

Опубликовано на нашем сайте: 18 декабря 2002 г.

**Г. Г. Дмитриади Обзор моделей государственного долга. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

**Г. Г. Дмитриади**

**ОБЗОР МОДЕЛЕЙ ГОСУДАРСТВЕННОГО ДОЛГА**

Данная работа представляет собой обзор подходов к описанию и моделированию государственного и корпоративного долга. Рассмотрены работы, в которых содержится анализ рынка ГКО/ОФЗ в 1994-1998 гг., а также работы, посвященные различным моделям долговых обязательств: долг как внешний поток двухсекторной модели экономики России, долг как рациональная финансовая пирамида, как финансовая пирамида – игра Понци, как финансовая пирамида по С. В. Дубовскому.

В литературе имеется большое число работ, посвященных описанию и моделированию долговых обязательств, целям и политике их размещения.

Управление корпоративным и государственным долгом во многом аналогично, т.к. часто преследует одинаковые цели: финансирование бюджетного дефицита и поддержание ликвидности рынка долговых обязательств при минимальных затратах.

Данная статья представляет собой обзор работ, посвященных описанию рынка ГКО/ОФЗ в 1994-1998 гг. и моделированию государственных и корпоративных долговых обязательств. В начале описаны работы, представляющие собой анализ рынка ГКО/ОФЗ в исторической перспективе с использованием различных статистических моделей [1-3], затем – различные подходы моделирования долговых обязательств: государственный долг как внешний поток в двухсекторной модели российской экономики [4], долг как рациональная финансовая пирамида, представляющая собой временное отклонение цен от базовой стоимости активов [5], долг как финансовая пирамида в игре Понци между Организатором пирамиды и популяцией индивидов [6], долг как финансовая пирамида [7-8] по С. В. Дубовскому и развитие этой модели [9-12].

В данной статье при описании работ других авторов в соответствующих разделах имеются небольшие цитаты из исходного текста без явного указания на это.

**Политика размещения государственного долга и поведения рынка государственных облигаций в работе [1].** Работа [1] посвящена исследованию рынка государственных краткосрочных облигаций (ГКО). В ней описана политика размещения государственного долга в различные временные периоды, выделены факторы, определяющие изменение доходности ГКО. Основной целью работы является прогнозирование краткосрочных флуктуаций.

Авторы с самого начала отмечают, что в отличие от облигаций Казначейства США (US Treasury bills) российские ГКО никогда не являлись безрисковыми низкодоходными ценными бумагами. Соответственно их нельзя рассматривать с помощью методов, разработанных для анализа облигаций Казначейства США.

Под политикой размещения государственного долга в работе [1] понимается формулировка целей управления долгом, выбор финансовых инструментов, соответствующих этим целям, координация с политикой денежной эмиссии, а также планирование в согласии с бюджетными требованиями и создание программы размещения, включающей частоты, объемы и виды эмиссий. В международном понимании основной целью управления долгом должно быть покрытие государственных потребностей при минимизации стоимости обслуживания долга. Эта задача совпадает с проблемами управления пассивами любой организации.

Целью размещения российских ГКО было покрытие дефицита государственного бюджета в отсутствии денежной эмиссии (в соответствии с рекомендациями МВФ). Авторы выделяют 4 этапа этой политики:

1) становление и экспансия (1993-94 гг.). На этом этапе отрабатывается организационная структура рынка, увеличивается объем эмиссии, а уровень доходности выше, чем на рынке твердой валюты. К концу этого этапа удалось полностью покрыть бюджетный дефицит. Активы коммерческих банков преобразовались из валютной формы в ГКО. Темпы инфляции и роста валютного курса снизились. Основным фактором, определяющим доходность ГКО, была конкуренция с валютным рынком;

2) доминанция на внутреннем финансовом рынке (1995 г. – первая половина 1996 г.). Благодаря описанным выше явлениям на этом этапе Правительству удавалось покрывать бюджетный дефицит при более низком уровне доходности ГКО (80-100%) кроме марта-июля 1996 г., когда президентская компания потребовала резкого увеличения расходов и возросла политическая нестабильность. Рынок государственных облигаций стал доминирующим сектором внутреннего финансового рынка, доходность стала определяться интенсивностью эмиссии. Для инвестора представляла интерес лишь сравнительная доходность инвестиций в различные выпуски;

3) стабилизация и объединение с мировым рынком (вторая половина 1996-97 гг.). Этот этап характеризуется ужесточением финансовой политики Правительства и снижением политического риска. Это позволило обеспечить снижение доходности до 50% к концу 1996 г., а с присвоением приемлемого кредитного рейтинга России в конце 1996 г. позволило снизить доходность до 18-20% (при инфляции порядка 6%). Внутренние инвесторы отреагировали на это перемещением капитала на рынок корпоративных ценных бумаг, где спекулятивная доходность была гораздо выше. Изменилась политика ЦБР: ставка рефинансирования перестала быть запретительной и т.д. На этом этапе доходность ГКО стала зависеть от конкуренции не только с валютным рынком, но и с рынком корпоративных облигаций, а также от кредитной политики ЦБР и поведения мирового рынка.

4) дестабилизация после начала мирового финансового кризиса (октябрь 1997 г.) и крах рынка (июль-август 1998 г.). С началом мирового финансового кризиса иностранные инвесторы начали выводить капитал со всех развивающихся рынков, в числе которых оказалась и Россия. Отечественные инвесторы последовали этому примеру, но переместили довольно большой капитал на рынок ГКО. Котировки падали, ЦБР был вынужден повысить ставку рефинансирования. В итоге совместного влияния многих факторов пирамида ГКО оказалась неспособной к самофинансированию и потерпела крах.

Далее авторы описывают различные модели описания взаимосвязи между политикой размещения и доходностью. Наиболее удачной оказалась модель:

$$\log I_t = a_1 \log e_t + a_2 \log \frac{b_t}{M_t} + a_3 f_t + \varepsilon_t.$$

Здесь  $I_t$  – доходность,  $e_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$  – темп роста обменного курса,  $S_t$  – обменный курс,

$f_t$  – условная переменная, отличная от нуля только в периоды нестабильности (автор полагал, что  $f_t = 1$  в период март-июнь 1996 г. и в конце 1997 г., в остальные периоды  $f_t = 0$ ),  $\frac{b_t}{M_t}$  – отношение денежной эмиссии к денежной массе  $M_t$ ,  $\varepsilon_t$  – случайная ошибка.

В виду того, что для построения долгосрочного прогноза рынка необходимо построение модели социально-экономической системы в целом, авторы работы [1] ограничились среднесрочным прогнозированием на 1 месяц вперед, опираясь только на финансовую информацию. За основу используемых моделей приняты выявленные связи между доходностью операций на рынке ГКО и факторами, определяющими спрос и предложение на рынке. При этом учитывается инерционность рынка путем включения в модель значения доходности в предыдущий момент времени. Лучшая из полученных моделей имеет вид:

$$\log I_t = a_1 \log I_{t-1} + a_2 (f_t + 1) + a_3 \left[ \log \left( \frac{b}{M} \right) \right]_{t-1} + a_4 \log (e)_{t-1}.$$

Реальное поведение предсказывалось с помощью этой модели в пределах доверительного интервала вплоть до начала финансового кризиса.

Далее авторы исследовали доходность краткосрочных спекулятивных операций на рынке ГКО и валютном рынке, причем с помощью построенных ими алгоритмов оптимального поведения на рынке ценных бумаг они оценивали максимально достижимые доходности. В качестве основы была взята теория портфельных инвестиций в рискованные ценные бумаги. Под решающим правилом понимался алгоритм, позволяющий указать в момент времени  $t$  структуру инвестиционного портфеля  $x_t$  (вектор долей вложения в различные ценные бумаги) на основе имеющейся у инвестора информации  $y_t$ . При этом требуется найти

$$\max \left\{ m^T x + r_0 x_0 - \lambda x^T V x \mid I^T x + x_0 = 1 \right\},$$

где  $x_0$  и  $r_0$  – доля вложений в безрисковые ценные бумаги и их доходность,  $m$  – прогноз доходности рискованных ценных бумаг на момент принятия решения, матрица  $V$  определяется статистикой ошибок прогноза,  $\lambda$  – склонность к риску.

Временные последовательности данных по торгам ГКО слишком коротки, поэтому авторами предложена модель рядов срочности (РС). Каждый РС состоит из отрезков последовательностей различных исходных рядов, объединенных таким образом, что первый РС включает отрезки историй выпусков, наиболее далеких от погашения в любой момент времени  $t$ , второй РС – отрезки для выпусков, следующих за первым по дальности до погашения и т.д. Длительность РС примерно равна длительности истории рынка.

Перед построением схем прогноза авторы проверяют свойства гипотез стационарности, нормальности, некоррелированности для рядов срочности, составленным из показателей однодневных доходностей:

$$f_i(t) = r_i(t) = \frac{P_i(t+1) - P_i(t)}{P_i(t)} \approx \ln \frac{P_i(t+1)}{P_i(t)}.$$

Здесь  $P_i(t)$  – цена на торгах в день  $t$ . Исходный эмпирический материал соответствовал датам 18.05.1994-01.08.1997. В работе получено, что гауссовость, стационарность и некоррелированность не имеют места (несимметричное распределение с «толстыми хвостами»).

Далее приводится небольшой обзор различных параметрических и непараметрических моделей прогнозирования, они исследуются на имеющейся статистике. Получено, что важную роль в обеспечении точности прогнозирования играет выбор информационных факторов, а не только самих алгоритмов и что предварительное тестирование показывает преимущество алгоритмов, учитывающих негауссов характер флуктуаций. Наиболее практичными являются предикторы типа Laplace и NNM.

Построение решающего правила в работе распадается на два этапа: вычисление прогноза доходностей инвестиций на ближайший интервал и эмпирическая оценка ковариационной матрицы, а затем решение рассмотренной выше задачи Марковца нахождения оптимального портфеля. На первом этапе используется параметрическое прогнозирование. В результате получены следующие выводы:

1) В 1996 г. рынок ГКО играл доминирующую роль. Поэтому единственной проблемой был выбор между инвестициями в различные выпуски. Получено, что

- предложенные решающие правила позволяли организовать портфель ГКО с доходностью, превышающей среднерыночную на 60%;
- эффективность оказалась немонотонно чувствительной к выбору склонности к риску  $\lambda$ ;
- при  $\lambda \leq 1$  нелинейный предиктор NNM обеспечивает более высокую эффективность;

2) В 1996-1997 гг. резко увеличивается количество выпусков ГКО, а доходности подобных бумаг сближаются. Для этого периода авторы предлагают решающие правила только в агрегированной форме, т.е. касательно выбора групп облигаций, существенно различающихся по характеристикам. Получено, что:

- использование решающих правил позволяло систематически «переигрывать» рынок;
- решающие правила с использованием нелинейных предикторов обладают некоторыми, хотя и не очень существенными, преимуществами;
- чем выше надежность прогнозирования, тем более эффективными оказываются правила, рассчитываемые с более высоким уровнем риска;
- недиверсифицированный портфель с текущим использованием только одного актива (т.е. самый рискованный), прогнозируемый по схеме ближайших соседей, давал наилучшие результаты;

3) Для исследования периода нестабильности 1998 г. была использована методика, аналогичная примененной в предыдущем случае. Получено, что:

- даже простейший предиктор позволяет переиграть рынок;
- учет внешних факторов систематически дает сильный эффект, улучшая качество прогноза, а значит, и доходность;
- влияние уклонения от риска немонотонно и не слишком значительно; возможность включения валюты в портфель не давала положительного эффекта. Рекомендация вложения в валюту имеет место не более, чем в 10% дней и то, только в период 14-22.07.1997.

В качестве основных выводов работы [1] авторы приводят следующие:

- проводившаяся негибкая неэмиссионная политика, жестко связанная с покрытием дефицита бюджета, была обречена на провал;
- ввиду сырьевой структуры экспорта, которая не будет преодолена в течение как минимум 5-10 лет, имеется необходимость механизма регулирования импорта;
- в условиях открытой рыночной экономики регулирование импорта возможно лишь за счет регулирования обменного курса путем денежной эмиссии;
- рынок внутреннего долга должен быть лишен спекулятивного характера и т.д.

**Анализ развития рынка ГКО и взаимосвязи его с другими сегментами финансового рынка в работе [2].** Работа [2] посвящена исследованию рынка ГКО, игравшего исключительную роль, как для государства, так и для инвесторов в 1995–1998 годах, в период с мая 1996 года по октябрь 1997. В работе исследуется структура рынка ГКО и его связи с другими сегментами финансового рынка: валютным рынком, рынком межбанковских кредитов (МБК), рынком валютных фьючерсов, рынков фьючерсов на ГКО и рынком акций предприятий. В качестве меры интеграции двух рынков или двух сегментов одного и того же рынка авторы используют коэффициент корреляции однодневных доходностей и скорость выравнивания однодневных доходностей.

В начале работы приводится краткое описание статистической информации, используемой для вычислений, в том числе корзин акций различных отраслей.

Для того, чтобы получить ориентир для дальнейших исследований, в первом разделе авторы изучают связь между биржевым и внебиржевым сегментами валютного рынка, которая заведомо существует.

Вводятся обозначения:  $RMICEX(t) = \frac{MICEX(t)}{MICEX(t-1)} - 1$ ,

$RMB(t) = \frac{MB(t)}{MB(t-1)} - 1$  – однодневные доходности биржевого и внебиржевого рынка соответственно, а  $XT(t) = RMB(t) - RMICEX(t)$  – их разность. Получено, что коэффициент корреляции между однодневными доходностями двух рынков равен 0,59. Далее авторы рассматривают модель скорости выравнивания доходности. Она имеет вид:

$$XT(t) - XT(t-1) = -\mu XT(t-1) + u(t),$$

где параметр  $\mu$  – характеризует скорость выравнивания доходностей, а значит, и степень интеграции рынков. Результаты GARCH(1,1)-оценивания дают значение  $\mu = 1.36$  (остальные характеристики оценивания, например, стандартную ошибку или значение  $t$ -статистики, см. в тексте [2]). Далее аналогичным образом в этом обзоре приводятся значения только некоторых переменных). Использование модели распределенных лагов глубиной до трех банковских дней увеличивает меру интеграции до 1.47. Исследование волатильности разности однодневных доходностей рассматриваемых сегментов позволило выявить непродолжительные периоды его резкого роста, означающего нарушение обычной их связи. Это периоды 9 января 1997 г. и 28-29 октября 1997 г., когда наблюдается резкое повышение автономного (не связанного с перетоком в другие секторы российского финансового рынка) спроса на валюту, и периоды 21 августа 1996 г. и 11-24 марта 1997 г., характеризовавшиеся сменой тенденций в изменении доходности ГКО. Требуется специальное исследование содержательного механизма возмущений для каждого случая. Тест Гранжера на причинную зависимость приводит к выводу, что внебиржевой валютный рынок влияет на биржевой, а не наоборот, что можно также объяснить содержательно.

Далее авторы рассматривают обменные курсы рубля RBEX (ММББ), RBMB (межбанковский валютный рынок), DM (немецкая марка), BP (английский фунт), DMC (кросс-курс US-DM через US-BP-DM). Все курсы представлены в виде стоимости доллара США. Вычислены их попарные корреляции на интервале июль 1996 г. – октябрь 1997 г. Получено, что корреляция между двумя обменными курсами рубля и между курсом DM и кросс-курсом DM довольно велика и значительно выше корреляции между доходностями вложений в DM и BP. Связь же между курсами DM/US и DM/BP/US характеризуется корреляцией 0.78 и коэффициентом  $\mu = 1.52$  упоминаемой выше модели выравнивания однодневных доходностей, что примерно совпадает со значениями 1.36-1.47 для пары RBEX-RMEX. В обоих случаях мы имеем пары тесно взаимосвязанных рынков. Далее в работе получено, что график условного стандартного отклонения для рассматриваемого уравнения регрессии имеет три пика: 04.12.1996, 23.05.1997, соответствующих периодам проведения согласованных валютных интервенций центральными банками ряда стран для преодоления неблагоприятной динамики курса японской йены к доллару США, и 29-30.10.1997, соответствующий азиатскому финансовому кризису осени 1997 г. Тест Гранжера на причинную зависимость между рассмотренными обменными курсами на интервале июль 1996 г. – октябрь 1997 г. дает статистически достоверную независимость курса рубля и курсов DM и BP соответственно. То же верно и на длинном интервале апрель 1991 г. – октябрь 1997 г.

В следующем разделе авторы исследуют взаимосвязь двух других рынков: московского рынка однодневных рублевых кредитов (МБК) и внебиржевой рынок валюты USD. На первом рынке, т.к. подавляющее большинство кредитов являются однодневными, в качестве показателя берется ставка однодневных МБК, приведенная к годовому выражению  $R = 365r$ . Авторы приводят простые рассуждения, показывающие, что комбинация сделок «сегодня» и «завтра» на валютном рынке эквиваленты однодневному МБК. Соответственно разница в доходности этих двух операций должна давать участникам рынка возможность совершения арбитража. Исходя из имеющихся у авторов данных, в работе [2] получено, что имеется 40%-ое систематическое превышение доходности операций на рынке МБК над доходностями операций на валютном рынке. До 20% этой разницы можно объяснить наличием обязательного резервирования, которое снижает реальную ставку доходности МБК, а оставшуюся 20%-ную разницу авторы объясняют недостоверностью имеющихся данных. Тест Гранжера дает взаимосвязь обоих рынков. Далее рассматривается модель выравнивания доходностей:

$$\Delta X(t) = const - \mu X(t-1) + u_t,$$

где  $\Delta X(t) = X(t) - X(t-1)$ , а  $X(t) = MIBOR_t - MBTT_t$ .

Коэффициент  $\mu$  оценивается из модели как 0.88, что говорит о меньшей связи рынков, чем связь биржевого и внебиржевого сегментов валютного рынка. Получено, что со временем волатильность для возмущения  $u_t$  уменьшается, что говорит о стабилизации рынка и о том, что он становится более зрелым.

В работе далее рассматривается рынок ГКО-ОФЗ, разделяемый на сегменты краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных ГКО и ОФЗ. Результаты предыдущих разделов используются как точка отсчета для меры интеграции рынков. Авторами показано кардинальное видоизменение базовых характеристик рынка выпусков с погашением, начиная с января 1997 г., что соответствует периоду торгов примерно с июля 1996 года после президентских выборов. С этого момента прослеживается устойчивое снижение уровня однодневных доходностей, а также резкое снижение их волатильности. Последнее обстоятельство связано с институциональными изменениями рынка ГКО, а именно – с появлением в октябре 1996 г. института маркет-мейкеров и «уменьшением в правах» остальных инвесторов. Маркет-мейкеры – это около 40 крупнейших участников, наделенных как специальными правами, так и обязанностями по поддержанию двусторонних котировок ключевых выпусков облигаций с фиксированным спрэдом. Маркет-мейкер обязан поддержать в течение каждых торгов заявку на покупку и продажу не менее заранее предписанного объема по ключевым выпускам ГКО, причем спрэд между ценами заявки на покупку и продажу не должен превышать заранее заданного ограничения. Взамен маркет-мейкер имеет доступ к операциям РЕ-ПО, ломбардным кредитам ЦБР и др.

Получено, что в период после введения института маркет-мейкеров (ноябрь 1996 г.) рынок более стабилен (уменьшение стандартного отклонения и стоимости заимствований для Минфина РФ в 3-4 раза).

С использованием индексов РИНАКО ГКО и ОФЗ рассматриваются степени зависимости между различными сегментами рынка государственных ценных бумаг. Получено, что однодневные доходности краткосрочных (одномесечных) ГКО высоко коррелированы с трехмесячными (0.74), в меньшей степени - с долгосрочными (0.45), значительно меньше – с ОФЗ (0.17). Авторы объясняют это явление различными инвестиционными свойствами перечисленных бумаг. Коэффициент  $\mu$  модели выравнивания доходностей оценивается как 0.7-0.8.

Затем исследуются связи рынка ГКО и срочного валютного рынка. Это связано с тем, что доля иностранных инвесторов в период октябрь 1996 г. – сентябрь 1997 г. на рынке ГКО была относительно высокой (18-30%). Кроме того, некоторые российские инвесторы фиксировали свою прибыль в иностранной валюте. Согласно правилам работы на рынке иностранных инвесторов, они могли использовать одну из нескольких схем своей работы на рынке, например, покупая ГКО, они одновременно заключали форвардный контракт на покупку валюты. Исходя из подобных соображений, авторы теоретически показывают наличие отрицательной взаимосвязи между рассматриваемыми рынками.

Исследуется связь между однодневными «доходностями» одного форвардного контракта и отдельного выпуска ГКО. Получено, что корреляция самого форвардного контракта с ГКО незначительна, большее значение имеет разность между ценой валютного форвардного контракта и спот-курсом  $F - MB$ . Корреляция отрицательная, как и предсказывалось. Нет существенного различия между различными выпусками ГКО и индексом ГКО, что говорит о зрелости рынка и о том, что иностранные инвесторы предпочитают вкладываться в портфель из различных выпусков ГКО. Тестирование гипотезы о выравнивании однодневных доходностей дает 0.33, что немного по сравнению с полученными ранее аналогичными показателями. Использование более адекватной модели, содержащей разность однодневных доходностей трехмесячных форвардных контрактов и текущего биржевого курса, дает 0.50. График волатильности ошибки этой модели имеет выбросы в точках:

13, 26 марта 1996 г. – резкое увеличение доходности ГКО под влиянием экстраординарного роста потребности в нетто-заимствованиях со стороны Минфина;

20 мая, 18 июня 1996 г. – дестабилизация рынка ГКО в связи с приближением президентских выборов;

30 сентября 1996 г. – повышательная корректировка процентных ставок на рынке ГКО после их стремительного падения под влиянием положительного исхода президентских выборов.

В работе содержится оценка доли числа инвесторов, использующих валютные форварды одновременно с покупкой ГКО: 0.30-0.36.

Отдельный раздел работы [2] посвящен изучению связи между рынком ГКО и рынком фьючерсов на ГКО. С помощью статистической проверки предложенной модели авторы получают, что на ММВБ и на МЦФБ (основные торговые площадки фьючерсами) имеет место статистически достоверно отличающаяся от нуля премия за риск, различная для каждой из площадок (даются качественные объяснения этой разницы) и существенно меняющаяся во времени. Объемы торговли фьючерсами резко убывают к октябрю 1997 г., что связано с переходом основным участникам рынка на рынок контрактов на цены наиболее ликвидных российских акций.

Далее авторы рассматривают связь рынка корпоративных бумаг и рынка ГКО. С помощью теста Гранжера получено, что индекс Доу-Джонса влияет на индексы РТС, FAZ (Германия) и FTSE (Великобритания), кроме того, FAZ и FTSE влияют на РТС. Изучается связь индексов нефтегазовой, телекоммуникационной, энергетической отраслей, голубых фишек и др. для России, США, Германии, Великобритании.

С помощью тестов Гранжера получена зависимость различных российских рынков. Учитывая все эти связи, получено, что:

Рынок ГКО  $\Leftrightarrow$  Рынок валюты  $\Rightarrow$  Рынок акций.

Авторы изучают связь рынка ГКО и рынка корпоративных ценных бумаг. В качестве индекса первого рынка используется индекс А. Ивантера GKOIVAN (индекс рассчитывается как взвешенное среднее котировок отдельных выпусков ГКО с весами, соответствующими текущим долям капитализации этих выпусков в суммарной капитализации рынка), а в качестве второго – индекс голубых фишек BLCP, рассчитанных как взвешенное среднее акций PAO «ЕЭС России», НК «Лукойл», «Мосэнерго», «Сургутнефтегаза», «Ростелекома», «Норильского никеля». Рассматривается модель выравнивания доходностей:

$$DX(t) = const + \mu X(t-1) + e_t,$$

где  $X(t)$  – разность однодневных доходностей рынков:

$$X(t) = \ln \frac{BLCP(t)}{BLCP(t-1)} - \ln \frac{GKOIVAN(t)}{GKOIVAN(t-1)}.$$

Оценивание GARCH(1,1) этой модели на интервале 10 октября 1996 г. – 10 октября 1997 г. дает значение «скорости выравнивания доходностей»  $\mu = 0.77$ , что меньше значения 0.88, полученного как мера интеграции рынков МБК и валютного с рассмотрением контрактов «сегодня» и «завтра». Для рассмотрения динамики коэффициента  $\mu$  рассмотрена скользящая регрессия с шириной окна 30 наблюдений. Стандартное отклонение ошибки имеет пик 08.07.1996 (президентские выборы) и резко убывает в августе 1996 г., после чего достаточно стабильна. Использование метода наименьших квадратов с шириной окна 100 наблюдений позволило получить график  $\mu$ . На нем имеются скачки 23.10.1996 и 29.11.1996–05.12.1996, предположительно связанные с началом масштабных операций по торговле фьючерсами на ряд высоколиквидных акций на ММВБ. Ослабление связи двух рынков наблюдается в конце 1996 г. – начале 1997. Резкий скачок  $\mu$  в октябре 1997 г. связан с азиатским финансовым кризисом.

Основной вывод, полученный в работе, состоит в том, что получено наличие взаимосвязи (как описано выше) рынка ГКО и рынка корпоративных ценных бумаг, что означает, что ЦБР не может снизить доходность ГКО, т.е. стоимость заимствований для Минфина РФ, ниже, чем доходность на рынке акций. Также авторами найдена премия за риск на рынке ГКО.

**Анализ динамики процентных ставок и цены внутренних заимствований в работе [3].** Работа [3] посвящена качественному описанию истории рынка ГКО/ОФЗ и созданию модели, связывающей процентные ставки по ГКО/ОФЗ, по валютным ценным бумагам, ставкой рефинансирования ЦБР, курсовыми ожиданиями и другими переменными.

Для создания модели авторами использовалась статистика пяти широких категорий: макроэкономика, денежная сфера, бюджет, российские финансовые рынки, мировые финансовые рынки, – относящаяся к периоду с июля 1994 г. по декабрь 1997 г. Большая часть статистического анализа проводилась на месячной основе.

В работе выделены 8 периодов существования рынка ГКО/ОФЗ, на каждом из которых выделены основные экономические и политические события, а также описана политика российского Правительства:

1) период июнь-сентябрь 1994 г. характеризуется отрицательными реальными процентными ставками рынка ГКО. Рост обменного курса отставал от инфляции;

2) на период с октября 1994 г. по май 1995 г. приходится т.н. «черный вторник». Это событие может рассматриваться как повод для коррекции рынка, т.к. после него доходность рынка ГКО выросла до 300% и стала положительной в реальном выражении. Центральный банк согласно но-

вому закону перестал финансировать дефицит бюджета, и рост инфляции и обменного курса замедлился;

3) в период июнь-октябрь 1995 г. был введен т.н. «валютный коридор», приведший к стабилизации валютного курса. В августе-сентябре произошел временный взлет процентных ставок по ГКО, вызванный банковским кризисом этого периода;

4) ноябрь-декабрь 1995 г. – это единственный период, когда ставки первичных и вторичных торгов существенно отличались (130 и 200%). Это можно объяснить тем, что первичные торги жестко контролировались ЦБ и Правительством, а на вторичных сказывалась неопределенность исхода парламентских выборов;

5) в январе-марте 1996 г. наступила некоторая стабилизация как результат жесткой денежной политики, ставки снизились до 70%. На рынке ГКО/ОФЗ наблюдался значительный прирост капитала;

6) в апреле-июне 1996 г. происходила президентская компания. В виду неординарных потребностей Минфина в финансировании для выполнения обещаний президента и игре на итог президентских выборов (в т.ч. крупными иностранными фондами), доходность ГКО резко возросла и достигла пика в 258%;

7) на довольно длинном периоде с июля 1996 г. по октябрь 1997 г. наконец-то была достигнута финансовая стабилизация. Имело место улучшение макроэкономической ситуации, что привело к низкой инфляции и низким ожиданиям роста обменного курса. На российском рынке в этот период имелось довольно большое число нерезидентов, для которых был существенно облегчен доступ на рынок. В октябре 1996 г. России был присвоен кредитный рейтинг, затем имели место первые выпуски еврооблигаций. В результате доходность ГКО резко снизилась до 16-17% и сохранялась на таком уровне;

8) период с ноября 1997 г. по май 1998 г. В результате азиатского финансового кризиса увеличилась нестабильность на всех развивающихся рынках, в том числе и на российском. Иностранные инвесторы стали уходить с рынка, ставки росли на всех рынках, Центробанк был вынужден менять ставку рефинансирования вслед за колебаниями ставки по ГКО. В этом периоде наблюдались неоднократные колебания последней, связанные с различными экономическими и политическими факторами (например, процентные ставки подскочили до 35-40% в январе 1998 г. из-за спекулятивной атаки на рубль; также их рост имел место после отставки Правительства и т.д.).

В качестве базовой модели в работе [3] используется модель Г. Делькастильо и Д. Джутнера:

$$i_t = \psi \theta (ic_t + \delta_t^e) + \psi (1 - \theta) i_{t-1} + (1 - \psi) (r_t + \pi_t^e),$$

$$\delta_t^e = \delta (CA_t, IR_t, M_t, \pi_t^e, \delta_t^a, X_t),$$

$$r_t = r \left( \frac{M_t}{P_t}, BD_t, T_t, Y_t \right),$$

$$\pi_t^e = \pi (M_t, W_t, \pi_{t-1}, \pi_t^a, \delta_t^e, Z_t).$$

Здесь  $i_t$  – номинальная ставка процента,  $ic_t$  – процентная ставка по ценным бумагам, номинированным в иностранной валюте,  $\delta_t^e$  – ожидаемое изменение обменного курса национальной валюты,  $r_t$  – реальная ставка процента,  $\pi_t^e$  – ожидаемая инфляция,  $CA_t$  – дефицит/профицит платежного баланса,  $IR_t$  – официальные международные резервы,  $BD_t$  – бюджетный дефицит,  $M_t$  – рост денежной массы,  $\delta_t^a$  и  $\pi_t^a$  – объявленные правительством показатели изменения обменного курса и инфляции соответственно,  $P_t$  – уровень цен,  $T_t$  – общая эффективная налоговая ставка,  $W_t$  – рост зарплаты,  $X_t$ ,  $Y_t$ ,  $Z_t$  – прочие факторы,  $\psi$  – параметр, отражающий степень интегрированности национальной экономики в мировую,  $\theta$  – параметр, характеризующий степень интегрированности финансовых рынков.

В этой модели считается, что, чем выше степень интегрированности национальной экономики и чем более эффективен внутренний рынок, тем быстрее процентные ставки достигают уровня, соответствующего паритету. Если экономика довольно замкнута, а рынок малоэффективен, то из модели следует большая инерционность в изменении процентных ставок и ведущая роль внутренних факторов в их формировании.



Проведя исследование базовой модели, авторы внесли в нее некоторые изменения. Например, сумма  $r_t + \pi_t^e$  была заменена на внутреннюю номинальную процентную ставку  $R_t$ , в качестве которой, как было показано [3], лучше всего подходит ставка рефинансирования ЦБР. Далее, авторами была проведена математически эквивалентная замена параметров  $\psi$ ,  $\theta$  на параметры  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  по формулам:

$$\theta = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}, \quad \psi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

причем  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1$ , которая позволяет перейти к линейной модели, т.к. первое уравнение после замены записывается как:

$$i_t = \varphi_1 (ic_t + \delta_t^e) + \varphi_2 i_{t-1} + \varphi_3 R_t.$$

Уточнив смысл переменных исходя из имеющейся российской статистики, авторы получают следующую модель, имеющую форму одновременных уравнений:

$$i_t = \varphi_1 (ic_t + \delta_t^e) + \varphi_2 i_{t-1} + \varphi_3 R_t + c_{13} D1 + c_{14} D2 + c_{15} D3,$$

$$R_t = r(R_{t-1}, i_t(i_{t-1}), \pi_t^a, \delta_t^a, MS_t, B_t),$$

$$ic_t = T_t + s(ic_{t-1}, R_t, \pi_t^a, \delta_t^a, IR_t),$$

$$\delta_t^e = \delta(MS_t, \pi_t^a, \delta_t^a, \delta_t^e, IR_t).$$

Здесь  $D1$ ,  $D2$ ,  $D3$  – сезонные переменные, позволяющие учесть эффект выборов:  $D1 = 1$  только в марте-апреле 1996 г.,  $D2 = 1$  только в июне 1996 г.,  $D3 = 1$  только в июле 1996 г. (в остальных случаях  $D1 = D2 = D3 = 0$ ),  $MS_t$  – показатель уровня предложения денег,  $B_t$  – показатель фактического или потенциального масштаба заимствований на финансовых рынках (какие именно статистически вычисляемые переменные были использованы в качестве этих показателей – см. в тексте [3]),  $r$ ,  $s$ ,  $d$  – линейные функции. При этом для параметров  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  использовались следующие варианты: постоянные параметры, и параметры, зависящие от времени как  $a + bt$ ,  $a + b \ln t$ ,  $a + \frac{b}{t}$ .

Период наблюдения составлял 28 месяцев (с июля 1995 г. по октябрь 1997 г.). Для этого периода тест Дики-Фуллера позволил отвергнуть гипотезу о нестационарности для всех эндогенных переменных. Проведя подробный статистический анализ, авторы получили, что наилучшая модель имеет вид следующей системы совместных уравнений:

$$i_t = c_{11} \ln t (ic_t + \delta_t^e) + c_{12} i_{t-1} + (1 - c_{11} \ln t - c_{12}) RCBR_t + c_{13} D1 + c_{14} D2 + c_{15} D3,$$

$$RCBR_t = c_{21} RCBR_{t-1} + c_{22} i_t + c_{23} \pi_t^a + c_{24} \delta_t^a + c_{25} borr_t,$$

$$ic_t = T_t + c_{31} ic_{t-1} + c_{32} RCBR_t,$$

$$\delta_t^e = c_{41} \delta_{t-1}^e + c_{42} \pi_t^a + c_{43} IR_t,$$

где  $borr$  – объем размещения ГКО/ОФЗ в неизменных ценах (т.е. дефлированный по индексу потребительских цен),  $RCBR$  – ставка рефинансирования Центрального банка России,  $IR$  – объем его золотовалютных резервов.

В работе приведены подробные данные оценки каждого из уравнений системы. При оценке коэффициентов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  было получено, что наилучшая оценка имеет место для при использовании возрастающего со снижающейся скоростью коэффициента «рыночной интегрированности»  $\varphi_1$ , постоянного «коэффициента инерционности»  $\varphi_2$ , и, соответственно, убывающего коэффициента «макроэкономической зависимости»  $\varphi_3$ . Получено, что степень инерционности оставалась неизменной на уровне 79%. Интегрированность рынка росла от нуля в июле 1995 г. до 23% в октябре 1997 г. (что соответствует росту числа нерезидентов на российском рынке), а макроэкономическая зависимость падала с 21% в начале периода до нуля в апреле 1997 г., а затем даже стала немного отрицательной. Эффективность рынка (в терминах базовой модели) возросла с 79% до более, чем 100%.

Полученная модель была проверена на имеющейся статистике ex post на данных с июля 1995 г. по октябрь 1997 г. Оказалось, что неучет изменчивости параметров  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  дает результаты, сильно отличающиеся от фактических (117,2% вместо 17,5% в октябре 1997 г.). Можно сказать, что при фиксированной интеграции снижение процентной ставки с октября 1995 г. до октября 1997 г. составила бы только  $\frac{1}{3}$  от фактического снижения, а увеличение интеграции рынка объясняет оставшиеся две трети. Также получено, что базовая ставка  $R$  начиная с середины 1997 г. не оказывала влияние на влияние на ГКО/ОФЗ, т.к. фактор  $\varphi_3$  снижается до нуля. Таким образом, Россия превратилась в этот период в «маленькую открытую экономику». В целом получено, что описанная модель вполне удовлетворительно описывает динамику процентных ставок в период до мирового финансового кризиса, однако не обеспечивает адекватных результатов после его начала. Основными причинами неудовлетворительности прогнозов модели является невозможность учесть ряд важных макроэкономических факторов в уравнениях ожидаемого изменения обменного курса, глобальные изменения инвестиционного климата, а также изменение отношения участников рынка к объявленным макроэкономическим ориентирам вследствие потери доверия к политике денежных властей.

Также в работе [3] предложена и рассмотрена модель прогнозирования показателей внутреннего долга, построенная на основе уже полученной. Например, получено, что рост долга во втором полугодии 1998 г. оценивался в 13.1%.

Основным выводом работы является следующий: снижение ставки рефинансирования должно быть более последовательным по сравнению с имевшим место. Ее сокращение должно иметь место только после длительного периода времени падения доходности по ГКО.

**Моделирование государственного долга как внешнего потока в двухсекторной модели экономики в работе [4].** Работа [4] посвящена различным, в том числе приближенным, методами решения макроэкономической модели экономики России с целью минимизации ее долговых обязательств в заданный будущий момент времени.

В основе работы лежит открытая двухсекторная модель экономики на временном интервале  $[0, T]$ , все переменные которой неотрицательны и нормированы на одного работника. Первый сектор производит сырье и продукцию первичной переработки, а второй – продукцию конечного потребления (потребительские товары и фондообразующую продукцию для обоих секторов). Под открытостью экономики подразумевается наличие обмена продукцией и денежными потоками с окружающим миром.

Считается, что производственная функция каждого сектора имеет постоянную отдачу от масштаба производства. Связь между фондовооруженностью труда  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , каждого сектора и его производительностью  $y_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , определяется как заданная функция:

$$y_i = f_i(x_i), \quad i = 1, 2,$$

где производственные функции  $f_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяют условиям:

$$f_i'(x_i) > 0, \quad f_i''(x_i) < 0, \quad i = 1, 2.$$

Динамика фондовооруженности описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = -\mu_1 x_1 + u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\mu_2 x_2 + u_3 + u_4.$$

Здесь  $\mu_{1,2}$  – коэффициенты амортизации,

$u_1$  – поток внешних инвестиций в первый сектор,

$u_3$  – поток внешних инвестиций во второй сектор,

$u_2$  – поток фондообразующей продукции из второго сектора в первый,

$u_4$  – поток фондообразующей продукции второго сектора, направленный на собственное развитие.

Баланс продукции в обоих секторах описывается следующими уравнениями. Для первого сектора:

$$f_1(x_1) = e(t) + \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_2).$$

Под  $e(t)$  здесь понимается поток экспорта первого сектора, а под  $\alpha_i f_i(x_i)$  – потребление продукции первого сектора в соответствующих отраслях ( $i = 1, 2$ ).

Для второго сектора:

$$f_2(x_2) = u_2 + u_4 + c_2(t),$$

где  $c_2(t)$  – поток продукции, направляемый на неинвестиционное потребление.

Через  $x_3(t)$  обозначена динамика внешнего долга. Тогда, считая, что ее определяют потоки экспорта и импорта, авторы получают:

$$\dot{x}_3 = \mu_3 x_3 + u_1 + u_3 + u_5 - v e_1(t).$$

Здесь коэффициент  $\mu_3$  отражает необходимость обслуживания внешнего долга,  $u_5(t)$  – поток импорта потребительских товаров, а коэффициент  $V$  отражает соотношение внешних и внутренних цен.

В работе, кроме того, предполагается, что поток потребления не может быть меньше некоторого минимального значения:

$$u_5 + c_2(t) \geq c_{\min}, \quad t \in [0, T],$$

а уровень фондовооруженности во втором секторе не должен падать ниже критического уровня:

$$x_2(t) \geq x_{2\min}, \quad t \in [0, T].$$

Внешний долг, в свою очередь, должен быть ограничен неким максимумом:

$$x_3(t) \leq x_{3\min}, \quad t \in [0, T].$$

Начальное состояние системы известно (задано):

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = x_{30}.$$

Основной задачей работы [4] является поставленная задача оптимального управления с фазовыми переменными  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  и управлениями  $\{u_i(t)\}_{i=1}^5$ , системой, фазовыми ограничениями, начальными значениями, описанными выше, критерием:

$$x_3(T) \rightarrow \min -$$

и заданными краевыми условиями:

$$x_1(T) = x_{11}, \quad x_2(T) = x_{21}.$$

Работа [4] представляет собой изложение приближенных и численных методов решения поставленной задачи и результатов их применения.

Для приближенного решения задачи авторы сразу вводят упрощающее предположение:

$$f_1(x_1) = \beta_1 x_1, \quad x_1(t) \leq a_1, \quad c_2(t) = c_2,$$

$$f_2(x_2) = \beta_2 x_2, \quad x_2(t) \leq a_2, \quad \text{где } \beta_1, \beta_2, a_1, a_2, c_2 - \text{константы.}$$

В итоге возникает следующая задача. Система имеет вид:

$$\dot{x}_1 = -\mu_1 x_1 + u_1 + u_2, \quad \gamma_1 = v\beta_1,$$

$$\dot{x}_2 = -\mu_2 x_2 + u_3 + u_4, \quad \gamma_2 = v\beta_2,$$

$$\dot{x}_3 = \mu_3 x_3 + u_1 + u_3 + u_5 - \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2.$$

Фазовые ограничения типа неравенств:

$$x_1(t) \geq 0, \quad x_1(t) \leq a_1, \quad x_{2\min} \leq x_2(t) \leq a_2, \quad x_3(t) \geq 0, \quad x_3(t) \leq x_{3\min}.$$

Смешанное ограничение типа равенства:

$$u_2(t) + u_4(t) = \beta_2 x_2(t) - c_2.$$

Ограничения на управление типа неравенств:

$$0 \leq u_i(t) \leq u_{i1}, \quad i = \overline{1, 5}, \quad u_5(t) \geq c_{\min} - c_2.$$

Начальные и краевые условия:

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = x_{30}, \quad x_1(T) = x_{11}, \quad x_2(T) = x_{21}.$$

Требуется определить минимум  $x_3(T)$ .

Сначала авторы решают полученную задачу без учета фазовых ограничений с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина как задачу со свободным правым концом и находят струк-

туру управления, соответствующую оптимальному решению. В следующем разделе получено соответствующее решение основной системы.

Согласно утверждению авторов решения системы неустойчивы относительно параметров при малых  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Поэтому они решают задачу в случае  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ , при этом не учитывая часть ограничений задачи.

Далее авторы отмечают, что согласно принципу максимума решение исходной задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи. Поэтому два следующих раздела работы [4] посвящены описанию метода продолжения решений по параметру.

В работе [4] также описываются вычислительные эксперименты по решению поставленной задачи с фазовыми ограничениями, но без учета смешанного ограничения. В результате преобразований к системе получилась задача линейного программирования (ЛП) большой размерности, которая решалась стандартными путями.

**Рациональные финансовые пирамиды и критерии их обнаружения в работе [5].** Работа [5] посвящена изучению вопроса о том, что такое финансовые пирамиды (bubbles), могут ли они существовать, какие формы могут принимать в случае рационального поведения всех участников рынка, а также с помощью каких тестов можно их обнаружить.

Не давая определения финансовой пирамиды, авторы упоминают, что под ними «обычно подразумевают изменения цены, необъяснимые очевидным образом доступной на текущий момент информацией и имеющие вид быстрого роста с последующим крахом или хотя бы резким упадком» (перевод Г. Г. Димитриади).

В работе подразумевается наличие эффективного рынка, а также делается довольно сильное предположение о том, что все участники рынка после «объявления» цен имеют одну и ту же информацию. Доходность владения активом есть:

$$R_t = \frac{p_{t+1} - p_t + x_t}{p_t}.$$

Здесь  $p$  – цена актива,  $x_t$  – доход от актива в момент времени  $t$ , называемый авторами «дивидендом». В работе полагается, что

$$E(R_t | \Omega_t) = r,$$

где  $r$  – заданная постоянная величина, а  $\Omega_t$  – информация, доступная всем участникам рынка в момент времени  $t$ .

Перепишав это соотношение как

$$E(p_{t+1} | \Omega_t) - p_t + x_t = rp_t,$$

авторы показывают, что ему удовлетворяет как базовая стоимость актива (fundamental), определяемая по формуле:

$$p_t^* = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^{i+1} E(x_{t+i} | \Omega_t), \text{ где } \theta = (1+r)^{-1} < 1, -$$

так и любая другая вида:

$$p_t = p_t^* + c_t, \text{ где } E(c_{t+1} | \Omega_t) = \theta^{-1} c_t.$$

Далее в [5] приводятся три примера таких  $c_t$ , представляющих собой финансовые пирамиды согласно введенному выше определению:

1) нереализуемый на практике случай детерминированного бесконечного роста  $c_t = c_0 \theta^{-t}$ ;

2)  $c_t$  задается в следующем виде:

$$c_t = \begin{cases} (\pi\theta)^{-1} c_{t-1} + \mu_t & \text{с вер. } \pi \\ \mu_t & \text{с вер. } 1 - \pi \end{cases}, \text{ где } E(\mu_t | \Omega_{t-1}) = 0.$$

Эта финансовая пирамида существует в каждом периоде с вероятностью  $\pi$  или терпит крах с вероятностью  $1 - \pi$ . Среднее время жизни пирамиды равно  $(1 - \pi)^{-1}$ . Возможны различные вариации этого примера;

3) в третьем примере рынок предполагается связанным с войной. Каждый период, когда война продолжается, дивиденд составляет 1, иначе – 0. Каждый период война продолжается веро-

яностью  $\pi$  или заканчивается (навсегда) с вероятностью  $1 - \pi$ . Базовая стоимость актива здесь постоянна в течение всей войны:

$$p_t^* = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^{i+1} E(x_{t+i} | \Omega_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^{i+1} \pi^i = \theta(1 - \theta\pi)^{-1}.$$

Отклонение от базовой стоимости может иметь вид, например:

$$c_t = c_0, \\ c_{t+i} = \begin{cases} (\pi\theta)^{-1} c_{t+i-1}, & \text{если идет война в период } t+i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Этот пример интересен тем, что после окончания войны происходит «крах» не только финансовой пирамиды  $c_t$ , но и базовой стоимости.

Дав определение и приведя примеры финансовых пирамид, авторы останавливаются на более сложных вопросах. Например, они получают, что могут существовать финансовые пирамиды в индивидуальном восприятии конкретных участников рынка, если отбросить предположение об одинаковой всеобщей информации, т.к. в этом случае базовые стоимости актива различны с точки зрения различных лиц.

Далее показано, что финансовые пирамиды не могут существовать в случае, если имеются только бесконечно долго живущие участники рынка. Также авторы утверждают, что пирамиды более вероятны на рынках со сложно определяемыми базовыми стоимостями активов, например, на рынке золота, и что пирамиды менее вероятны на рынках с достаточно просто определяемыми базовыми стоимостями активов, например, на рынке пожизненных рент.

В следующем разделе затрагивается вопрос о влиянии финансовых пирамид на базовую стоимость рассматриваемого актива. Одно из приведенных рассуждений таково. Рассмотрим рынок жилищного строительства. Он состоит из двух компонент: земли и инфраструктуры. На хорошо развитом рынке в стабильном состоянии цена домов равна приведенной к текущему моменту стоимости (NPV) «жилищных услуг» (ренты). Предположим, что на рассматриваемом рынке имеет место детерминированная финансовая пирамида, т.е. участники рынка готовы платить цены, превышающие базовые стоимости. Более высокие цены влекут большую доходность жилищного строительства, больший рынок в будущем, и, если предполагать неизменным спрос на жилье, меньшие ренты в будущем. Но меньшие ренты означают меньшее приведенное к текущему моменту значение рент, т.е. меньшую базовую стоимость активов. Здесь важно отметить, что наличие финансовой пирамиды влечет за собой изменение базовой стоимости-актива. Поскольку рациональные финансовые пирамиды должны расти экспоненциально, то с течением времени все вышесказанное приведет к большему и большему рынку жилищного строительства и ко все меньшим и меньшим рентам. Это соответственно означает все меньшие и меньшие базовые стоимости. Расширение жилищного строительства может иметь место, пока имеется земля; дальнейший рост цен будет выражен в росте цене на землю. После краха финансовой пирамиды цены окажутся ниже первоначальных из-за сильно раздутого рынка. Аналогичные рассуждения возможно провести и во многих других случаях.

Кроме того, в работе показано, что финансовая пирамида относительно одного актива может привести к изменению (уменьшению) цен на многие другие, т.е. воздействовать на другие рынки. По мнению авторов существуют модели всеобщего равновесия с присутствием финансовых пирамид на рынке только одного актива.

Последняя часть работы [5] посвящена разработке тестов для обнаружения финансовых пирамид по статистическим данным. Поскольку описать все финансовые пирамиды не представляется возможным, авторы в качестве нулевой гипотезы используют гипотезу об отсутствии финансовых пирамид.

Сначала, считая известными цены  $p$  и дивиденды  $x$ , были получены границы изменения дисперсий для рациональных пирамид и было показано их нарушение на реальной статистике. Однако это нарушение может быть вызвано, например, иррациональностью поведения участников рынка и т.д., поэтому нельзя ничего точно сказать о наличии пирамид в рассматриваемом случае.

Например, было получено, что при нулевой гипотезе связь  $p$  и  $x$  такова, что «взвешенная сумма корреляций  $p$  и  $x$ , помноженная на отношение стандартных отклонений  $x$  и  $p$ , равна единице»:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_p} \sum_{i=0}^{\infty} \theta^{i+1} \rho(p_t, x_{t+i}) = 1.$$

Через  $\rho$  здесь обозначена корреляция. Для рассматриваемого авторами примера из этой формулы получаем

$$\bar{V}_u(p) = 2512,$$

а из реальной статистики:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta^{i+1} \rho(p_i, x_{i+1}) = 176.10.$$

То, что последняя величина много меньше первой, означает строгое отрицание нулевой гипотезы.

Затем были предложены и использованы на статистике тесты в случае, если известны только цены  $p$ : критерий серий и критерий хвостов распределений. Результаты их применения дают наличие финансовых пирамид на рынке золота. Однако эти критерии имеют еще меньшую силу, чем упомянутые ранее.

**Финансовые пирамиды как игры Понци в работе [6].** В начале работы авторы определяют финансовую пирамиду как частную компанию, которая привлекает депозиты частных лиц, обещая невероятно высокие проценты, многократно превышающие рыночные ставки. Какое-то время фирма поддерживает репутацию и выполняет собственные обязательства, но затем оказывается банкротом.

В работе неоднократно отмечается, что исследование феномена финансовых пирамид необходимо потому, что их участниками и вкладчиками были миллионы людей во многих странах бывшего СССР и Восточной Европы, прибыль участников пирамид составила миллиарды долларов, а крах пирамид имел многочисленные социальные последствия (например, имела место даже революция в Албании в середине 1990-ых годов).

В тоже время существование финансовых пирамид нельзя объяснить с точки зрения рационального поведения индивидов. Различные авторы часто используют различные модели, связанные с нарушением рациональности, для объяснения этого явления. В работе [6] используется игровой подход.

Все множество реальных и потенциальных вкладчиков делится авторами на две больших группы: наивных и мудрствующих индивидов. Мудрствующие индивиды знают, что пирамида в конце концов обречена, но уверены также в том, что сумеют так вкладывать в финансовую пирамиду, что это принесет им прибыль. Они субстанционально рациональны, т.е. максимизируют свою прибыль на основе всей имеющейся у них информации и текущих предпочтений. Их предпочтения, естественным образом, меняются со временем. В отличие от них наивные вкладчики не понимают, в какую игру они играют, и инвестируют потому, что так сделали до них другие и оказались в выигрыше. Считается, что количество инвесторов среди наивных индивидов в основном возрастает пропорционально числу встреченных ими удачливых вкладчиков в пирамиду. Финансовая пирамида моделируется как стохастическая игра (в смысле теории игр) с неполной информацией между фирмой Понци и популяцией индивидуальных инвесторов двух описанных типов.

Формально стохастическая игра Понци – это последовательность  $\gamma_t, t \in \mathbb{N}$ , в дискретном времени, где каждая из  $\gamma_t \in \{\Gamma_1, K, \Gamma_s, K, \Gamma_s\}$  есть одна из конечного набора возможных игр, выбор которой в момент времени  $t$  зависит, в общем случае, от всех прошлых решений игроков. Такие решения принимаются индивидами и фирмой заново в каждый период  $t$ , так что каждая  $\Gamma_s$  – это некооперативная игра с одновременными ходами и ненулевой суммой. Число участников (фирма Понци и индивиды-вкладчики и потенциальные вкладчики, т.е. фирма и популяция) предполагается конечным ( $N + 1 < \infty$ ). Каждый вкладчик на каждом шаге имеет возможность выбора из двух стратегий:  $I$  – инвестировать в финансовую пирамиду на данном шаге или  $W$  – воздержаться от инвестирования. При этом, вкладывая в пирамиду некоторую сумму  $M$ , индивид на следующем шаге получает сумму  $M + Md$ , если пирамида продолжает существовать, и 0 – в противном случае. Для фирмы Понци на каждом шаге имеется две возможности:  $C$ -стратегия, которая подразумевает выплату всех обещанных на данном этапе процентов, и  $D$ -стратегия, предполагающая выход фирмы из игры (крах финансовой пирамиды). Функции полезности индивидов задается стадийно-аддитивным функционалом полезности  $u_t = \sum_{s=0}^T \delta^s u_{st}(q_t)$ , где  $\delta$  –

фиксированный дисконтный множитель, а  $u_{st}(q_t)$  – функция полезности в стадийной игре  $S$ , зависящей от профиля  $q_t$ .

Предполагается, что фирма Понци знает все свои ходы и ходы популяции во все предыдущие моменты времени, а индивиды – только ходы фирмы, свои собственные и, возможно, небольшого количества своих знакомых. Также предполагается марковское свойство истории, что позволяет ввести вероятностные функции перехода из одного состояния в другое. Фирма Понци играет на каждом шаге не с каждым конкретным индивидом, а с их совокупностью, а каждый из них – только с самой фирмой. После краха пирамиды в фирму больше никто не инвестирует. В работе [6] делаются и иные предположения.

Авторы получают следующие утверждения.

**Предложение 1.** При введенных условиях оптимальной стратегией фирмы Понци является играть  $C$ , пока выполняется условие  $E_{n(t)}(\Delta n_t^+)M \geq E_{n(t)}(n_t d + \Delta n_t^-)M$ , и  $D$  – иначе.

Здесь  $n(t)$  – число вкладчиков финансовой пирамиды на конец периода  $t - 1$ ,  $\Delta n_t^+$  – прирост числа инвесторов за счет неинвесторов и  $\Delta n_t^-$  – прирост числа неинвесторов за счет инвесторов за предыдущий шаг, буквой  $E$  обозначены ожидания фирмы Понци относительно числа  $n(t)$ .

Авторы рассматривают стратегии мудрствующих индивидов. Вводится понятие стадийной усеченной игры с неполной информацией, т.е. такой игры, которая происходит на одном шаге между индивидом и фирмой Понци. Подчеркнем, что на самом деле фирма играет с совокупностью индивидов, но не с каждым из них, а индивиду видна именно усеченная игра. В работе получено, что:

**Предложение 2.** В стадийной усеченной игре в стратегической форме равновесные компоненты  $(\theta_t^+ C, I)$  и  $(\theta_t^- D, W)$  (точный смысл обозначений  $\theta_t^+$  и  $\theta_t^-$  см. в тексте [6]) содержат совершенные, последовательные, собственные и сущностные равновесия, если только фирма считает оптимальной стратегию  $C$  и  $D$ , а индивид приписывает достаточно высокие вероятности соответствующим событиям.

Несмотря на то, что согласно этому предложению в усеченной (т.е. в воспринимаемой индивидом) игре имеются два равновесия, верно следующее

**Предложение 3.** Единственное равновесие в стохастической игре Понци с неполной информацией есть тривиальное равновесие  $(D, W)$  в каждой стадийной игре.

Это утверждение на первый взгляд кажется парадоксальным, однако оно строго доказывается. Его верность и существование реальных финансовых пирамид связано с тем, что рассмотренная выше усеченная игра не отражает всей полной игры (фирма Понци играет с популяцией, а не с конкретным индивидом), а также с неполной информацией, имеющейся у последнего.

Отметим, что для корректности всех введенных понятий и предложений необходимо наличие универсального пространства событий для игры Понци с неполной информацией. Его существование показано в работе. Опишем схему доказательства предложения 3, при этом будем использовать некоторые понятия, строго определяемые в тексте [6], интуитивное понимание которых достаточно для дальнейшего изложения.

Игра  $\Gamma$  имеет не более  $S$  различных состояний, где  $|S| = 2^{N+1}$ , причем все эти состояния связаны в единую невозвратную марковскую цепь посредством переходной функции  $\rho$ . Отсюда следует, что оптимальная политика фирмы должна включать в себя выход из игры через конечное число шагов. Пусть это произойдет в момент  $T$ . Тогда те индивиды, которые воздержатся от инвестирования в соответствии со своими убеждениями в этот же момент окажутся в выигрыше по сравнению с остальными. Значит, в момент  $T$  равновесным профилем будет  $(D, W)$  (следует из анализа усеченной игры). Для индивидов будет оптимально воздержаться от инвестирования на этом шаге. Но в таком случае согласно Предложению 1 фирме Понци будет невыгодно поддерживать рост финансовой пирамиды до момента  $T$ , т.к. ее платеж в  $T - 1$  уменьшится на величину оттока депозитов и процентных платежей в момент  $T - 1$ . Значит, фирме выгоднее выходить из игры в момент  $T - 1$ . Рассуждая по аналогии с предыдущим, получим, что опять же индивидам невыгодно вкладываться в момент  $T - 1$ . Таким образом, профиль  $(D, W)$  также окажется един-

ственным равновесным решением на шаге  $T - 1$ . Повторив эти рассуждения, авторы получают тот же вывод и для шагов  $T - 2, T - 1, \dots, 1, 0$ . Следовательно, единственным наилучшим взаимным ответом в игре  $\Gamma$  является политика, когда все индивиды воздерживаются от равновесия, а фирма Понци выходит из игры на каждом шаге.

В следующем разделе [6] авторы подробно рассматривают динамику количества наивных и мудрствующих индивидов, а также динамику инвесторов из их числа. Наивные индивиды выбирают собственную стратегию исходя из своих текущих наблюдений о наиболее выгодной стратегии и числе знакомых – удачных вкладчиков. Также вклады могут забираться инвесторами для оплаты непредвиденных счетов. Для описания такого поведения наивных индивидов авторы используют уравнения репликаторной динамики в дискретном варианте, которые позволяют учесть описанные выше обучающие правила.

Также вводятся некоторые предположения о поведении мудрствующих индивидов. Важным моментом является то, что они все же участвуют в игре Понци, т.к. не имеют полной информации обо всей игре. Среди их убеждений имеется вероятность того, что, по их мнению, финансовая пирамида закончится на следующем шаге. Эта вероятность растет со временем, в пределе стремясь к единице. Используя это и другие предположения, в работе получены уравнения динамики наивных, мудрствующих индивидов, их общего количества и числа инвесторов среди каждой из этих групп.

В последнем разделе работы [6] приводятся результаты вычислительных экспериментов и графики роста каждой их перечисленных величин с течением времени для различных значений параметров. Также приведена соответствующая модификация модели в случае рекламной компании и альтернативная спецификация модели, также ведущая к репликаторной динамике.

Одним из выводов, полученных авторами, является, например, следующий: «реклама эффективна для фирмы Понци, если эластичность реакции популяции по действиям других индивидов достаточно низка – тогда реклама приходит на помощь. Если же эта эластичность велика и так, то вкладчики придут и сами, и реклама сильнее увеличит издержки, чем капитал фирмы».

Основной вывод авторы работы [6] формулируют как:

«НЕ ИГРАЙТЕ В ИГРЫ ПОНЦИ!»

**Модель финансовых пирамид С. В. Дубовского в работах [7, 8].** В работах [7, 8] имеется модель роста финансовой пирамиды, призванная качественно объяснить механизм дефолта 1998 года. Основными предположениями, положенными в основу модели финансовой пирамиды, являются следующие:

1) обязательства Организатора в рамках финансовой пирамиды погашаются им только за счет собранных средств без привлечения сторонних средств;

2) крах финансовой пирамиды обусловлен свойствами самой пирамиды: у Организатора финансовой в некоторый момент времени может оказаться недостаточно средств для выполнения собственных обязательств.

Рост финансовой пирамиды описывается автором уравнением:

$$\frac{dG}{dt} = g(t) - g(t - \varphi),$$

условие существования записывается как

$$c_g g(t) - g(t - \varphi) \geq 0.$$

Здесь через  $G$  обозначен объем пирамиды по номиналу,  $g(t)$  – номинальная стоимость ценных бумаг, реализованных в момент времени  $t$ ,  $c_g$  – цена продажи ценных бумаг в долях от номинала,  $\varphi$  – время погашения ценных бумаг, считая от момента продажи.

Из приведенных уравнений видно, что, так как всегда  $c_g < 1$ , то финансовая пирамида заведомо убыточна для Организатора, если она не является растущей.

Автором получены аналитические формулы времени жизни финансовой пирамиды для случаев ее линейного и квадратичного роста:

$$g(t) - g(t - \varphi) = \beta \text{ и}$$

$$g(t) - g(t - \varphi) = \beta(t - t_0).$$

Например, если вкладчикам выплачивается 100% годовых ( $\varphi = 12$  мес.,  $c_g = 0.5$ ), то «линейная» пирамида безубыточна в течение 24 месяцев, а «квадратичная» – 35.

С помощью модели такого рода и иных рассуждений автор [7, 8] дает качественное объяснение дефолта 1998 г. в России.



**Развитие идей С. В. Дубовского в работах [9-12].** В работах [9, 10] приводится подробное описание модели финансовой пирамиды по С. В. Дубовскому. Кратко ее приведем.

Под финансовой пирамидой автор понимает финансовую схему такую, что Организатор финансовой пирамиды в течение некоторого периода времени продает собственные обязательства. По ним он обязуется выплатить определенную сумму в будущем. Предполагается, что Организатор выполняет *все* свои обязательства вплоть до некоторого момента, называемого крахом финансовой пирамиды.

В рассматриваемой модели описывается только период существования финансовой пирамиды до ее краха, дальнейшие события остаются вне рассмотрения.

Будем считать, что финансовая пирамида начинается в момент времени  $t = 0$ .

$V(t)$  – доход Организатора финансовой пирамиды.

$g(t)$  – объем распроданных в момент времени  $t$  ценных бумаг по номиналу.

$\varphi > 0$  – фиксированный срок, через который наступает момент выполнения обязательств Организатора, отсчитываемый от момента их продажи.

Таким образом, предполагается, что ценные бумаги Организатора финансовой пирамиды суть, например, бескупонные облигации с одинаковым сроком погашения  $\varphi$  относительно момента продажи ценных бумаг.

$c_g(t) \in [0; 1]$  – цена, выраженная в долях от номинала, по которой происходят продажи ценных бумаг в момент времени  $t$ .

Автор записывает основное уравнение динамики выручки Организатора как

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} c_g(t)g(t), & t < \varphi \\ c_g(t)g(t) - g(t - \varphi), & t \geq \varphi \end{cases}, \quad V(0) = 0.$$

В работах [9-10] предполагается, что Организатор выполняет свои обязательства перед вкладчиками только за счет выручки от продажи ценных бумаг в рамках финансовой пирамиды, т.е. не привлекая средств со стороны.

В рамках этого предположения ясно, что если в какие-то периоды времени продается «слишком маленькое» количество ценных бумаг Организатора, то, так как выручка, получаемая Организатором в момент времени  $t$   $c_g(t)g(t)$  меньше, чем принятые на себя обязательства  $g(t)$ , в какой-то момент у Организатора может не оказаться средств для выполнения своих обязательств.

Рассмотрим два альтернативных условия окончания финансовой пирамиды.

а) Условие  $\frac{dV}{dt} = 0$ : финансовая пирамида существует только до тех пор (Организатор выполняет свои обязательства), пока выполняется условие  $c_g(t)g(t) > g(t - \varphi)$ .

б) Условие  $V = 0$ : Организатор может использовать для погашения собственных обязательств не только выручку текущего момента  $c_g(t)g(t)$ , но и ранее полученную. В таком случае условие окончания можно записать как  $V = 0$ .

Далее в работах [9, 10] рассчитываются характеристики финансовой пирамиды такие, как время ее жизни  $T$ , объем пирамиды  $G(T)$  выручка Организатора  $V(T)$  и участников финансовой пирамиды при различных заданных функциях роста финансовой пирамиды  $g(t)$  и фиксированной цене продажи ценных бумаг Организатора  $c_g = fx \in [0, 1]$ . Аналогичные расчеты были проведены в частных случаях в работах [7, 8].

Для вычисления указанных выше величин задавался вид функции  $g(t)$ . Возможными вариантами были линейная, степенная, экспоненциальная и логистическая функции.

Результаты всех вычислений в виде аналитических формул и числовых значений для конкретного примера ( $c_g = 0.9$ ,  $\varphi = 6$  мес.) сведены в таблицы в [9, 10]. Например, получено, что при указанной доходности за полугодие время существования финансовой пирамиды при условии

окончания  $\frac{dV}{dt} = 0$  при линейном росте числа вкладчиков равно примерно  $\frac{\varphi}{1 - c_g} = 60$  месяцам,

а при квадратичном – примерно  $\frac{\varphi}{1 - c_g^{1/\beta}} = 117$  месяцам, при этом в первом случае

$$\frac{V(T)}{G(T)} = 0,474, \text{ а во втором случае } - \frac{V(T)}{G(T)} = 0,316.$$

Полученная модель с фиксированной ценой достаточно проста, чтобы описывать, реальные финансовые пирамиды, такие как АО «МММ», «Властилина», ГКО-ОФЗ и другие.

Автором предполагается что целью Организатора финансовой пирамиды является максимизация своей выручки за вычетом денежных средств на выполнение обязательств согласно финансовой пирамидой, т.е. величины  $V(T)$ , в момент окончания (краха)  $T$  финансовой пирамиды. Считаем, что после этого момента Организатор больше не выполняет свои обязательства.

Время краха финансовой пирамиды будем предполагать ограниченным сверху достаточно большой величиной  $T_1 > \varphi : T \leq T_1$ . Параметром, который можно варьировать для решения задачи оптимизации, является цена продажи ценных бумаг Организатором  $c_g(t)$ .

Исходя из всего вышесказанного, полученная задача записана как:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(T) \rightarrow \max \\ V(0) = 0 \\ 0 \leq t \leq T_1, T_1 > \varphi \\ \frac{dV}{dt} = c_g(t)g(t) - g(t - \varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_0 \Phi(c_g(t))f(t), t \geq 0 \\ c_g = c_g(t) \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Здесь  $V(T)$  – максимизируемая величина,  $T$  – время окончания финансовой пирамиды ( $T \leq T_1$ ),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = c_g(t)g(t) - g(t - \varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_0 \Phi(c_g(t))f(t) \end{array} \right. -$$

зависимость выручки Организатора финансовой пирамиды от времени. Основное отличие от рассматриваемой ранее модели состоит в представлении функции  $g(t)$  в виде произведения двух функций: функции спроса  $\Phi(c_g)$ , зависящей от цены, и заданной функции роста  $f(t)$ .  $g_0$  – постоянная. Основной случай, рассмотренный в работе [10] – это случай постоянной цены  $c_g = const$ , т.е. цены – параметра.

В качестве функции спроса использована функция  $\Phi(c) = \frac{(1-c)^n}{c^m}$ ,  $n > 1$ ,  $0 < m < 1$ .

В качестве функции роста  $f(t)$  рассмотрены следующие варианты:

- 1) постоянная функция  $f(t) = 1$ ;
- 2) линейная функция  $f(t) = t$ ;
- 3) степенная функция  $f(t) = t^\beta$ ,  $\beta \in \mathbb{N}$ ;
- 4) экспоненциальная функция  $f(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ .

Для каждой из них решена задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(T) \rightarrow \max_{c_g \in [0,1]} \\ V(0) = 0 \\ 0 \leq t \leq T_1, T_1 > \varphi \\ \frac{dV}{dt} = c_g g(t) - g(t - \varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_0 \frac{(1 - c_g)^n}{c_g^m} f(t), t \geq 0 \\ n > 1, 0 < m < 1 \\ c_g = \text{const} \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Полученные результаты таковы:

1) постоянная функция  $f(t) = 1$ :

$$c_g^* = \frac{1 - m}{n + 1 - m}.$$

2) линейная функция  $f(t) = t$ :

$$c_g^* = \frac{1 - m}{n - m}, \text{ если } T_1 \text{ «достаточно велико», т.е. } T_1 \geq \frac{n - m}{n - 1} \varphi.$$

3) степенная функция  $f(t) = t^\beta$ ,  $\beta \in \mathbb{N}$ ;

а)  $n \leq \beta$ .

$$c_g^* = \frac{(1 - m) + (n - m)k + \sqrt{(-m - mk + nk + 1)^2 + 4mk(n - m + 1)}}{2(n - m + 1)},$$

$$\text{где } k = \left(1 - \frac{\varphi}{T_1}\right)^{\beta+1}.$$

б)  $n > \beta$ . Если  $T_1$  «достаточно велико», т.е.  $\frac{\varphi}{1 - (c_g^*)^{1/\beta}} \leq T_1$ , то:

$\beta = 1$ :

$$c_g^* = \frac{1 - m}{n - m}.$$

$\beta = 2$ :

$$c_g^* = \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4(1 - m)(n - m)}}{2(n - m)} \right)^2.$$

В случае  $\beta > 2$  аналитические вычисления сложны. Численные эксперименты показывают, что на  $(0, 1)$  имеется ровно 1 корень производной, дающий искомый максимум.

4) экспоненциальная функция  $f(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ .

а) Если  $\frac{1 - m}{n + 1 - m} > e^{-\lambda \varphi}$ , то ответ (1) (см. ниже).

б) Если  $\frac{1 - m}{n + 1 - m} \leq e^{-\lambda \varphi}$ , то

б1) если  $c_g^*(T_1)$  из (1) (см. ниже)  $> e^{-\lambda \varphi}$  и

$$(e^{\lambda T_1} - 1)(1 - c_g^*(T_1))^n (c_g^*(T_1))^{-m} \left[ c_g^*(T_1) - \frac{e^{\lambda T_1} e^{-\lambda \varphi} - 1}{e^{\lambda T_1} - 1} \right] > (e^{\lambda \varphi} - 1) \frac{(1 - m)^{1-m} n^n}{(n - m + 1)^{n-m+1}},$$

то ответ (1) (см. ниже).

$$\text{б2) иначе } c_g^* = \frac{1 - m}{n + 1 - m}.$$

Упомянутый выше ответ (1) имеет вид:

$$c_g^*(k) = \frac{(1 - m) + (n - m)k + \sqrt{(-m - mk + nk + 1)^2 + 4mk(n - m + 1)}}{2(n - m + 1)},$$

$$\text{где } k(T_1) = \frac{e^{\lambda T_1} e^{-\lambda \varphi} - 1}{e^{\lambda T_1} - 1}, \text{ а } c_g^*(T_1) = c_g^*(k) \Big|_{k=k(T_1)}.$$

Для иллюстрации полученных автором результатов найдены численные значения  $c_g^*$  для конкретного примера (см. [10, Таблица 3]).

В работе [10] отмечено, что рассмотренная модель с постоянной ценой достаточно груба, т.к. не позволяет Организатору менять цену в течение всей жизни финансовой пирамиды, что ограничивает его свободу действий и сильно уменьшает полученную им итоговую выручку, хотя применение на практике даже такой упрощенной модели возможно. В работе [10] также рассмотрена постановка задачи оптимального управления с ценой, зависящей от времени  $c_g(t) \in [0, 1]$  и отмечены ее особенности.

В работах [11, 12] содержится развитие модели финансовой пирамиды из [9-10]. По сравнению с ней добавлена новая переменная-управление –  $s \in [0, 1]$  – доля от текущей выручки  $c_g g(t)$ , затрачиваемая Организатором на рекламу финансовой пирамиды. Основное уравнение модели выглядит как:

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} c_g(1-s)g(t), & 0 \leq t < \varphi \\ c_g(1-s)g(t) - g(t-\varphi), & t \geq \varphi \end{cases}, \quad V(0) = 0.$$

Теперь параметрами, которые можно варьировать для решения задачи оптимизации, являются цена продажи ценных бумаг Организатором  $c_g$  и доля вложений в рекламу  $s$ .

$$\text{Формулы } \frac{dV}{dt} = c_g(1-s)g(t) - g(t-\varphi), \quad g(0) = 0 \quad \text{при } t \in [-\varphi, 0) \quad \text{и}$$

$g(t) = g_0 e^{\gamma s} \Phi(c_g) f(t)$  при  $t \geq 0$  задают зависимость выручки Организатора финансовой пирамиды от времени. Здесь использовано представление функции  $g(t)$  в виде произведения трех функций: функции эффективности рекламы  $e^{\gamma s}$ , зависящей от доли вложений в рекламу, функции спроса  $\Phi(c) = \frac{(1-c)^n}{c^m}$ ,  $n > 1$ ,  $0 < m < 1$ , зависящей от цены, и заданной функции роста  $f(t)$ .

В качестве функции роста  $f(t)$  используем функции: постоянную функцию  $f(t) = 1$  и линейную функцию  $f(t) = t$  и экспоненциальную  $f(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ . Для каждой из этих функций  $f(t)$  решалась задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(T) \rightarrow \max_{s, c_g} \\ V(0) = 0 \\ 0 \leq t \leq T_1, T_1 > \varphi \\ \frac{dV}{dt} = c_g(1-s)g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o e^{\gamma s} \frac{(1-c_g)^n}{c_g^m} f(t), t \geq 0 \\ n > 1, 0 < m < 1, \gamma > 0 \\ c_g = \text{const} \in [0, 1] \\ s = \text{const} \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Автором получены следующие результаты:

1) Постоянная функция  $f(t) = 1$ :

$$c_g^* = \frac{1-m}{n+1-m}, s^* = \max \left\{ 0, 1 - \frac{1}{\gamma} \right\}.$$

2) Линейная функция  $f(t) = t$ . В предположении, что  $T_1$  «достаточно велико», т.е.

$$T_1 \geq \frac{\varphi}{1-c_g^*(1-s^*)}, \text{ получим: если параметр } \gamma \text{ принадлежит множеству, заданному параметри-$$

чески в зависимости от параметров  $m$  и  $n$ :

$$\left\{ \frac{1}{2} \leq \frac{1-m}{n-m} \leq 1, 0 < \gamma \leq 4 \frac{1-m}{n-m} \right\} \cup \left\{ 0 < \frac{1-m}{n-m} \leq \frac{1}{2}, 0 < \gamma \leq \frac{n-m}{n-1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \leq \frac{1-m}{n-m} \leq 1, 4 \frac{1-m}{n-m} \leq \gamma \leq \frac{n-m}{n-1}, e^{-\gamma + \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma \frac{1-m}{n-m}}}{2 \frac{1-m}{n-m}}} \geq \frac{(n-1)(n-m)}{4\gamma(1-m)^2} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma \frac{1-m}{n-m}} \right)^2 \right\},$$

$$\text{то } s^* = 0, c_g^* = \frac{1-m}{n-m}.$$

В противоположном случае  $c_g^*$  находится как решение уравнения

$$1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\gamma} c_g} = 2 \frac{(n-m+1)c_g - (1-m)}{(n-m)c_g + m},$$

$$\text{а } s^* \text{ рассчитывается как } s^* = 1 - \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma c_g}}{2\gamma c_g}.$$

$$\text{Уравнение } 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\gamma} c_g} = 2 \frac{(n-m+1)c_g - (1-m)}{(n-m)c_g + m} \text{ сводится к кубическому, с коэффициентами, зависящими от параметров, поэтому его решение в аналитическом виде не представляется возможным. Его решение для случая } m = 0.5, n = 2, 5, 10, \gamma = 0.5, 1, 2, 5, 10, \text{ приведено в$$

Таблице 1, взятой из [11].

Таблица 1.

	$n = 2$		$n = 5$		$n = 10$	
	$c_g^*$	$s^*$	$c_g^*$	$s^*$	$c_g^*$	$s^*$
$\gamma = 0.5$	0,333	0	0,111	0	0,053	0
$\gamma = 1$	0,333	0	0,111	0	0,053	0
$\gamma = 2$	0,252	0,413	0,100	0,472	0,050	0,487
$\gamma = 5$	0,215	0,791	0,094	0,796	0,049	0,798
$\gamma = 10$	0,207	0,898	0,092	0,899	0,048	0,900

3) Экспоненциальная функция  $f(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ . Обозначим  $k = \frac{e^{\lambda T_1} e^{-\lambda \varphi} - 1}{e^{\lambda T_1} - 1} \in (0, 1)$ .

1. Если  $\frac{1-m}{n+1-m} \min \left\{ 1, \frac{1}{\gamma} \right\} \leq e^{-\lambda \varphi}$ , то  $c_g^* = \frac{1-m}{n+1-m}$  и  $s^* = \max \left\{ 0, 1 - \frac{1}{\gamma} \right\}$ .

2. Иначе ответ имеет вид:

а) Если верно, что

$$\left[ \frac{2(n-m+1)k}{(1-m) + (n-m)k + \sqrt{(-m-mk+nk+1)^2 + 4mk(n-m+1)}} \right] + \frac{1}{\gamma} > 1, \text{ то}$$

$$c_g^* = \frac{(1-m) + (n-m)k + \sqrt{(-m-mk+nk+1)^2 + 4mk(n-m+1)}}{2(n-m+1)}, \quad s^* = 0.$$

б) Иначе  $c_g^* = \frac{1-m-k\gamma + \sqrt{(1-m-k\gamma)^2 + 4k\gamma(n-m+1)}}{2(n-m+1)}$ ,

$$s^* = 1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{2k(n-m+1)}{\left[ 1-m-k\gamma + \sqrt{(1-m-k\gamma)^2 + 4k\gamma(n-m+1)} \right]}.$$

Можно отметить, что оказалось, что если параметр эффективности рекламы  $\gamma$  «слишком мал», то с точки зрения поставленной задачи максимизации выгоднее обойтись без рекламы.

Итак, в работах [9-12] автором предложено дальнейшее развитие идей С. В. Дубовского по описанию финансовых пирамид, а именно: описана модель существования финансовой пирамиды и найдены ее характеристики в виде аналитических формул, поставлена и решена задача максимизации выручки Организатора финансовой пирамиды в момент ее окончания в виде аналитических формул, а также предложена модель с вложениями в рекламу и получено решение соответствующей задачи оптимизации в некоторых случаях.

**Выводы.** Из приведенного описания работ [1-12] видно, что имеется большое количество подходов к анализу государственного долга и к моделированию долговых обязательств. При этом можно отметить, что все предлагаемые модели концептуально различны. Соответственно отличаются выводы, получаемые различными авторами.

Обилие точек зрения говорит о сложности задачи управления долгом с учетом политической, экономической и социальной обстановки в стране и влияния мировых рынков. Таким образом, все описанные выше подходы можно развивать и совершенствовать для более адекватного описания рассматриваемого явления.

### Список литературы

1. *Баринов В., Первозванский А., Первозванская Т.* Политика размещения государственного долга и поведения рынка государственных облигаций. // Российская программа экономических исследований. Научный доклад № 1999/05 ([www.eerc.ru](http://www.eerc.ru), <http://195.28.33.75/>).

2. *Ивантер А., Пересецкий А.* Анализ развития рынка ГКО // Российская программа экономических исследований. Научный доклад № 1999/06 ([www.eerc.ru](http://www.eerc.ru), <http://195.28.33.75/>).

3. Гурвич Е. Т., Дворкович А. В. Процентные ставки и цена внутренних заимствований в среднесрочной перспективе // Российская программа экономических исследований. Научный доклад № 1999/08 ([www.eerc.ru](http://www.eerc.ru), <http://195.28.33.75/>).

4. Дикусар В. В., Синягин С. Ю. Качественные и численные методы в задаче оптимального управления государственным долгом. – М.: Вычислительный центр РАН. – 2000.

5. Blanchard O.-J. and Watson M. Bubbles, rational expectations and financial markets in P. Wachtel Crises in economic and financial structure. – Lexington (MA), 1982.

6. Белянин А. В., Исупова О. Г. Финансовые пирамиды в переходной экономике с точки зрения теории игр // Российская программа экономических исследований. Научный доклад № 2000/10 ([www.eerc.ru](http://www.eerc.ru), <http://195.28.33.75/>).

7. Дубовский С. В. Прогнозирование инфляции и обменного курса рубля в российской нестационарной экономике. – М.: Издательство УРСС. – 2001.

8. Дубовский С. В. Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков // Экономика и математические методы, 2002, том 38, № 2, с. 84-96.

9. Димитриади Г. Г. Математические модели финансовых пирамид // Электронный журнал «Исследовано в России», 83, стр. 929-936, 2002 г. – <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/083.pdf>.

10. Димитриади Г. Г. Модели финансовых пирамид: детерминированный подход. – М.: Издательство УРСС. – 2002.

11. Димитриади Г. Г. Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай линейного роста. // Аспирант и соискатель, 2002, № 5.

12. Димитриади Г. Г. Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай экспоненциального роста. // Аспирант и соискатель, 2002, № 5.