700$ мин), соответствующих малым временам $\xi = 0.5$, а для более низких частот ($1/f > 700$ мин) $\xi = 0.2$.

Наконец, мы переходим, видимо, к самому известному результату эконофизики. Мантенья и Стенли экспериментально показали [47 – 48], что плотности вероятности $P(Z_{\Delta t})$ изменения индекса S&P500 на интервале Δt от 1 мин до 1 мес. описываются «усеченным» распределением Леви (рис. 1). Такое распределение в своей центральной части (где изменения не превышают шести стандартных отклонений) совпадает с обычным распределением Леви, а на краях оно «опускается» ниже последнего, оставаясь при этом значительно выше гауссовых распределений с тем же σ (рис. 2). Распределение Леви нормированной на σ величины $Z_{\Delta t}$ в данном случае для всех интервалов Δt имеет вид:

$$P_l(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\beta x) e^{-\gamma \Delta t x^\alpha} dx, \quad (18)$$

где $\alpha = 1.4$, $\gamma = 0.00375$, $\beta = Z_{\Delta t} / \sigma$, $Z_{\Delta t} = Y(t) - Y(t - \Delta t)$, $Y(t)$ – значение индекса S&P500 в момент времени t . Заметим, что если графики с различными Δt на рис. 1 привести к нормированному масштабу

$$Z_s = Z_{\Delta t} / (\Delta t^{1/\alpha}), \quad (19)$$

то все они совпадут. Это означает, что усеченное распределение Леви для интервалов от 1 мин до 1 мес. является однородным по Δt , так же как и чистое распределение Леви (18). Дальнейшие исследования показали, что этот закон остается верным и для других индексов, а так же для отдельных акций. При этом в каждом случае появляется свой показатель α . Кроме того, оказалось, что начиная от $\Delta t = 1$ мес. и больше, это универсальное распределение начинает сходиться к гауссовому распределению.

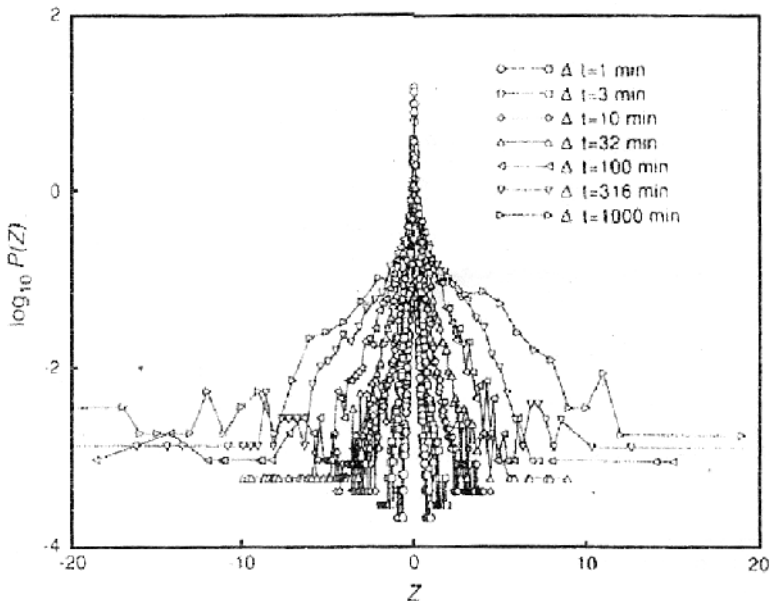


Рис. 1. Графики распределения $Z_{\Delta t}$ в логарифмическом масштабе для Δt в интервале от 1 до 1000 мин

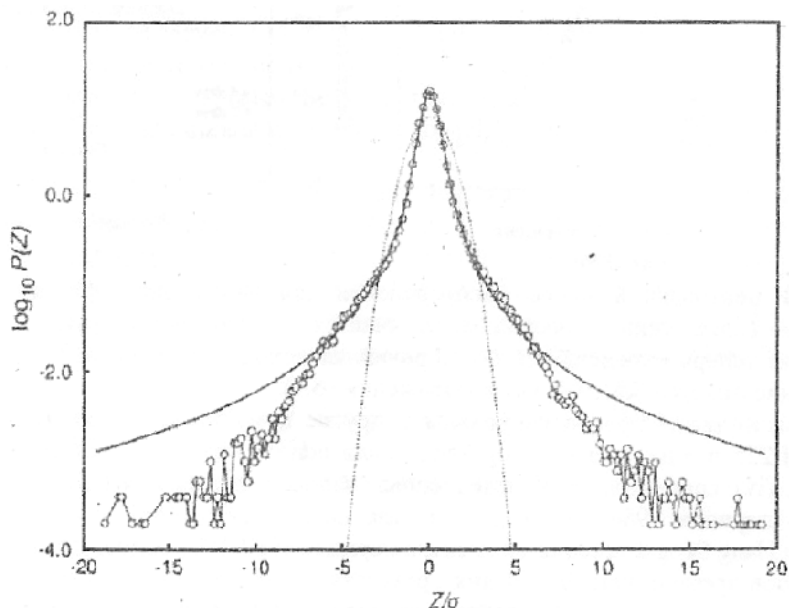


Рис. 2. Распределение $Z_{\Delta t}$ в логарифмическом масштабе при $\Delta t = 1$ мин вместе с чистым распределением Леви (18) и гауссовым распределением (опрокинутая парабола)

Завершая этот краткий обзор, следует сказать, что мы затронули только самые яркие результаты эконофизики, которые стали уже своего рода «классикой». Как мы видели, здесь есть модели, исследование которых требует привлечения самых совершенных методов статистической физики (Minority Game), здесь есть теории для описания финансовых катастроф с использованием методов нелинейной динамики и фазовых переходов и, наконец, здесь есть самые глубокие экспериментальные исследования, проведенные на том уровне строгости, который принят в физике. При этом актуальность всех этих работ для экономики и, в частности, для финансовой науки, очевидна. Более подробно различные направления эконофизики представлены в работах Артура [49 – 50], Бушо [51 – 52], Лукса [53 – 56], Соломона [57 – 58] и многих других. Что же касается развития этой дисциплины в России, то помещенные в настоящем сборнике работы акад. В.П. Маслова, проф. Д.С. Чер-

навского, проф. М.Ю. Романовского, проф. А.М. Чеботарева и других авторов дают об этом достаточно полное представление. Кроме того, за всеми этими работами просматривается некоторая общая идеология. В отличие, например, от эконометрики, которая занимается, главным образом, надежным установлением статистических связей между параметрами, а затем ищет их разумную интерпретацию с точки зрения экономики, эконофизика, в первую очередь, стремится посмотреть на задачу с точки зрения «системы первых принципов», которая сложилась в теоретической физике при построении ее базовых моделей. Как показывает история развития этих моделей (многие из которых с равным успехом применяются и в других областях знания), область охвата таких принципов выходит далеко за рамки физики. В основе же подобных принципов лежит вера в существование объективных законов, которым подчиняется любой спонтанно возникающий порядок, а также вера в то, что этот порядок может быть описан на языке математики. Одним из примеров такого порядка является фрактальная структура, которая возникает равно и в теории фазовых переходов, и в турбулентности, и в теории самоорганизованной критичности.

2. Фрактальные структуры

2.1. Согласно одному из определений Бенуа Мандельброта [59] «фракталом называется множество, хаусдорфова размерность которого строго больше его топологической размерности». Чтобы раскрыть это определение, напомним о двух принципиально различных подходах к понятию размерности. С точки зрения первого, размерность геометрической фигуры – это минимальное число координат, необходимых для ее описания как множества точек с сохранением структуры естественной близости: например, для описания линии достаточно одной координаты, для описания поверхности – двух, для описания тела – трех координат. Поскольку эта размерность является топологическим инвариантом (т.е. сохраняется при взаимно-однозначном и непрерывном в обе стороны отображении), то ее называют *топологической* размерностью и обозначают D_T . Этот подход отражен в известных работах Пуанкаре, Брауэра, Менгера, Урысона, Лебега и др. Его вершиной стала гомотологическая теория размерности Александрова [60]. С точки зре-

ния второго подхода, размерность – это число D , выражающее связь естественной меры геометрической фигуры (например, длины, площади или объема) с величиной (в данном случае длиной), положенной в основу исходной метрической системы. Если метрический эталон такой величины, принятый за единицу, увеличить (уменьшить) в b раз, то указанная мера уменьшится (увеличится) в b^D раз. Эту размерность называют *метрической*. Источником такого определения является следующее выражение для обычной меры M (длины, площади или объема) произвольной геометрической кривой, поверхности или тела:

$$M = \lim_{\delta \rightarrow 0} [N(\delta)\delta^D], \quad D = 1, 2, 3, \quad (20)$$

где $N(\delta)$ – число симплексов (отрезков, клеток или кубов) с геометрическим фактором (линейным размером) δ , определяющих аппроксимацию исходного множества. На основе именно этого выражения Хаусдорф в 1919 г. предложил свое знаменитое определение размерности для случая компактного множества в произвольном метрическом пространстве [61]:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln N(\delta) / \ln(1/\delta)], \quad (21)$$

где $N(\delta)$ – минимальное количество шаров радиуса δ , покрывающих это множество. Заметим, что для обычных регулярных геометрических фигур $D = D_T$. Однако для более экзотических множеств (а именно фракталов) $D > D_T$. Следует отметить, что если исходное множество погружено в евклидово пространство, то в определении (21) вместо покрытий этого множества шарами можно брать любые другие его аппроксимации простыми фигурами (например, клетками) с геометрическим фактором δ . При этом наряду с исходной сферической размерностью D появляются новые фрактальные размерности (клеточная, внутренняя и т.д.), которые, как предельные значения при $\delta \rightarrow 0$, обычно совпадают. Однако скорость сходимости к этому пределу для таких размерностей может быть весьма различной. Поскольку на практике размерность вычисляется на основе конечного числа покрытий или других аппроксимаций, то правильный выбор последних может иметь принципиальное значение.

Первоначальное определение (21) рассматривалось лишь как удобное средство для систематизации различных «патологических» множеств типа функции Веерштрасса, кривых Пеано и их многочисленных разновидностей, которые возникают естественным образом при обсуждении оснований математического анализа. Поскольку все такие множества, несмотря на свою крайнюю нерегулярность, обычно инвариантны относительно масштабных преобразований, то все они имеют хаусдорфову размерность. Причем, как правило, эта размерность оказывается дробной. Далее мы рассмотрим простейшие примеры таких множеств, чтобы на этих примерах пояснить идею, которая станет основной при исследовании временных рядов.

2.2. Первый пример – это кривая Коха. Строится она с помощью итеративной (повторяющейся) процедуры. На нулевом шаге берется единичный отрезок (рис. 3). На первом шаге этот отрезок делится на три равные части. Затем на средней части строится равносторонний треугольник и его основание выбрасывается. Далее на каждом следующем шаге повторяется та же процедура со всеми оставшимися отрезками. Множество, которое получается в результате такой итеративной процедуры, называется *кривой Коха*. Надо сказать, что все модельные фракталы строятся как предел последовательности некоторых комплексов. Такие комплексы Мандельброт назвал *предфракталами*. Для вычисления размерности кривой Коха в качестве последовательности аппроксимаций удобно воспользоваться ее представлением на n -м шаге итерации (предфракталом n -го поколения). В этом случае оно будет аппроксимировано 4^n отрезками, уменьшенными в 3^n раз. И хотя такие аппроксимации не являются покрытиями, однако именно они для данного объекта являются наиболее естественными. Если теперь взять $\delta = (1/3)^n$, то $N(\delta) = 4^n$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ по формуле (21), получаем $D = \ln 4 / \ln 3$ ($\approx 1,26$). Такая размерность называется *внутренней*. Нетрудно показать, что в данном случае она совпадает с хаусдорфовой размерностью. Попутно заметим, что если в нулевом приближении взять не отрезок, а треугольник с единичной стороной и проделать с каждой из его сторон описанную выше процедуру, то в результате получится множество, известное как снежинка Коха (рис. 4).

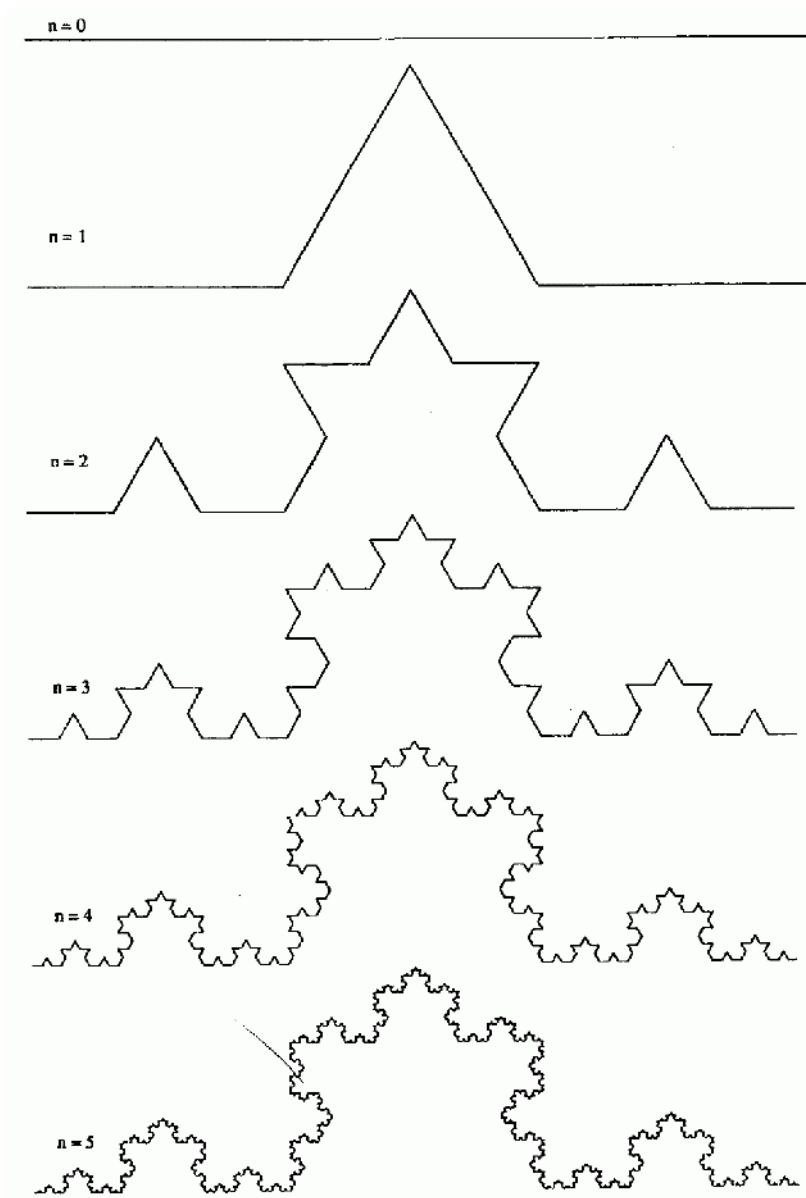


Рис. 3. Кривая Коха на первых пяти шагах итерации

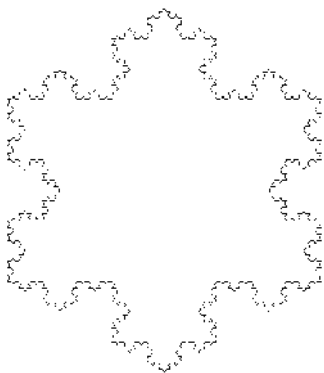


Рис. 4. Снежинка Коха на пятом шаге итерации

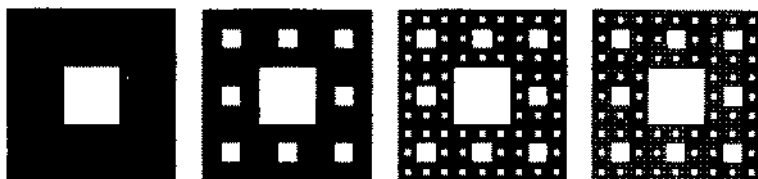


Рис. 5. Ковер Серпинского на четырех шагах итерации.

Второй пример – это ковер Серпинского, который строится так. На нулевом шаге берется единичный квадрат. На первом – этот квадрат делится на девять равных квадратов и выбрасывается средний (рис. 5). Далее на каждом следующем шаге эта процедура повторяется со всеми оставшимися квадратами. Множество, которое получается в пределе такой итеративной процедуры, называется *ковром Серпинского*. Для вычисления фрактальной размерности этого множества в качестве n -й аппроксимации опять используем предфрактал n -го поколения. В этом случае оно будет покрыто 8^n квадратами, уменьшенными в 3^n раз. Это означает, что при $\delta = (1/3)^n$, $N(\delta) = 8^n$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $D = \ln 8 / \ln 3 (\approx 1,89)$.

Заметим, что аппроксимации, которые мы использовали в этих случаях, в некотором смысле оптимальным образом приближают соответствующий фрактал на каждом шаге итерации. Именно этот

факт позволяет нам получить значение D уже на первом шаге, что невозможно при использовании других аппроксимаций. Для того чтобы пояснить это более подробно, для какого-либо из этих двух примеров построим график, где по горизонтальной оси отложены значения $\ln(1/\delta)$, а по вертикальной – значения $\ln N(\delta)$ (рис. 6). Поскольку в этом масштабе все степенные функции являются линейными, то степень D определяется как тангенс угла наклона соответствующей прямой. Очевидно, что при $\delta = (1/3)^n$ все данные для указанного примера будут находиться на одной прямой. Если же для вычисления D в этом примере использовать другие аппроксимации, то получится график, который лишь асимптотически приближается к прямой. При этом если аппроксимации выбраны неудачно, то такое приближение может быть весьма медленным. Далее при анализе временных рядов это соображение будет основным для осознания необходимости перехода к оптимальным аппроксимациям.

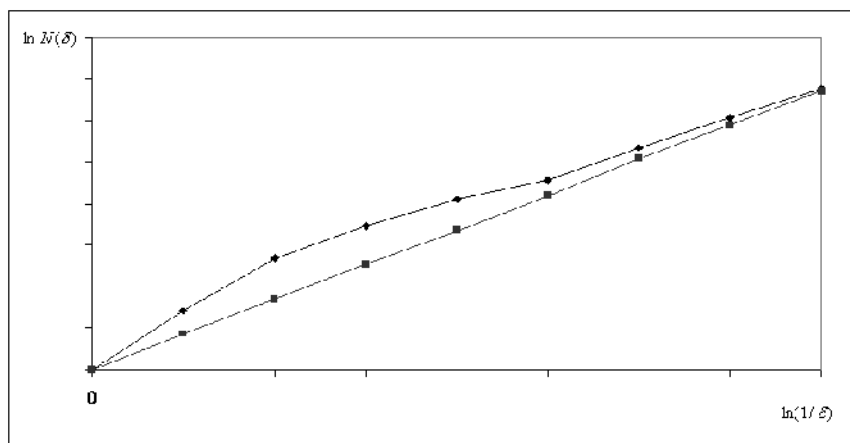


Рис. 6. Зависимость в двойном логарифмическом масштабе числа симплексов $N(\delta)$ составляющих аппроксимацию, от характерного размера симплекса δ . Если такие аппроксимации являются предфракталами, то эта зависимость является линейной. В противном случае эта зависимость будет лишь приближаться к линейной в асимптотике при $\delta \rightarrow 0$

2.3. Когда рассматривались подобные примеры, то никто не надеялся, что множества с нетривиальной хаусдорфовой размерностью могут иметь какое-либо отношение к природе. Теперь, во многом благодаря усилиям Мандельброта мы знаем, что фракталы окружают нас повсюду. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции. При этом реальный диапазон масштабов, где может наблюдаться фрактальная структура, простирается от расстояний между молекулами в полимерах до расстояния между скоплениями галактик во вселенной. Можно сказать, что все сильные нерегулярности в природе стремятся обрести самоподобную (фрактальную) структуру как наиболее энергетически выгодную.

Общую специфику природных фракталов мы поясним на примере береговой линии, тем более что этот пример представляет исторический интерес. Именно здесь впервые была обнаружена закономерность, впоследствии осмысленная как фрактальность. В работе известного английского метеоролога и картографа Ричардсона (вышедшей уже после его смерти в 1961 г.) [62] с помощью последовательности все более точных карт измерялся периметр береговой линии Великобритании. Данные наносились на график, где по горизонтальной и вертикальной осям откладывались соответственно логарифмы масштабного фактора карты m и периметра $P(m)$. Результат оказался поразительным. Данные почти точно легли на прямую (рис. 7). Это означает, что благодаря «довескам», которые появляются по мере уменьшения масштабного фактора карты, периметр «расходится» (т.е. $P(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow 0$), и причем по степенному закону. Отсюда следует, что береговая линия имеет фрактальную размерность. Действительно, поскольку масштабный фактор карты m прямо пропорционален минимальному различимому размеру δ («разрешению» карты), то измерение периметра с помощью последовательности все более точных карт можно представлять как измерение с помощью последовательности все более точных аппроксимаций береговой линии ломаными с размером звена δ . Тогда выполнение степенного закона при переходе к более точным картам просто означает что:

$$P(\delta) \sim \delta^{-\alpha}, \tag{22}$$

где $P(\delta)$ – периметр, соответствующий разрешению δ ; α – константа¹. Если теперь учесть, что $P(\delta) = N(\delta)\delta$, где $N(\delta)$ – число звеньев ломаной, аппроксимирующей периметр, то для $N(\delta)$ получим выражение:

$$N(\delta) \sim \delta^{-(\alpha+1)}, \tag{23}$$

откуда сразу следует, что береговая линия – фрактал с размерностью $D = \alpha + 1$ (см. формулу (21)).

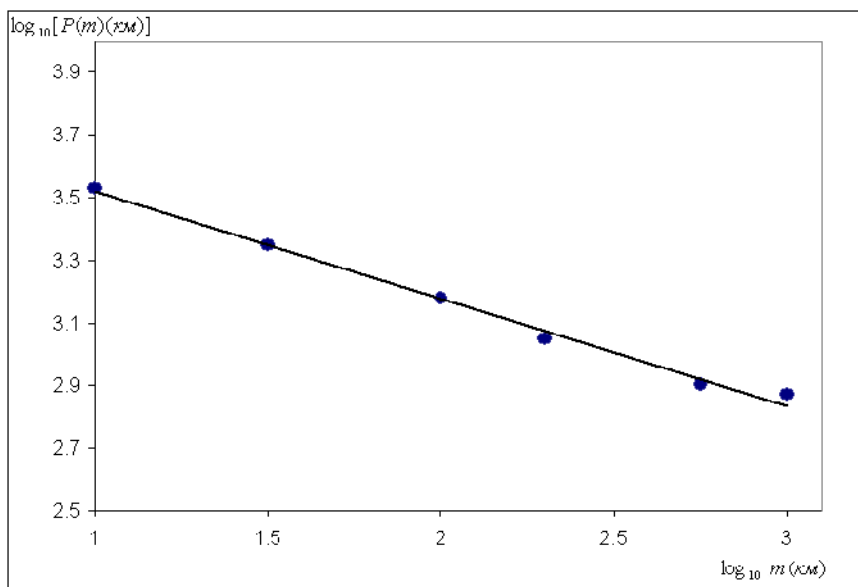


Рис. 7. Зависимость длины береговой линии $P(m)$ от масштабного фактора карты m в двойном логарифмическом масштабе

¹ Здесь и далее символ \sim означает, что при $\delta \rightarrow 0$ выражения справа и слева (которые обычно стремятся к нулю или бесконечности) различаются не более чем на константу.

На основе этого примера отметим основные особенности всех природных фракталов в их отличии от модельных:

во-первых, свойство самоподобия для них выполняется как правило лишь в среднем;

во-вторых, при вычислении фрактальной размерности степенной закон проявляет себя как «промежуточная асимптотика» (т.е. при $\delta \rightarrow 0$ берется масштаб, малый по сравнению с некоторым характерным, но много больше некоторого минимального). Последнее означает, что при построении соответствующей зависимости в двойном логарифмическом масштабе следует исключить масштабы порядка минимального, причем особую роль здесь играет «искусство» правильного выбора системы аппроксимаций.

В следующем разделе мы рассмотрим фрактальные временные ряды, которые являются важнейшим классом природных фракталов.

3. Анализ временных рядов

3.1. Наиболее простым способом исследования фрактальной структуры временных рядов является вычисление их фрактальной размерности через клеточную размерность D_c . Для определения размерности D_c разобьем плоскость, на которой определен график временного ряда на клетки размером δ и определим число клеток $N(\delta)$, где находится хотя бы одна точка этого графика. Затем при различных δ в двойном логарифмическом масштабе построим функцию $N(\delta)$, которая аппроксимируется прямой, например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Тогда D_c определяется по углу наклона этой прямой. Главным недостатком такого метода является то, что выход на степенную асимптотику функции $N(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ обычно происходит крайне медленно. Более популярным является метод определения D через показатель Херста H (см. ниже), который для гауссовых процессов связан с D соотношением $H = 2 - D$. Однако для надежного вычисления H требуется слишком большой репрезентативный масштаб, содержащий несколько тысяч данных [63]. Внутри этого масштаба временной ряд, как правило, меняет характер своего поведения много раз.

Чтобы связать локальную динамику соответствующего процесса с фрактальной размерностью временного ряда, необходимо определить размерность D локально. Для этого попытаемся найти последовательность аппроксимаций, которая при фиксированном δ была бы в некотором смысле оптимальной. Умножим обе части (21) на $1/\delta$ и введем D под знак логарифма. В результате получим:

$$N(\delta) \sim \delta^{-D} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (24)$$

Если теперь умножить обе части (24) на δ^2 , то определение размерности можно переписать в виде степенного закона для площади аппроксимаций $S(\delta)$:

$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (25)$$

Заметим, что такая форма в отличие от (24) не требует, чтобы симплексы, из которых состоит аппроксимация, были одинаковыми. Достаточно того, чтобы они имели один и тот же геометрический фактор δ . Это позволяет нам использовать аппроксимации, которые при данном δ в некотором смысле наилучшим образом приближают исходную функцию.

3.2. Действительно, пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(t)$, имеющая не более конечного числа точек разрыва первого рода: именно такие функции естественно рассматривать в качестве модельных, например, для финансовых временных рядов. Введем равномерное разбиение отрезка

$$\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b], \quad (26)$$

где $t_i - t_{i-1} = \delta = (b - a)/m$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Покроем график этой функции прямоугольниками таким образом, чтобы это покрытие было минимальным (по площади) в классе покрытий прямоугольниками с основанием δ (рис. 8). Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, которая является разностью между максимальным и минимальным значением функции $f(t)$ на этом отрезке.

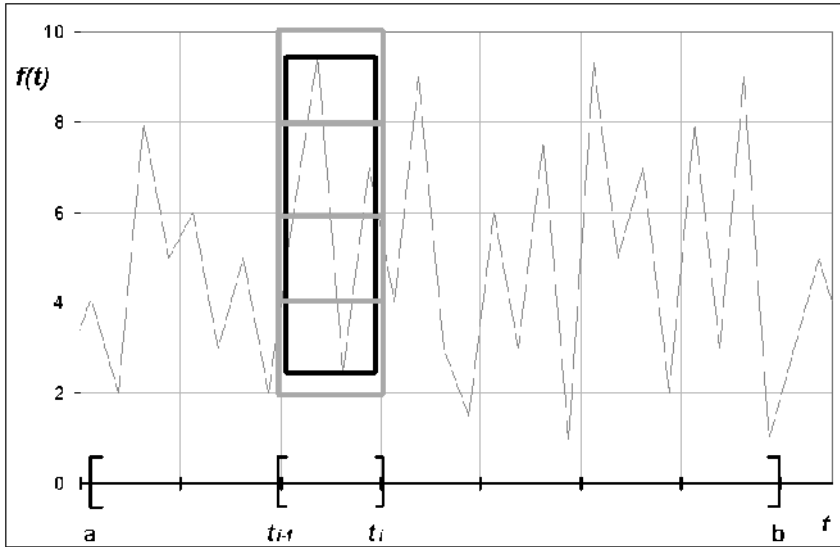


Рис. 8. Минимальное (черный прямоугольник) и клеточное (серый прямоугольник) покрытия функции $f(t)$ на интервале $[t_{i-1}, t_i]$, длиной δ

Введем величину:

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(\delta). \quad (27)$$

Тогда полную площадь минимального покрытия $S_\mu(\delta)$ можно записать в виде:

$$S_\mu(\delta) = V_f(\delta)\delta. \quad (28)$$

Поэтому из (25) следует, что

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (29)$$

где

$$\mu = D_\mu - 1. \quad (30)$$

Назовем размерность D_μ **размерностью минимального покрытия**. Чтобы соотнести D_μ с другими размерностями и, в част-

ности, с клеточной размерностью D_c , построим клеточное разбиение плоскости графика функции $f(t)$, как показано на рис. 7. Пусть $N_i(\delta)$ – число клеток, покрывающих график $f(t)$ внутри отрезка $[t_{i-1}, t_i]$. Тогда:

$$0 < N_i(\delta)\delta^2 - A_i(\delta)\delta < 2\delta^2. \quad (31)$$

Разделим это соотношение на δ и просуммируем по i с учетом (27). В результате получим

$$0 < N(\delta)\delta - V_f(\delta) < 2(b - a), \quad (32)$$

где $N(\delta) = \sum N_i(\delta)$ есть полное число клеток размера δ , покрывающих график функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, с учетом (29) и (30), получим:

$$N(\delta)\delta \sim V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} = \delta^{1-D_\mu}. \quad (33)$$

С другой стороны, согласно (25)

$$N(\delta)\delta = S_c(\delta)\delta^{-1} \sim \delta^{1-D_c}. \quad (34)$$

Следовательно, $D_c = D_\mu$.

Заметим, однако, что, несмотря на это равенство, для реальных фрактальных функций минимальные и клеточные покрытия могут давать различные приближения величины $S(\delta)$ к асимптотическому режиму (25), причем величина этого различия может быть весьма значительной.

Возвращаясь к формуле (30), заметим, что поскольку $D_\mu = D$ и для одномерной функции $D_T = 1$, то $\mu = D - D_T$. Поэтому в данном случае индекс μ естественно назвать **индексом фрактальности**. Далее при анализе финансовых временных рядов мы будем рассматривать его как основной фрактальный показатель.

3.3. Наиболее популярными представителями фрактальных временных функций являются финансовые временные ряды (ряды цен

акций и курсов валют). Существует надежное численное подтверждение фрактальной структуры таких рядов [64 – 68]. Теоретически же фрактальность обычно связывают с тем, что для устойчивости рынка на нем должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и приводит к масштабной инвариантности (отсутствию выделенного масштаба) ценовых рядов на соответствующем временном интервале [69]. С помощью индекса фрактальности μ нами были исследованы ценовые ряды акций тридцати компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index) с 1970 по 2002 г. Каждый ряд содержит 8145 записей. Каждая запись соответствует одному торговому дню и содержит четыре значения: информацию о минимальной и максимальной цене, а также цены открытия и закрытия. В литературе финансовые ряды обычно изображают с использованием т.н. «японских свечей». Фрагмент такого ряда для компании Coca-Cola представлен на рис. 9. Для простоты анализа ограничимся последними $2^{12} = 4096$ записями для каждой компании. При вычислении индекса μ мы использовали последовательность m вложенных разбиений ω_m (26), где $m = 2^n$; $n = 0, 1, 2, \dots, 12$. Каждое разбиение состояло из 2^n интервалов, содержащих 2^{12-n} торговых дней. Для каждого разбиения ω_m вычислялось значение $V_f(\delta)$ (27). Здесь $A_i(\delta)$ равна разности между максимальной и минимальной ценой на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ (в частности, если $\delta = \delta_0$, то $A_i(\delta)$ равна разности между максимальной и минимальной ценой за день). Типичный пример поведения $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе представлен на рис. 10 для компании Microsoft. Мы видим, что данные почти точно ложатся на прямую линию, кроме двух последних точек, где линейный режим имеет излом. Для определения значения μ по этим данным следует исключить две последние точки и найти линию регрессии $y = ax + b$ с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Тогда $\mu = -a$.

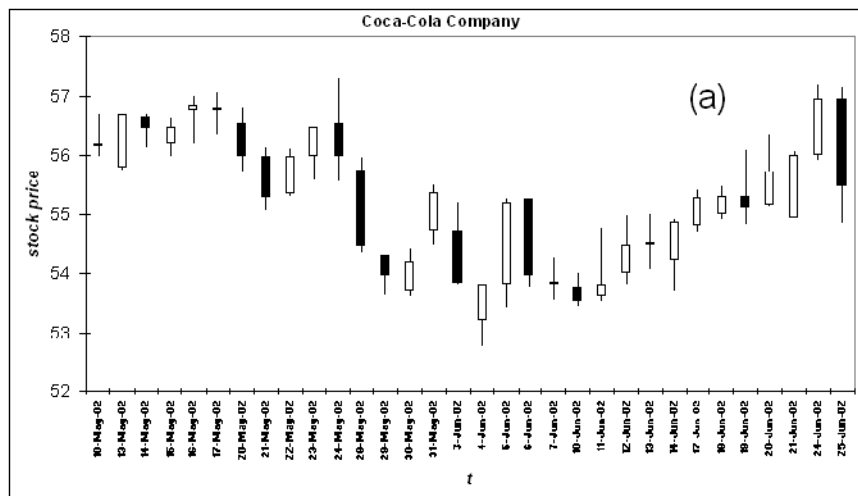


Рис. 9. Типичное поведение цен на интервале 32 дня (использован дневной график цен акций компании Coca-Cola). В финансах графики цен принято изображать не одномерными линиями, а интервалами (так называемые баровые графики или графики в виде японских свечей). Один прямоугольник (называемый телом свечи) с двумя штрихами сверху и снизу (называемыми тенями свечи) изображает колебания цен в течение дня. Верхняя точка верхней тени показывает максимум цены, нижняя точка нижней тени – минимум цены за день. Верхняя и нижняя границы тела свечи показывают цену открытия и закрытия торгов. При этом, если тело белого (черного) цвета, то закрытие выше (ниже) открытия

При уровне надежности $\alpha = 0.95$ в приведенном примере $\mu = 0.472 \pm 0.008$, $R^2 = 0.999$. Здесь R^2 – коэффициент детерминации для линии регрессии. Результаты для остальных компаний следующие:

$$\mu_{\min} = 0.469 \pm 0.019, R^2 = 0.999 \text{ (Intel Corporation);}$$

$$\mu_{\max} = 0.532 \pm 0.007, R^2 = 0.997 \text{ (International Paper Company).}$$

Отметим, что для каждой из 30 компаний график $V_f(\delta)$ почти точно ложится на прямую также и на всех меньших репрезентативных интервалах вплоть до 32-х, а иногда даже до 16-ти дней. При этом на интервалах меньших, чем 500 дней, излом линейной части графика, как правило, исчезает. Типичный пример $V_f(\delta)$ на интер-

вале 32 дня представлен на рис. 11а. При $\alpha = 0.95$ мы получаем $\mu = 0.571 \pm 0.071$, $R^2 = 0.992$.

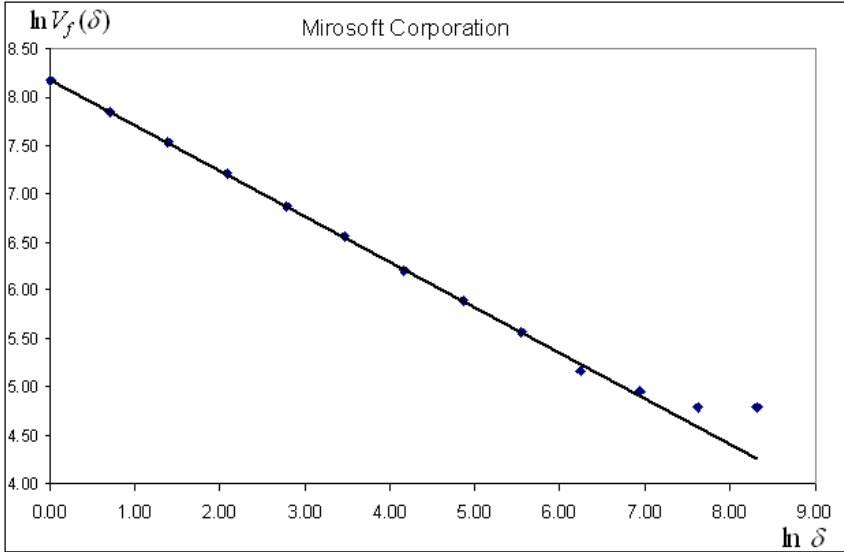


Рис. 10. Результат вычисления индекса вариации для временного ряда цен акций компании Microsoft на интервале 4096 дней. Прямая $y = ax + b$ определялась методом МНК по всем точкам, исключая две последние

3.4. Чтобы оценить преимущества построенного алгоритма, сравним его с методом вычисления фрактальной размерности с помощью показателя Херста H . Для фрактальных временных рядов этот метод традиционно считается наиболее эффективным [63]. Как известно, показатель Херста H определяется на основе предположения, что

$$\langle |f(t + \delta) - f(t)| \rangle \sim \delta^H \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (35)$$

где угловые скобки означают усреднение по временному интервалу. Чтобы сравнить индекс μ с показателем H , введем следующее естественное определение средней амплитуды $\langle A_i(\delta) \rangle$ на разбиении ω_m (см. (26), (27)):

$$\langle A(\delta) \rangle \equiv m^{-1} \sum_{i=1}^m A_i(\delta). \quad (36)$$

Умножим (27) на $m^{-1} \sim \delta$ и подставим в (29). Получим:

$$\langle A(\delta) \rangle \sim \delta^{H_\mu} \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (37)$$

где

$$H_\mu \equiv 1 - \mu. \quad (38)$$

Как уже отмечалось (см. выше), если $f(t)$ – реализация гауссова случайного процесса, то показатель H связан с размерностью D , а следовательно, и с индексом μ , соотношением:

$$H = 2 - D_\mu = 1 - \mu. \quad (39)$$

Следовательно, в этом случае $H = H_\mu$. Однако реальные финансовые ряды, как правило, не являются гауссовыми (см., например, [44, 48]) и поэтому значения H_μ и H могут сильно различаться. Действительно, в формуле (37) мы имеем степенной закон для средней амплитуды функции $f(t)$ на интервале длиной δ , в то время как в формуле (35), мы имеем степенной закон для средней разности между начальным и конечным значением $f(t)$ на том же интервале. Как оказывается, индекс μ вычисляется на порядок более точно, чем показатель Херста H в подавляющем большинстве случаев. Возьмем, например, ценовой ряд компании Alcoa Inc., которая стоит первой по алфавиту в списке индекса Доу-Джонса. Рассмотрим последовательность 32-х дневных интервалов исходного ценового ряда (состоящего из 8145 торговых дней, каждому из которых соответствует 4 значения), смещенных друг относительно друга на один день. Общее число таких интервалов $N = 8145 - 32 = 8113$. Для каждого из них вычислим H и μ на основе (35) и (27), (29). При вычислении H для этих интервалов будем использовать $32 + 1 = 33$ цены закрытия $C(t)$ и усреднять по непесекающимся подинтервалам длиной $\delta = 2^n$, где $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Это означает, что:

$$\langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle = (\delta/32) \sum_{i=0}^{32/\delta} |C(t_{i+1}) - C(t_i)|, \quad (40)$$

где $t_{i+1} = t_i + \delta$.

В соответствии с предположением (35) вычислим для каждого δ

$$x = \ln \delta, \quad y = \langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle \quad (41)$$

и аппроксимируем результаты вычисления прямой

$$y = ax + b \quad (42)$$

с помощью МНК. После чего положим $H = a$.

Для определения индекса μ используем (27) в виде:

$$V_f(\delta) = \sum_{i=1}^{32/\delta} A_i(\delta), \quad (43)$$

где $A_i(\delta)$ – амплитуда $f(t)$ на интервале $[t_i, t_i + \delta]$.

В соответствии с предположением (29) вычислим для каждого δ

$$x = \ln \delta, \quad y = \ln V_f(\delta) \quad (44)$$

и аппроксимируем полученные результаты прямой (42) с помощью МНК. После чего положим $\mu = -a$.

В качестве критериев точности расчетов выберем ширину доверительного интервала Δ , в который значение величины μ (или H) попадает с вероятностью 0,90 и $K = 1 - R^2$, где R^2 – коэффициент детерминации (если точки ложатся точно на прямую, то $R^2 = 1$ и $K = 0$).

Для каждого из 8113 интервалов вычислим μ , Δ_μ , K_μ и H , Δ_H , K_H . Типичные фрагменты графиков функций $\Delta_\mu(t)$, $\Delta_H(t)$ и $K_\mu(t)$, $K_H(t)$, построенных по интервалам, правый конец которых совпадает с моментом t , представлены на рис. 12а и 12б. Как видно из этих рисунков, в подавляющем большинстве случаев индекс μ определен на порядок точнее, чем H .

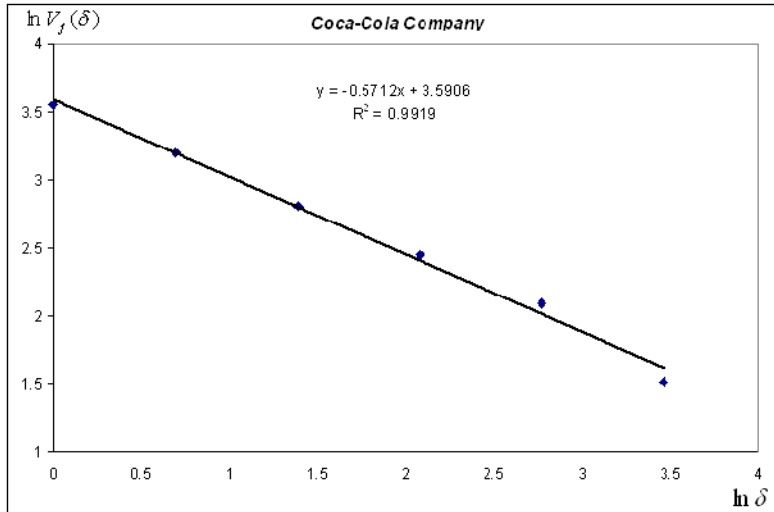


Рис. 11а. Результат вычисления $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе для временного ряда, представленного на рис. 7. Прямая $y = ax + b$ построена методом МНК. Для определения индекса μ следует отождествить $\mu = -a$

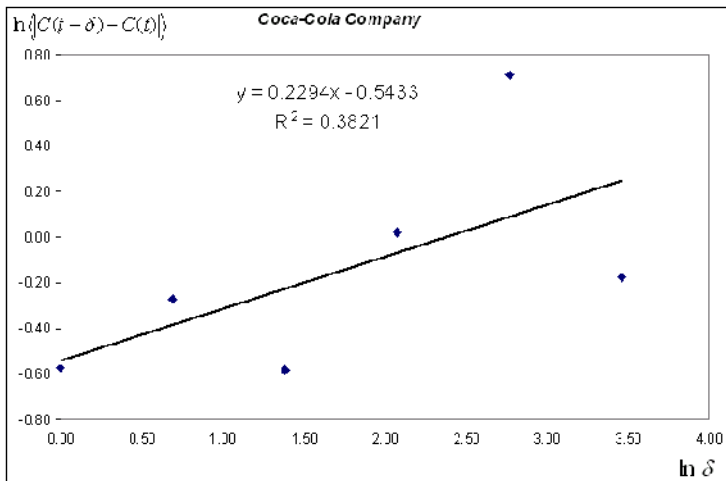


Рис. 11б. Результат вычисления $\langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle$ (где $C(t)$ – цена закрытия) для этого же ряда и соответствующей зависимости $y = ax + b$. Для определения показателя Херста H следует отождествить $H = a$

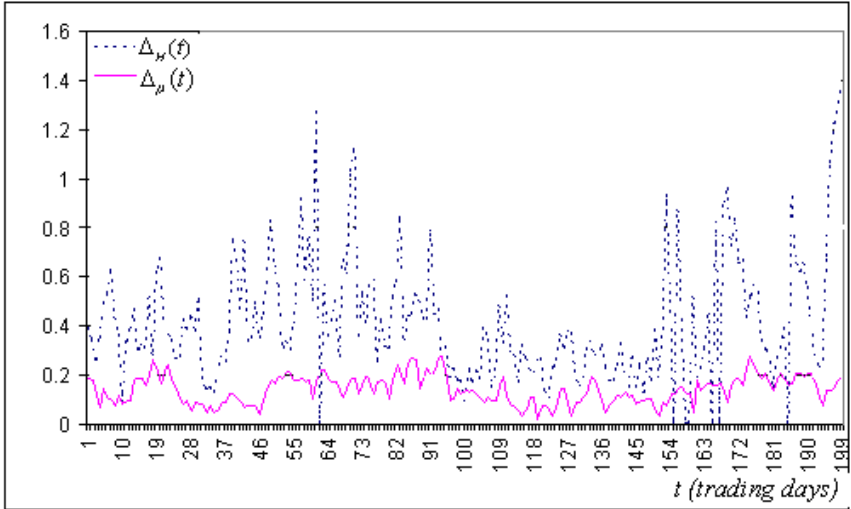


Рис. 12а. Типичный фрагмент временного ряда ширины доверительных интервалов $\Delta_H(t)$ и $\Delta_\mu(t)$, построенных по ряду цен закрытия $C(t)$ для компании Alcoa Inc.

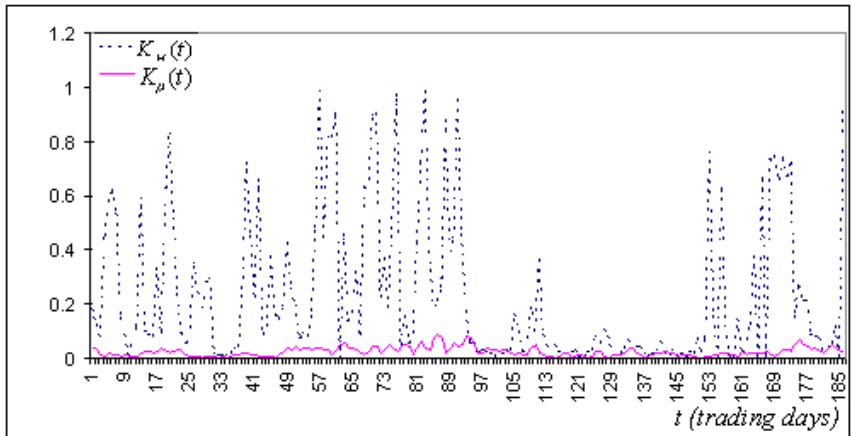


Рис. 12б. Соответствующий фрагмент ряда для значений $K_H(t)$ и $K_\mu(t)$, построенных по тому же самому ряду $C(t)$

Результаты проведенных вычислений следующие:

$$\langle \Delta_{\mu} \rangle = 0.107, \quad \langle \Delta_H \rangle = 0.452;$$

$$\langle K_{\mu} \rangle = 0.0147, \quad \langle K_H \rangle = 0.245.$$

Кроме этого, оказалось, что $\Delta_{\mu} < \Delta_H$ для 99 %, и $K_{\mu} < K_H$ для 91 % исследованных интервалов. Аналогичные результаты были получены и для других ценовых рядов. В качестве типичного примера на рис. 12а и 12б мы представляем результаты вычисления μ и H на одном и том же 32-дневном интервале, показанном на рис. 9. Для $\alpha = 0.90$ результаты оказались следующими:

$$\mu = 0.571 \pm 0.071, \quad H_{\mu} = 0.429 \pm 0.071, \quad R_{\mu}^2 = 0.992;$$

$$H = 0.229 \pm 0.405, \quad R_H^2 = 0.382.$$

Как и следовало ожидать, индекс μ определен намного точнее, чем показатель H .

Таким образом, главным преимуществом индекса μ по сравнению с другими фрактальными показателями (в частности с показателем Херста H) является то, что соответствующая ему величина $V_f(\delta)$ имеет быстрый выход на степенной асимптотический режим. Это дает возможность использовать его в качестве локальной характеристики, определяющей динамику исходного процесса, поскольку репрезентативный масштаб, необходимый для надежного определения индекса μ можно считать имеющим тот же порядок, что и характерный масштаб основных состояний процесса. К таким состояниям относятся флэты (периоды относительного спокойствия) и тренды (периоды относительно длительного движения вверх или вниз). Чтобы соотнести значение μ с поведением временного ряда, естественно ввести функцию $\mu(t)$ как такое значение μ , которое еще может быть вычислено с приемлемой точностью на минимальном, предшествующем t интервале τ_{μ} . В случае непрерывного аргумента t в качестве такого интервала можно было бы взять произвольно малый интервал. Однако поскольку на практике вре-

менной ряд всегда имеет минимальный масштаб (в нашем случае он равен одному дню), то τ_μ имеет конечную длину (в нашем случае мы берем $\tau_\mu = 32$ дня).

Как оказывается, использование функции $\mu(t)$ позволяет существенно продвинуться в решении двух основных задач анализа временных рядов – задачи идентификации и задачи прогноза.

3.5. Задача идентификации обычно заключается в корректном определении макросостояния системы на основе наблюдаемой реализации временного ряда. Для решения этой задачи применительно к финансовым рядам была рассчитана функция $\mu(t)$ для каждой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса. На рис. 13 представлен типичный фрагмент ценового ряда одной из таких компаний вместе с вычисленной для этого фрагмента функцией $\mu(t)$. Достаточно беглого взгляда на рис. 13, чтобы понять, что индекс μ имеет отношение к поведению временного ряда. Действительно, на интервале между 1-м и 39-м днем, где цены ведут себя относительно стабильно (флэт), $\mu(t) > 0.5$. Далее, одновременно с развитием тренда на графике цен, $\mu(t)$ резко падает ниже значения $\mu = 0.5$ и, наконец, после 56-го дня, где цены находятся в промежуточном состоянии между трендом и флэтом, $\mu(t)$ возвращается к значению $\mu \approx 0.5$. Таким образом, исходный ряд оказывается тем стабильнее, чем больше значение μ . При этом, если $\mu > 0.5$, то наблюдается флэт, если $\mu < 0.5$, наблюдается тренд. Наконец, если $\mu \approx 0.5$, то процесс находится в промежуточном состоянии между трендом и флэтом. Подобная корреляция между значением μ и характером поведения исходного временного ряда наблюдается для подавляющего большинства его фрагментов. Чтобы представить агрегированные результаты, рассмотрим снова ценовой ряд компании Alcoa Inc. за период 1970 – 2002 гг. и 8113 интервалов длиной 32 дня, смещенных друг относительно друга на один день. Для каждого из таких интервалов выберем пять различных показателей стабильности:

$F_1 = \log(C_i/C_{i-32})$ – логарифмическое увеличение цены закрытия C_i за 32-дневный интервал;

$F_2 = A_i/A_{i-32}$, где A_i – амплитуда колебаний цен за последние 32 дня;

$F_3 = \sigma[\log(C)]$ – стандартное отклонение цен закрытия за последние 32 дня;

F_4 – значение коэффициента наклона линии линейной регрессии, проведенной по ряду цен;

$$F_5 = \left(C_i - C_{i-32} / \sum_{j=i-31}^i |C_j - C_{j-1}| \right) - \text{разность между текущей ценой и ценой 32 дня назад, нормированная на сумму модулей ежедневных приращений цен за 32 дня.}$$

– разность между текущей ценой и ценой 32 дня назад, нормированная на сумму модулей ежедневных приращений цен за 32 дня.

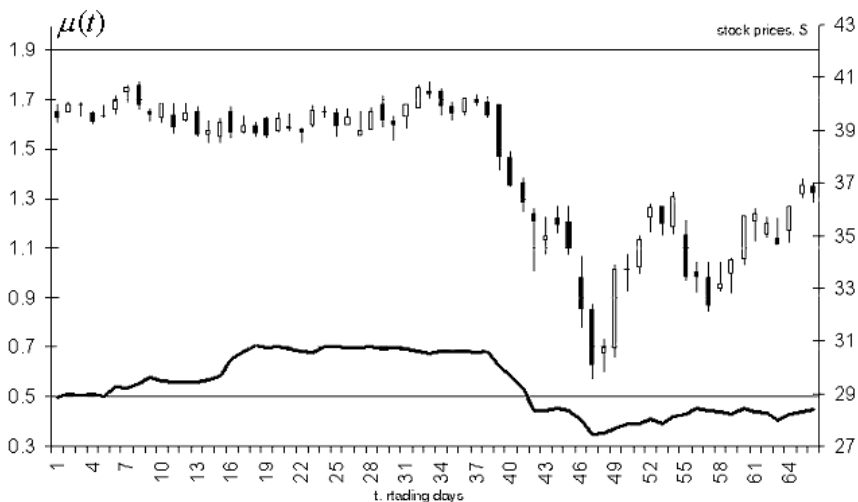


Рис. 13. Ежедневные цены акций компании Exxon Mobil Corporation (правая шкала, японские свечи) и график функции $\mu(t)$ (левая шкала, сплошная линия)

Для всех выбранных показателей стабильности справедливо следующее утверждение: чем более стабильно поведение исходного ряда (колебания происходят возле одного уровня), тем ближе значение F_m к нулю и наоборот, чем ярче выражен тренд, тем больше по модулю значение F_m . На рис. 14 представлены значения μ и F_m для каждого из указанных выше 32-дневных интервалов. Из

этих диаграмм видна явная корреляция между значением индекса μ и стабильностью ценового ряда. При этом чем больше значение μ , тем стабильнее поведение ряда, и чем меньше μ , тем сильнее в исходном ряде выражен тренд.

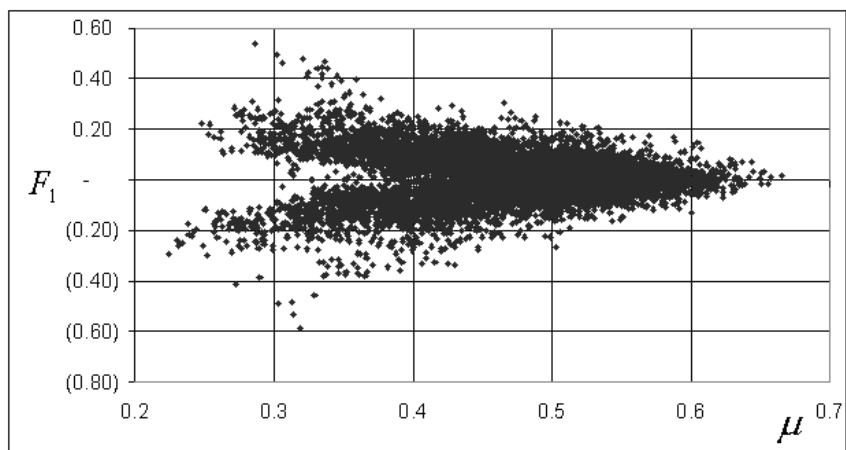
Теоретическое обоснование такой корреляции мы начнем с рассмотрения винеровского случайного процесса, который является классической моделью броуновского движения. Напомним, что из постулатов этой модели (см. введение) следует, что:

$$\langle (X(t) - X(t_0))^2 \rangle = \sigma^2 |t - t_0|, \quad (45)$$

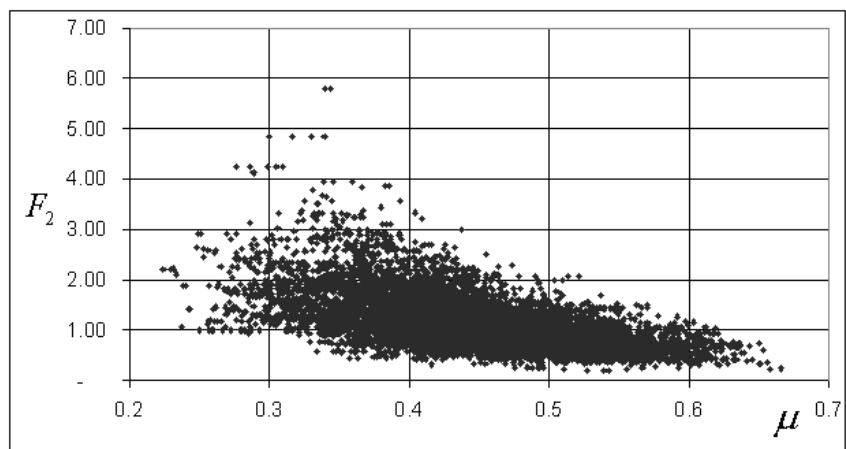
где угловые скобки означают статистическое усреднение по временному интервалу; $X(t)$ и $X(t_0)$ – значения процесса соответственно в моменты времени t и t_0 ; σ^2 – дисперсия за единицу времени (в финансах параметр σ известен как волатильность). Из (45) можно получить, что этот процесс преобразуется сам в себя при изменении масштаба времени в b раз и одновременном изменении пространственного масштаба в $b^{1/2}$ раз. Поэтому фрактальная размерность графика реализации такого процесса $D = 1.5$ ($\mu = 0.5$).

Далее, поскольку винеровский процесс не имеет памяти, то этот график в любой своей части занимает промежуточное положение между трендом и флэтом. С другой стороны, поскольку при вычислении индекса μ соответствующий репрезентативный масштаб $\tau_\mu \gg 1$, то исходя из формул (36) – (37) процесс тем стабильнее, чем больше значение μ (рис. 15). Поэтому случай $\mu < 0.5$ естественно интерпретировать как тренд, а случай $\mu > 0.5$ – как флэт. Таким образом, индекс μ действительно является показателем стабильности исходного временного ряда.

Напомним, что в соответствии с гипотезой эффективного рынка поведение цен должно быть близким к случайному блужданию. Проверка этого предположения обычно сводится к исследованию распределения ценовых приращений на нормальность и к изучению их автокорреляционной функции на предмет наличия зависимости [70 – 75]. Выводы, которые можно сделать из подобных исследований, не позволяют оценить степень отклонения реальных финансовых рядов от случайного блуждания. Использование индекса вариации μ позволяет провести более подробный анализ.

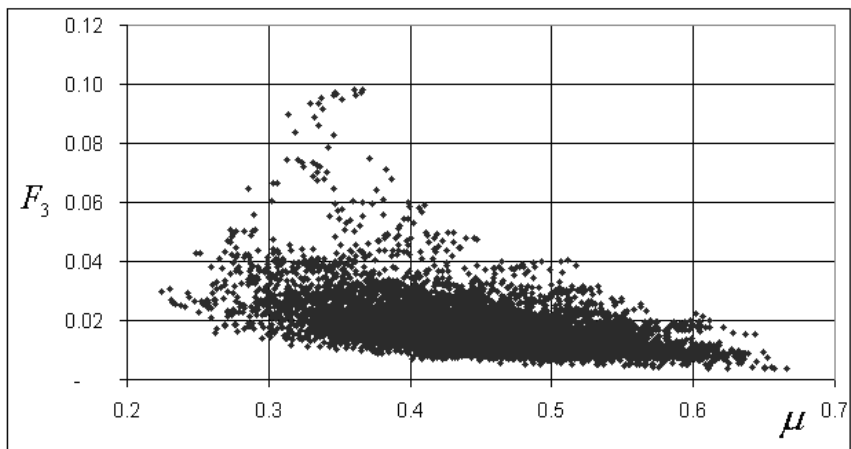


a

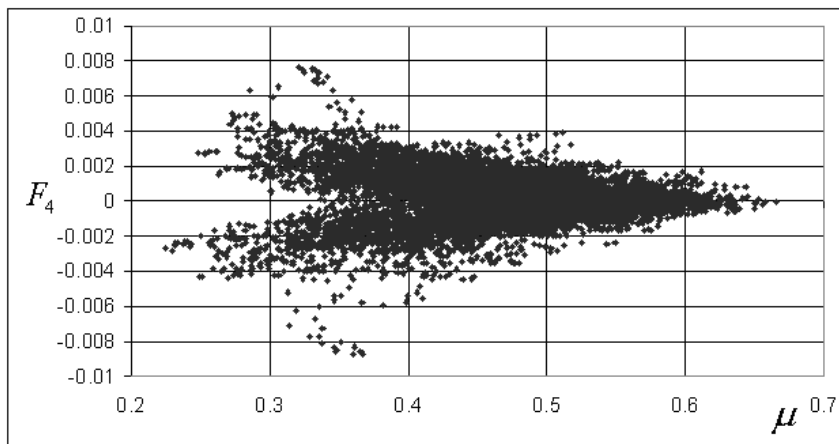


б

Рис. 14. Типичные графики зависимости между значением μ и различными показателями стабильности F_m ($m = 1, 2, 3, 4, 5$) для 32-дневных интервалов ценового ряда компании Alcoa Inc. (см. также с. 42 и 43)

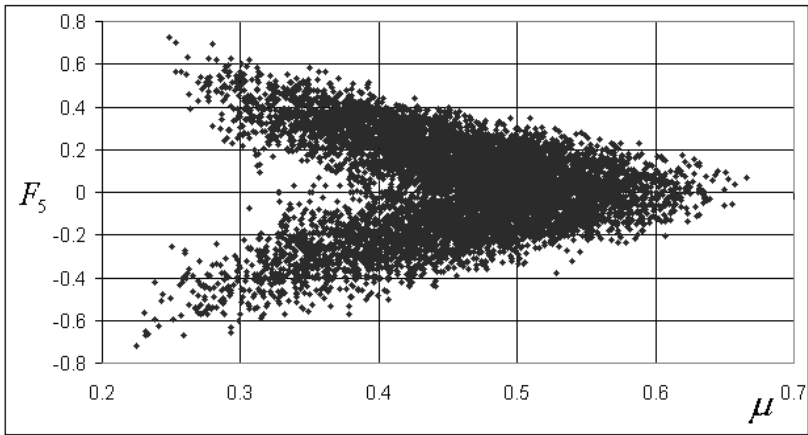


6



2

Рис. 14. Продолжение



δ

Рис. 14. Окончание

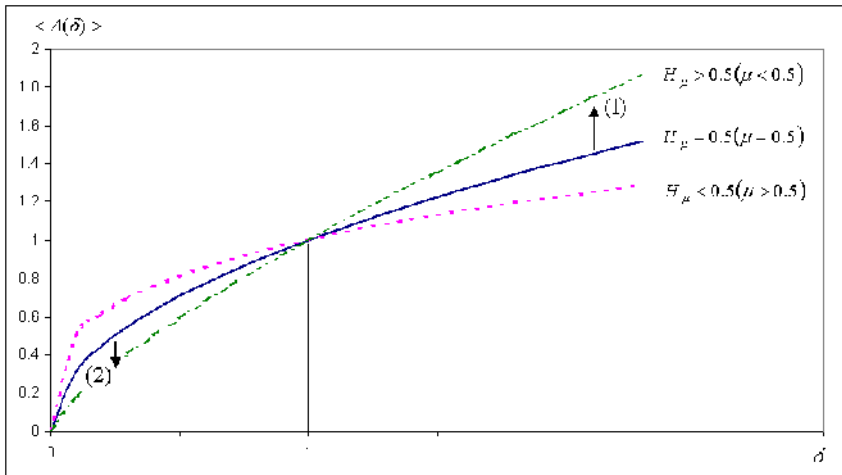


Рис. 15. Зависимость $\langle A(\delta) \rangle$ для временного ряда при различных значениях μ (H_μ): сплошная линия соответствует изменению амплитуды для броуновского движения, пунктирная и штрихпунктирная – для трендов и флэтов, соответственно

Действительно, используя локальный показатель μ , оценим долю общего времени, которую ряд проводит в различных состояниях. Для этого вернемся к рассмотренным выше 32-дневным интервалам и вычислим для каждого из них значения μ , μ_- и μ_+ , где μ_- и μ_+ – соответственно нижняя и верхняя границы доверительного интервала, в который истинное значение μ попадает с вероятностью 0.9. Будем считать, что при $\mu_+ < 0.5$ ($\mu_- > 0.5$) ряд находится в состоянии тренда (флэта), а при $\mu_- \leq 0.5 \leq \mu_+$ – в состоянии броуновского движения. Рассчитаем общее количество отрезков для каждого типа поведения и вычислим долю времени, проводимую исходным временным рядом в каждом из состояний. Результаты расчетов для ценовых рядов некоторых компаний представлены в табл. 1.

Таблица 1

| Состояние временного ряда: | Броуновское движение | Тренд | Флэт |
|----------------------------|----------------------|-------|------|
| Alcoa Inc | 23 % | 43 % | 34 % |
| Boeing Corp | 24 % | 37 % | 39 % |
| IBM | 25 % | 39 % | 36 % |
| Microsoft Corp | 26 % | 36 % | 38 % |
| Exxon Mobile Corp | 15 % | 50 % | 35 % |

Аналогичные результаты получены для всего списка компаний, входящих в индекс Доу-Джонса. Как видно из табл.1, временные ряды проводят в состоянии близком к случайному блужданию менее 30 % общего времени. Используя полученные численные данные и вид функции $\mu(t)$ (см. рис. 14), можно сделать следующий вывод: реальные временные ряды демонстрируют сложное непериодическое поведение, при котором тренды и флэты хаотическим образом сменяют броуновское движение. При этом, зная значение функции $\mu(t)$, можно сказать, какой тип поведения преобладает в каждой точке ряда.

3.6. Однако наиболее интересным представляется использование построенного фрактального анализа для решения задач прогноза. Оказывается, что наличие степенной зависимости для функции

$V_f(\delta)$ в достаточно широком диапазоне масштабов позволяет предложить новый подход к прогнозированию фазовых переходов в хаотических системах. Действительно, обратимся к формулам (37), (38) и рис. 15. Предположим, что временной ряд находится в состоянии случайного блуждания. В этом случае $D = 1.5$ ($\mu = 0.5$) и зависимость $\langle A(\delta) \rangle$ описывается сплошной линией на рис. 15. Предположим, что в системе произошел фазовый переход, в результате которого временной ряд переходит в состояние тренда. Это означает, что через некоторое время (т.е. для больших δ) амплитуда колебаний увеличится (стрелка (1) на рис. 15). Однако, как видно из графиков, переход временного ряда в новое состояние вызовет одновременное уменьшение амплитуды колебаний на малых масштабах (стрелка (2) на рис. 15). Таким образом, увеличение крупномасштабных флуктуаций ведет к подавлению мелкомасштабных флуктуаций и наоборот. Этот эффект, который служит ключом к прогнозу сильных флуктуаций на больших масштабах и следует из наличия степенного закона, был действительно обнаружен и подтвержден обработкой большого количества эмпирических данных.

Заключение

Подведем основные итоги работы. Для одномерной фрактальной функции $f(t)$ на основе величины $V_f(\delta)$ (27) мы ввели новые фрактальные показатели: индекс фрактальности μ (29) и размерность минимального покрытия D_μ (30), тесно связанную с индексом μ . Как предельное значение при $\delta \rightarrow 0$, D_μ совпадает с обычной фрактальной размерностью D . Однако по сравнению с другими известными фрактальными показателями алгоритм вычисления размерности D_μ (и соответственно индекса μ) имеет быстрый выход на степенной асимптотический режим для D . Численные расчеты, выполненные для ценовых рядов акций компаний, входящих в индекс Доу-Джонса, показали, что репрезентативный масштаб, необходимый для определения индекса μ с приемлемой точностью,

на два порядка меньше, чем, например, соответствующий масштаб для определения показателя Херста H . Это позволяет рассматривать индекс μ в качестве локального фрактального показателя. Поэтому для каждого момента t временного ряда мы ввели функцию $\mu(t)$ как значение μ , вычисленное на минимальном, предшествующем t интервале τ_μ . Использование этой функции позволило нам серьезно продвинуться как в плане идентификации, так и в плане прогноза финансовых временных рядов. В плане идентификации мы обосновали теоретически и подтвердили численно на основе достаточно большого количества эмпирических данных тот факт, что индекс μ является показателем стабильности временного ряда. Чем больше значение μ , тем стабильнее ряд. При этом случай $\mu < 0.5$ может быть интерпретирован как тренд, а случай $\mu > 0.5$ – как флэт. Случай же $\mu \approx 0.5$ соответствует броуновскому движению. Это позволило нам с помощью функции $\mu(t)$ протестировать исходные ценовые ряды с тем, чтобы выделить в них броуновскую компоненту. Как оказалось, ее доля составляет менее 30 %. Полученный результат дает оценку степени обоснованности ЕМН. В плане же прогноза обоснован теоретически и подтвержден расчетами эффект увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных. Этот эффект, очевидно, может быть полезным для предсказания сильных колебаний на финансовом рынке.

Как оказывается, построенный в работе фрактальный анализ имеет гораздо более широкую область применения. В частности, использование функции $\mu(t)$ позволяет решить задачу о распределении трендов, имеющую большое практическое значение. При этом оказывается, что вероятность продолжения тренда, который длится, скажем, 7 дней значимо выше, чем соответствующая вероятность для тренда, который длится только 5 дней.

Попутно заметим, что построенный локальный фрактальный анализ можно использовать также для прогноза землетрясений [76], ишемических заболеваний [77] и т.д. Однако при рассмотрении соответствующих временных рядов, где каждому значению аргумента соответствует только одно значение функции, эти ряды

следует первоначально преобразовать в ряды амплитуд, которые заданы на интервалах много больше, чем «масштаб разрешения» δ_0 . И, наконец, следует сказать, что построенный фрактальный анализ легко обобщается с сохранением всех своих преимуществ на многомерные фрактальные функции (что очень важно, например, для теории распознавания образов [78] и теории сжатия изображений [79]). Кроме того, с помощью показателя μ получается более адекватное выражение для мультифрактального спектра [80 – 82]. Значительно более нетривиальным является использование построенного алгоритма для вычисления размерностей странных аттракторов на основе относительно небольшого числа исторических данных. Оказывается, что использование такой процедуры позволяет подойти к проблеме предсказания катастроф совершенно с иной стороны.

В заключение авторы пользуются случаем, чтобы выразить глубокую благодарность академику В.П. Маслову и профессору М.Ю. Романовскому за целый ряд весьма ценных советов.

Список литературы

1. Bachelier L. *Theory of Speculation (Translation of 1900 French edn) / P.H. Cootner (Ed.) // The Random Character of Stock Market Prices, The MIT Press, Cambridge. 1964. P. 17 – 78.*
2. Wiener N. *Differential-space // J. Math. Phys. Math. Inst. Technol. 1923. 2. P. 131 – 174.*
3. Fama E.F. *Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis // J. Bus. 1963. 36. P. 420 – 429.*
4. Fama E.F. *The behavior of stock-market prices // J. Bus. 1965. 38. P. 34 – 105.*
5. Sharp W.F. *Portfolio Theory and Capital Markets. N.Y.: McGraw-Hill 1970.*
6. Black F., Scholes M. *The pricing of options and corporate liabilities // J. Polit. Econ. 1973. 3. P. 637 – 659.*
7. Merton R. *Theory of rational option pricing // Bell J. Econ. Manage. Sci. 1973. 4. P. 141 – 183.*
8. Mandelbrot B. *Sur certains prix speculatifs: faits empiriques et modele base sur des processus stables additifs de Paul Levy // C. R. Acad. Sci. 1962. 254. P. 3968 – 3970.*
9. Mandelbrot B. *The variation of certain speculative prices // J. Bus. 1963. 36. P. 394 – 419.*
10. Мандельброт Б. *Фракталы, случай и финансы. М.; Ижевск: R&C Dynamics, 2004.*

11. Mandelbrot B. *The Pareto-Levy law and the distribution of income* // International Economic Review. 1960. 1. P. 79 – 106.
12. Mandelbrot B. *The Stable Paretian Income Distribution, when the Apparent Exponent is Near Two* // International Economic Review. 1963. 4. P. 111 – 115.
13. Mandelbrot B. *Une classe de processus stochastiques homothétiques a soi; application a la loi climatologique de H. E. Hurst* // C. R. Acad. Sci. 1965. 260. P. 3274 – 3277.
14. Mandelbrot B. Van Ness. *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications* // SIAM Rev. 10. 1968. P. 422 – 437.
15. Лоскутов А.Ю., Бредихин А.А. *ARCH-модели на финансовом рынке России* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11. Вып. 3. С. 468 – 486.
16. Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики*. М.: Физис, 1998.
17. Elliott R. N. *Elliott's Masterworks: the Definitive Collection*, Gainesville. New Classics Library, 1994.
18. Мерфи Дж. *Технический анализ фьючерсных рынков*. М.: Сокол, 1996.
19. Prechter R.R., Frost A.J. *ELLIOTT WAVE PRINCIPLE KEY TO MARKET BEHAVIOR*. Gainesville, New Classics Library, 1978.
20. Takens F. *Dynamical Systems and Turbulence*. Berlin: Springer, 1981.
21. Ежов А.А., Шумский С.А. *Нейрокомпьютинг и его приложения в экономике и бизнесе*. М.: МИФИ, 1998.
22. Smith V.L. *Microeconomic systems as an experimental science* // American Economic Review. 1982. 72. P. 923 – 955.
23. Ларуш Л. *Физическая экономика как платоновская эпистемологическая основа всех отраслей человеческого знания*. М.: Научная книга, 1997.
24. Anderson P.V. *More is different* // Science. 1972. 177. P. 393 – 396.
25. Smith A. *An inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. Printed for W. Strahan and T. Cadell London, 1776.
26. Hoffman E. *Bibliography of Experimental Economics*. Tucson, Department of Economics University of Arizona, 1991.
27. Smith V.L. *The handbook of experimental economics* // Journal of Economic Literature. 1996. 34. P. 1950 – 1952.
28. Challet D., Chessa A., Marsili M., Zhang Y-C. *From minority games to real markets* // Quantitative Finance. 2001. 1(1). P. 168 – 176.
29. Challet D., Zhang Y-C. *Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game* // Physica A. 1997. 246. P. 407 – 418.
30. Challet D., Zhang Y-C. *On the minority game: Analytical and numerical studies* // Physica A. 1998. 256. P. 514 – 532.
31. Marsili M., Challet D., Zecchina R. *Preprint cond-mat/9904392*.
32. Bak P. *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. New York, Copernicus, 1996.
33. Per Bak, M. Paczuski, M. Shubik, *Price Variations in a Stock Market with Many Agents*, Working paper 96-05-078, Santa Fe Institute Economics Research Program, 1996.

34. Сорнетте Дидье. *Как предсказывать крахи финансовых рынков. Критические события в комплексных финансовых системах*. М.: Интернет-Трейдинг, 2003.
35. Kolmogorov A.N. // *J. Fluid Mech.* 1962. 13. P. 82 – 85.
36. Obukhov A.M. // *J. Fluid Mech.* 1962. 13. P. 77 – 81.
37. *Turbulent cascades in foreign exchange markets* / S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner, Y. Dodge // *Nature*. 1996. 381. P. 767 – 770.
38. Mandelbrot B.B. *The variation of certain speculative prices* // *J. Business*. 1963. 36. P. 394 – 419.
39. Lux T. *The stable Paretian hypothesis and the frequency of large returns: an examination of major German stocks* // *Appl. Fin. Econ.* 1996. 6. P. 463 – 475.
40. Liu Y. et al. *The statistical properties of the volatility of price fluctuations* // *Phys. Rev.* 1999. E 60. P. 1390 – 1400.
41. Guillaume D.M. et al. *From the bird's eye to the microscope: a survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets* // *Fin. Stochastics*. 1997. 1. P. 95 – 129.
42. Plerou V., Gopikrishnan P., Amaral L.A.N., Meyer M., Stanley H.E. *Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies* // *Phys. Rev.* 1999. E 60. P. 6519 – 6529.
43. Gopikrishnan P., Plerou V., Amaral L.A.N., Meyer M., Stanley H.E. *Scaling of the distributions of fluctuations of financial market indices* // *Phys. Rev.* 1999. E 60. P. 5305 – 5316.
44. Gopikrishnan P., Plerou V., Gabaix X., Stanley H.E. *Statistical properties of share volume traded in financial markets* // *Phys. Rev.* 2000. E 62. P. R4493 – R4496.
45. Plerou V., Gopikrishnan P., Amaral L.A.N., Gabaix X., Stanley H.E. *Economic fluctuations and anomalous diffusion* // *Phys. Rev.* 2000. E 62. P. R3023 – R3026.
46. Gabaix X., Gopikrishnan P., Plerou V., Stanley H.E. *A theory of power-law distributions in financial market fluctuations* // *Nature*. 2003. 423. P. 267 – 270.
47. Mantegna R.N., Stanley H.E. *Scaling behavior in the dynamics of an economic index* // *Nature*. 1995. 376. P. 46 – 49.
48. Mantegna R.N., Stanley H.E. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
49. Arthur W., Lane D., Durlauf S. (Ed.) *The economy as an evolving complex system II*, Redwood City, Addison-Wesley, 1997.
50. Arthur W.B., Holland J.H., LeBaron B., Palmer R., Taylor P. *Asset pricing under endogenous expectation in an artificial stock market* // *The Economy as an Evolving Complex System II*, Redwood City, Addison-Wesley, 1997.
51. Bouchaud J.-P., Cont R. *A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes* // *European Physics Journal*. 1998. B 6. P. 543 – 550.
52. Bouchaud J.-P., Potters M. *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 2000.
53. Lux T. *Herd behavior, bubbles and crashes* // *Economic Journal: The Journal of the Royal Economic Society*. 1995. 105. P. 881 – 896.
54. Lux T. *The socio-economic dynamics of speculative markets: Interacting agents, chaos, and the fat tails of return distributions* // *Journal of Economic Behavior & Organization*. 1998. 33. P. 143 – 165.

55. Lux T., Marchesi M. *Scaling and critically in a stochastic multi-agent model of a financial market* // Nature. 1999. 397. P. 498 – 500.
56. Lux T., Marchesi M. *Volatility clustering in financial markets: a microsimulation of interacting agents* // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2000. 3. P. 675 – 702.
57. Levy M., Levy H., Solomon S. *Microscopic simulation of the stock market – the effect of microscopic diversity* // Journal de Physique. 1995. I 5. P. 1087 – 1107.
58. Levy M., Levy H. and Solomon S. *The Microscopic Simulation of Financial Markets: From Investor Behavior to Market Phenomena*. San Diego: Academic Press, 2000.
59. Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman. San Francisco, 1982.
60. Александров П.С., Пасынков Б.А. *Введение в теорию размерности*. М.: Наука, 1973.
61. Hausdorff F. *Dimension und Ausseres Mass* // Mathematische Annalen. 1919. 79. P. 157 – 179.
62. Richardson L.F. *The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels* // General Systems Yearbook. 1961. 6. P. 139 – 187.
63. Feder J. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.
64. Mantegna R.N., Stanley H.E. *Turbulence and financial markets* // Nature. 1996. 383. P. 587 – 588.
65. Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. *The distribution of realized exchange rate volatility* // J. Amer. Statist. Assoc., forthcoming.
66. *An Introduction to High-Frequency Finance* / M.M. Dacorogna, R. Gencay, U.A. MGuller, R.B. Olsen, O.V. Pictet. San Diego: Academic Press, 2001.
67. Mandelbrot B. *The variation of some other speculative prices* // J. Bus. 1967. 40. P. 393 – 413.
68. Gencay R., Selcuk F., Whitcher B. *Scaling properties of foreign exchange volatility* // Physica. 2001. A 289. P. 249 – 266.
69. Falconer K.J. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
70. Kendall M.G. *The Analysis of Economic Time Series* / P.H. Cootner. Random Character of Stock Market Prices. Cambridge: The MIT Press, 1964.
71. Osborne M.F. *Brownian motion in the stock market* / P.H. Cootner Random Character of Stock Market Prices. Cambridge: The MIT Press, 1964.
72. Friedman B.M., Laibson D.I. *Economic Implications of Extraordinary Movements in Stock prices* // Brookings Papers on Economic Activity. 1989. 2.
73. Siller R.J. *Market Volatility*. Cambridge: The MIT Press, 1989.
74. Turner A.L., Weigel E.J. *An Analysis of Stock Market Volatility. Russell Research Commentaries*. Tacoma: Frank Russell Company, 1990.
75. Lo A., Mackinlay A.C. *Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification* // Test Review of Financial Studies. 1988. № 1.
76. *Possibility between earthquake and explosion seismogram differentiation by discrete stochastic non-Markov processes and local Hurst exponent analysis* / R. Yul-

- meteyev, F. Gafarov, P. Hanggi, R. Nigmatullin, S. Kayumov // Phys. Rev. 2001. E 64. P. 066132-1 – 0066132-13.
77. *Scale Invariance in the Nonstationarity of Human Heart Rate* / P. Bernaola-Galvan, P.Ch. Ivanov, L.A. Nunes Amaral, H.E. Stanley // Phys. Rev. Let. 2001. V. 87. № 16. P. 168105-1 – 168105-4.
78. Chen C., Deponte J.S., Fox M.D. *Fractal feature analysis in medical imaging* // IEEE Trans. Med. Imaging. 1989. 8. P. 133 – 142.
79. Бондаренко В.А., Дольников В.Л. *Фрактальное сжатие изображений по Барнсли-Слоан* // Автоматика и телемеханика. 1994. № 5. С. 12 – 20.
80. Dubovikov M.M., Starchenko N.S. *Variation index and its applications to analysis of fractal structures* // Sci. Almanac Gordon. 2003. № 1. P. 1 – 30.
81. Dubovikov M.M., Starchenko N.S., Dubovikov M.S. *Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series* // Physica. 2004. A 339. P. 591 – 608.
82. Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. *Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов* // Вестник РУДН. 2004. Т. 3. № 1. С. 81 – 95.