Опубликовано на нашем сайте: 11 декабря 2002 г.

Элетронный адрес для связи: ereshko@ccas.ru

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Г.А.АГАСАНДЯН

МНОГОСТУПЕНЧАТЫЙ КРИТЕРИЙ *VAR* НА РЕАЛЬНОМ РЫНКЕ ОПЦИОНОВ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2001

УДК 519.685

Ответственный редактор
доктор техн. наук Ф.И. Ерешко

Развитые в прежних работах автора для теоретического рынка опционов принципы построения оптимального портфеля инвестора со своим взглядом на свойства рынка используются для реального рынка опционов. Предлагаются два способа. Первый из них дает представление оптимального портфеля инвестора на континуальном однопериодном рынке опционов, которое далее применением процедуры дискретизации преобразуется к виду, пригодному уже для реального рынка. Второй подход дает представление оптимального портфеля инвестора непосредственно на основе дискретных страйков рынка опционов. В соответствии с ним разрабатывается согласованная с континуальным критерием *VaR* процедура, использующая для построения приближенно оптимального портфеля инвестора рыночные цены опционов.

Рецензенты: А.И. Самыловский,
Ю.А. Флеров

Научное издание

Для управления финансовыми рисками нужно уметь их измерять. Методы измерения риска хорошо известны, и без них не обходится ни одно серьезное исследование по финансовой математике и финансовой инженерии. В основном это два метода. Один из них связан с измерением риска с помощью дисперсии (стандартного отклонения, или волатильности) доходности. Другой метод измерения риска основан на оценке вероятности получения участником рынка недопустимо малых для него доходов (или ее минимизации, если это возможно).

В последнее время наибольшее распространение начинает приобретать именно второй метод. Его называют критерием допустимых потерь. В англоязычной литературе используют два термина – *drawdown criteria* (см. [1]) и *value at risk* (*VaR*). Следуя устоявшейся в нашей специальной литературе практике, будем называть его критерием *VaR*, оставляя последнее сокращение без перевода.

Однако ни один простой критерий не может дать полной картины возможных исходов финансовой операции. Кроме того, необходим глубокий анализ предпочтений участника рынка, поскольку от них во многом зависит, принесет ли выгоду конкретному инвестору выработанная именно для него стратегия поведения на рынке.

Настоящая работа затрагивает круг проблем финансового анализа, связанных с рисками. Она продолжает тему, начатую в работе автора [2]. В качестве основных результатов последней можно отметить следующие. Во-первых, показано, что на высокоразвитых рынках использование стандартного критерия *VaR* в сочетании с современными возможностями финансовой инженерии по синтезу производных продуктов чревато нежелательными для инвестора эффектами. Во-вторых, использование развитого в [2] аппарата континуального критерия *VaR* позволяет избавиться от недостатков стандартного его варианта и наиболее полно отразить предпочтения инвестора.

Однако конструкция, предложенная в работе [2] и направленная на наиболее полное удовлетворение запросов инвестора (трейдера) со своим взглядом на вероятностные свойства рынка и своими рисковыми предпочтениями, носит во многом теоретический характер и определяет в основном принципы построения оптимального портфеля инвестора и его доходность. Она оставляет в стороне вопросы конкретного построения оптимального портфеля.

Целью настоящей работы служит адаптация развитой в работе [2] методики к реальному рынку. Эта методика не может быть использована в ее изначальном виде непосредственно на реальном рынке опционов, потому что, во-первых, на нем присутствуют лишь опционы для конечного множества страйков (цен исполнения), а во-вторых, выигрышными опционами[†], как правило, на рынке не торгуют. И поскольку такие опционы обычно не представлены на рынке, построить желаемый инструмент только из опционов колл или только из опционов пут не удается.

На основе методики из работы [2] предлагаются два подхода. В первом из них в предположении, что известны распределения вероятностей цен базового актива как с точки зрения инвестора, так и рынка, сначала дается представление оптимального портфеля инвестора на континуальном по страйкам однопериодном рынке опционов, которое далее может быть преобразовано к виду, пригодному для дискретного рынка. Для этого исследуются свойства опционов на однопериодном рынке и приводятся различные представления портфелей в зависимости от платежной функции и свойств рынка.

Первый подход имеет очевидный самостоятельный теоретический интерес. Однако следует признать, что с практической точки зрения и он не лишен недостатков. Дело в том, что вероятностное распределение будущих цен базового актива, как правило, неизвестно, а восстанавливать его по ценам опционов с дискретным множеством страйков можно лишь приближенно. Поэтому предлагается второй подход, учитывающий это. В соответствии с ним для дис-

[†] Напомним, что выигрышными опционами являются (упрощенно говоря) опционы колл с высокими и опционы пут с низкими страйками по сравнению с текущей ценой базового актива.

кретного по страйкам рынка опционов разрабатывается согласованная с континуальным критерием *VaR* процедура, использующая для построения приближенно оптимального портфеля инвестора непосредственно рыночные цены опционов.

1. Оптимальный портфель инвестора на теоретическом рынке опционов

Для получения различных представлений портфеля инвестора на одноперrunning рынке опционов с континуальным множеством страйков нам потребуются некоторые свойства таких опционов. При этом мы исходим из представления о нейтральности к риску рынка.

1.1. Свойства опционов на одноперiodном рынке

Рассматривается одноперiodный рынок, на котором обращаются безрисковый актив, рисковый актив (акции) и опционы колл и пут на этот актив. Иногда под одноперiodным рынком имеют в виду рынок, на котором исполнение опционов однократно на рассматриваемом интервале времени, но при этом динамика цен активов и процесс принятия решений о переформировании портфелей непрерывны. Мы же здесь под одноперiodным рынком понимаем совсем простую временную конструкцию, охватывающую всего лишь два момента времени – начало и конец периода. Именно на ней мы попытаемся прояснить особенности взаимоотношений инвестора и рынка.

Опционом колл со страйком E называют инструмент $\boldsymbol{C}(E)$ с платежной функцией $c(x; E) = \max(0, x–E)$, а опционом пут – инструмент $\boldsymbol{P}(E)$ с платежной функцией $p(x; E) = \max(0, E–x)$. В начале периода цена базового актива равна μ_0. Цена актива в конце периода является случайной величиной с плотностью вероятности $f(x)$ и функцией распределения $F(x)$, которым соответствует среднее μ. В теоретической конструкции нам будет удобно допускать и отрицательные значения этой случайной величины (с малой вероятностью). Безрисковый относительный доход принимается равным r (т.е. безрисковая доходность равна $r – 1$). Будем считать рынок нейтральным к риску, и потому должно быть $\mu = r\,\mu_0$.

На таком рынке стоимость в начале периода опциона колл со страйком E определяется равенством

$$C(E)=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\max(0,x-E)f(x)dx=$$
$$=\frac{1}{r}\int_{E}^{\infty}(x-E)f(x)dx=\frac{1}{r}\int_{E}^{\infty}(1-F(x))dx, \tag{1}$$

а опциона пут –

$$P(E)=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\max(E-x,0)\,f(x)dx=$$
$$=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{E}(E-x)\,f(x)dx=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{E}F(x)dx. \tag{2}$$

(В работе применяется одно и то же обозначение как для самого инструмента, так и для его цены на начало периода, но различие между ними отмечается использованием полужирного шрифта для инструмента.)

Последние равенства в формулах (1) и (2) справедливы, если функция распределения $F(x)$ при $x\to\pm\infty$ достаточно быстро стремится к своим предельным значениям, что мы и будем впредь предполагать.

Имеет место также соотношение

$$C(E)-P(E)=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\max(0,x-E)-\max(0,E-x)\right]f(x)dx=$$
$$=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E)f(x)dx-\frac{E}{r}=\frac{\mu}{r}-\frac{E}{r}=\mu_0-\frac{E}{r}, \tag{3}$$

которое можно интерпретировать как теорему паритета пут/колл.

Замечание. Если рынок не нейтрален к риску, проблема ценообразования усложняется. Необходимо учитывать рисковые аспекты инструментов. Дело в том, что в реальности стоимость опциона на начало периода не является просто осредненным будущим доходом в конце периода с коррекцией на ставку процента. Рисковые предпочтения инвестора вносят свою лепту в ценообразование опционов, повышая стоимость опционов при их значительных проигрышах. Однако это не должно влиять на последующие выводы. Для инвестора важны не реальная плотность вероятности цены базового актива (оно остается неизвестным), а "наведенная" плотность, которая получается как вторая производная опционов колл (или пут) с коррекцией на процентную ставку. Именно эта плотность участвует в оценке стоимости инструментов, используемых инвестором. Но сейчас эти вопросы лежат в стороне от наших интересов. Наша цель – предоставить инвестору средство использовать расхождения во взглядах на вероятностные свойства будущей цены актива самого рынка и инвестора.

Дифференцируя (1), (2) и (3), получаем

$$C'(E) = \frac{1}{r}\left(-1 + F(E)\right), \tag{4}$$

$$P'(E) = \frac{F(E)}{r}, \tag{5}$$

$$C'(E) - P'(E) = -\frac{1}{r}, \tag{6}$$

а также

$$C''(E) = P''(E) = \frac{F'(E)}{r} = \frac{f(E)}{r}. \tag{7}$$

1.2. Репликация произвольного обобщенного опциона портфелем стандартных опционов колл и пут

Здесь и далее мы будем для простоты записи формул принимать $r = 1$, т.е. считать безрисковую ставку равной нулю. Если она не равна нулю, то в нижеследующих формулах достаточно перед знаками интегралов ввести необходимый множитель.

Пусть на (теоретическом) рынке торгуются опционы колл и пут для всех страйков из множества всех вещественных чисел R. Наряду с этими опционами будем рассматривать и производные от них инструменты. Так, "первой производной" опциона колл назовем инструмент $\boldsymbol{C}'(E)$, платежная функция которого $c'(x,E) = \chi(x,E)$, где χ – характеристическая функция множества $\{x|\, x>E\}$. Этот инструмент можно рассматривать как предел инструмента $(\boldsymbol{C}(E+\Delta E) - \boldsymbol{C}(E)) / \Delta E$ при $\Delta E \to 0$. Отметим, что в числителе стоит инструмент, являющийся коротким вертикальным спредом быка.

Аналогично "первой производной" опциона пут назовем инструмент $\boldsymbol{P}'(E)$, платежная функция которого $p'(x,E) = 1 - \chi(x,E)$, т.е. равна характеристической функции множества $\{x|\, x\leq E\}$. Этот инструмент также можно рассматривать как предел инструмента $(\boldsymbol{P}(E+\Delta E) - \boldsymbol{P}(E)) / \Delta E$ при $\Delta E \to 0$. Здесь также в числителе стоит вертикальный спред, но на этот раз длинный вертикальный спред медведя.

Строго говоря, введение таких инструментов, как "первые производные" опционов, оправдано лишь с теоретической точки зрения: на реальном рынке их точное воспроизведение невозможно. Наилучшим рыночным приближением к таким инструментам могут служить подходящего объема (элементарные) вертикальные спреды, образованные соседними страйками.

Введем еще в качестве инструментов "вторые производные" опционов колл и пут, платежные функции которых совпадают между собой и равны $\delta(x;E)$ (дельта-функции относительно E). Эти инструменты можно рассматривать как пределы инструментов $(\boldsymbol{C}'(E+\Delta E) - \boldsymbol{C}'(E)) / \Delta E$ и $(\boldsymbol{P}'(E+\Delta E) - \boldsymbol{P}'(E)) / \Delta E$ при $\Delta E \to 0$ и обозначать $\boldsymbol{C}''(E)$ и $\boldsymbol{P}''(E)$ соответственно. Их можно рассматривать также (если раскрыть содержание "первых производных") как пределы при $\Delta E \to 0$ инструментов $(\boldsymbol{C}(E+2\Delta E)-2\boldsymbol{C}(E+\Delta E)+\boldsymbol{C}(E)) / (\Delta E)^2$ и $(\boldsymbol{P}(E+2\Delta E)-2\boldsymbol{P}(E+\Delta E)+\boldsymbol{P}(E)) / (\Delta E)^2$ соответственно.

Если $g(x)$ – платежная функция инструмента $\boldsymbol{G}$, который мы желаем синтезировать из опционов колл, то, как следует из работы [5], представление соответствующего этой функции портфеля опционов колл в случае, если $g(-\infty)$ ограничено, можно задать в виде

$$\boldsymbol{G} = g(-\infty)\boldsymbol{U} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\boldsymbol{C}'(x)dx\ .$$

Если ограничено $g(+\infty)$, то аналогом предыдущего будет служить иное представление

$$\boldsymbol{G} = g(+\infty)\boldsymbol{U} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\big(\boldsymbol{C}'(x) + \boldsymbol{U}\big)dx\ .$$

Здесь и далее $\boldsymbol{U}$ означает безрисковый актив единичного объема. Если $g(-\infty)$ (или $g(+\infty)$) принимает бесконечное значение, первое (или второе) представление теряют смысл. Однако всегда можно подобрать представление, лишенное такого недостатка. А именно, если $g(\nu)$ конечно для некоторого $\nu \in R$, то имеет место

$$\boldsymbol{G} = g(\nu)\boldsymbol{U} - \int_{-\infty}^{\nu} g'(x)\big(\boldsymbol{C}'(x) + \boldsymbol{U}\big)dx - \int_{\nu}^{\infty} g'(x)\boldsymbol{C}'(x)dx\ . \qquad (8)$$

Ниже мы предложим и другие представления, более подходящие для наших целей и также подобной проблемы не создающие.

Аналогичные представления портфеля с помощью одних лишь опционов пут даются соотношениями

$$\boldsymbol{G} = g(-\infty)\boldsymbol{U} + \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\big(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{P}'(x)\big)dx\ ,$$

$$\boldsymbol{G} = g(+\infty)\boldsymbol{U} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\boldsymbol{P}'(x)dx\ .$$

Кроме того, снова задаваясь некоторым $\nu \in R$ с конечным значением $g(\nu)$, получаем также

$$\boldsymbol{G} = g(\nu)\boldsymbol{U} - \int_{-\infty}^{\nu} g'(x)\boldsymbol{P}'(x)dx - \int_{\nu}^{\infty} g'(x)\big(\boldsymbol{P}'(x) - \boldsymbol{U}\big)dx\ . \qquad (9)$$

Вместо формул (8) и (9), дающих представление портфеля только через коллы или только через путы, можно записать и эквивалентное им смешанное представление с одновременным участием и коллов, и путов:

$$\boldsymbol{G} = g(\nu)\boldsymbol{U} - \int_{-\infty}^{\nu} g'(x)\boldsymbol{P}'(x)dx - \int_{\nu}^{\infty} g'(x)\boldsymbol{C}'(x)dx\ . \qquad (10)$$

Последний вариант представления предпочтительнее тем, что на рынке обычно присутствуют именно путы с низкими страйками и коллы с высокими страйками. Кроме того, стоимость пута и ее производная стремятся к нулю на отрицательной бесконечности, а стоимость колла и ее производная – на положительной.

Все предложенные представления портфеля $\boldsymbol{G}$ относятся к первому типу представлений, которые выражают портфель в виде интегралов от "первых производных" опционов. Преобразуя портфель с помощью интегрирования по частям и используя свойства опционов, можно получить еще два типа представления на основе только "вторых производных" опционов или только самих опционов.

Во втором типе представлений используются "вторые производные" опционов колл и пут:

$$\boldsymbol{G} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\boldsymbol{C}''(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\boldsymbol{P}''(x)dx\,.$$

Они удобны тем, что требуют минимальных ограничений на платежную функцию. При этом также может быть использован вариант смешанного представления, а именно

$$\boldsymbol{G} = \int_{-\infty}^{\nu} g(x)\boldsymbol{P}''(x)dx + \int_{\nu}^{\infty} g(x)\boldsymbol{C}''(x)dx\,.$$

И, наконец, третий тип представлений

$$\boldsymbol{G} = g(-\infty)\boldsymbol{U} + \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{C}(x)dg'(x) = g(+\infty)\boldsymbol{U} + \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}(x)dg'(x)$$

справедлив, если $g(x)$ непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция, а $g(-\infty)$ (или $g(+\infty)$) ограничено. Эти представления интересны тем, что они дают портфель в терминах самих опционов, что удобно для непосредственного задания рыночного портфеля опционов.

И для третьего типа рассматриваются варианты смешанного представления портфеля опционов. Если исходить из соотношения (10), но провести интегрирование по частям по-иному, внося под знак дифференциала "первые производные" опционов, то будем иметь представление

$$G=\left(g(x)P'(x)-g'(x)P(x)\right)\Big|_{-\infty}^{\nu}+\int_{-\infty}^{\nu}P(x)dg'(x)+$$
$$+\left(g(x)C'(x)-g'(x)C(x)\right)\Big|_{\nu}^{\infty}+\int_{\nu}^{\infty}C(x)dg'(x).$$

Если теперь учесть поведение опционов на бесконечности, а также предположив, что производная функции $g(x)$ при $x\to\pm\infty$ ограничена, то оказывается, что оба проинтегрированных выражения в скобках при бесконечных значениях x обращаются в нуль. Применяя еще свойство (6) опционов, получаем

$$\begin{gathered}G=g(\nu)U-g'(\nu-0)P(\nu)+g'(\nu+0)C(\nu)+\\+\int_{-\infty}^{\nu}P(x)dg'(x)+\int_{\nu}^{\infty}C(x)dg'(x).\end{gathered}\tag{11}$$

Последнее выражение снова дает представление инструмента в терминах самих опционов колл и пут, что может быть непосредственно использовано на рынке при составлении реплицирующего портфеля.

Если производная функции g в точке ν непрерывна, то последнее равенство приобретает более простой вид

$$G=g(\nu)U-g'(\nu)\left(P(\nu)-C(\nu)\right)+\int_{-\infty}^{\nu}P(x)dg'(x)+\int_{\nu}^{\infty}C(x)dg'(x).$$

Полученную формулу часто имеет смысл рассматривать в варианте $\nu=\mu$. Следует, однако, отметить, что хотя в точке μ стоимости колла и пута совпадают, т.е. $P(\mu)=C(\mu)$, сами инструменты различаются. Поэтому второе слагаемое в правой части формулы не равно нулю.

Несмотря на кажущуюся необременительность условий, при которых получено последнее выражение, в теоретическом отношении для ряда интересных случаев они оказываются невыполнимыми. Это происходит, когда производная $g'(x)$ в точке $x=\nu$ обращается в бесконечность. В частности, так обстоят дела с двусторонним экспоненциальным распределением, с которым мы уже встречались в *примерах* 2 и 3 из [2]. В одном варианте построения оптимального портфеля на основе этого распределения вероятностей, рассматриваемом ниже, последнее представление оказывается непригодным.

Для таких случаев окажется полезным следующее представление, учитывающее возможность бесконечности первой производной функции g в точке ν (при его выводе с помощью интегрирования по частям образуются вспомогательные комбинации инструментов $\boldsymbol{C}(x) - \boldsymbol{C}(\nu)$ и $\boldsymbol{P}(x) - \boldsymbol{P}(\nu)$),

$$\begin{gathered}\boldsymbol{G} = g(\nu)\boldsymbol{U} - g'(-\infty)\boldsymbol{P}(\nu) + g'(+\infty)\boldsymbol{C}(\nu) + \\ + \int_{-\infty}^{\nu}\left(\boldsymbol{P}(x) - \boldsymbol{P}(\nu)\right)dg'(x) + \int_{\nu}^{\infty}\left(\boldsymbol{C}(x) - \boldsymbol{C}(\nu)\right)dg'(x).\end{gathered} \tag{12}$$

В этом представлении портфеля снова используются сами опционы колл и пут, что делает его удобным при его применении к реальному рынку.

1.3. Примеры построения оптимального портфеля инвестора на континуальном по страйкам рынке

Рассмотрим модель рынка и инвестора, в основе которой лежат предположения и конструкции *примеров* 2 и 3 из работы [2]. В них для инвестора и рынка используются распределения вероятностей цены актива, относящиеся к одному и тому же типу, а именно к часто используемому на финансовых рынках (см., например, [4]) двустороннему двухпараметрическому экспоненциальному распределению $Exp(\alpha,\beta)$ с произвольным параметром α и $\beta > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right), \qquad x \in R, \tag{13}$$

при этом распределения вероятностей для инвестора и рынка различаются параметрами.

Как следует из изложения приведенной выше теории, в данной работе для нас важны не сами распределения, а цены опционов (колл и пут), как для рынка, так и для инвестора. Но вычисляться эти цены должны именно по этим распределениям.

Снова для упрощения записи математические ожидания обоих распределений принимаются равными нулю ($\alpha = 0$), что никак не влияет на содержательность результатов, так как имеет значение лишь взаимное расположение распределений на оси цен.

Стоимость опциона колл для распределения с плотностью (13), где $\alpha = 0$, составляет

$$C(E;0,\beta) = \frac{1}{2}\left(\beta \exp\left(-\frac{|E|}{\beta}\right) + |E| - E\right).$$

Будем считать, что рынку отвечает распределение $Exp(\alpha,1)$, а инвестору – $Exp(0,\beta)$. Зададимся однопараметрической функцией критических доходов

$$B_{cr}(\varepsilon;b) = b\varepsilon^{\lambda}, \quad \lambda \geq 0 ,$$

заданной для всех $\varepsilon \in [0,1]$. Эта функция не допускает получения отрицательных доходов и является упрощенной версией функции критических доходов инвестора, рассмотренной в *примере* 3 из [1].

Кроме того, перед инвестором задача максимизации среднего дохода не стоит, т.е. всю сумму инвестиции он направляет на выполнение ограничений, и, значит, должно выполняться равенство (см. [1])

$$A = \int_0^1 B_{cr}(\varepsilon;b)\, d\gamma(\varepsilon) = b\int_0^1 \varepsilon^{\lambda}\, d\gamma(\varepsilon),$$

поэтому

$$b = A\Big/\int_0^1 \varepsilon^{\lambda}\, d\gamma(\varepsilon). \tag{14}$$

Сначала рассмотрим случай $\beta < 1$, т.е. инвестор полагает, что рынок более волатильный, чем считает большинство его участников.

В соответствии с процедурой Неймана-Пирсона получаем семейство множеств

$$Z(c) = \left\{ x \,\middle|\, |x| \geq \frac{\beta}{1-\beta}\ln\frac{c}{\beta} \right\}, \tag{15}$$

с помощью которого для каждого $\varepsilon \in [0,1]$ из условия $\varepsilon = P_t\{Z(c)\}$ (вероятность инвестора) находим критическое множество

$$X(\varepsilon) = \left\{x \,\middle|\, |x| \geq -\beta \ln \varepsilon\right\},$$

т.е. параметр ε связан с граничными ценами x и $-x$ этого множества соотношением

$$\varepsilon(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{\beta}\right). \tag{16}$$

Проинтегрировав рыночную плотность $f_m(x)$ по множеству $X(\varepsilon)$, получаем его рыночную вероятность

$$\gamma(\varepsilon) = 2\int_{-\beta \ln \varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) du = \varepsilon^{\beta}, \qquad \varepsilon \in [0,1].$$

Далее, интегрирование в равенстве (14) дает

$$b = A\frac{(\beta + \lambda)}{\beta},$$

и с учетом (16) мы приходим к формуле

$$g(x) = B_{cr}(\varepsilon(x)) = A\frac{\beta + \lambda}{\beta} \exp\left(-\frac{\lambda}{\beta}|x|\right).$$

Из платежных функций известных простых опционных комбинаций эту функция в наибольшей степени напоминает платежная функция *баттерфляя*. Напомним, что в финансовой литературе *баттерфляем* называют симметричную по страйкам комбинацию длинного стрэнгла и короткого стрэддла (см., например, [1,5]). Аналогичную комбинацию с коротким стрэнглом и длинным стрэддлом называют *сэндвичем* (или *обратным баттерфляем*).

Фактически, баттерфляй с подходящим сочетанием страйков и объема позиции можно рассматривать как первое приближение к искомой платежной функции $g(x)$ оптимального портфеля. В действительности баттерфляю соответствует кусочно-линейная платежная функция, состоящая из двух отрезков и двух бесконечных лучей. Но такой инструмент лишь приближенно отражает интересы инвестора.

Для нашей задачи, конечно, одного баттерфляя недостаточно. Какую именно комбинацию опционов следует использовать нашему инвестору, зависит от конкретного вида функции $g(x)$. Заметим, что функция $g(x)$ непрерывна, но имеет излом в нуле, при этом (вводится обозначение $\theta = \lambda/\beta$)

$$g(0) = A(1+\theta),$$

$$g'(\pm 0) = \mu A\theta(1+\theta).$$

Поэтому здесь работает представление (11) с $\nu = 0$:

$$\boldsymbol{G} = g(0)\boldsymbol{U} - |g'(0)|(\boldsymbol{P}(0) + \boldsymbol{C}(0)) + A\theta^2(1+\theta)\times$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{P}(x)\exp(\theta x)dx + \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{C}(x)\exp(-\theta x)dx\right).$$

Подставляя значение платежной функции и абсолютное значение ее производных в нуле, получаем

$$\boldsymbol{G} = A(1+\theta)\Big[(\boldsymbol{U} - \theta(\boldsymbol{P}(0) + \boldsymbol{C}(0)) +$$
$$+\theta^2\left(\int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{P}(x)\exp(\theta x)dx + \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{C}(x)\exp(-\theta x)dx\right)\Big].$$

Это и есть представление оптимального портфеля инвестора при $\beta < 1$ в виде континуальной комбинации опционов.

Если $\beta > 1$, то формулы видоизменяются. В этом случае процедура Неймана-Пирсона дает семейство множеств по c, с точностью до граничных точек дополнительных к (15):

$$Z(c) = \left\{ x \,\middle|\, |x| \le \frac{\beta}{1-\beta}\ln\frac{c}{\beta} \right\}.$$

Для каждого $\varepsilon \in [0,1]$ из условия $\varepsilon = P_t\{Z(c)\}$ мы получаем, что

$$X(\varepsilon) = \{x \mid |x| \le -\beta \ln(1-\varepsilon)\}, \qquad \varepsilon \in [0,1],$$

т.е. параметр ε связан с граничными ценами *x* и *–x* этого множества соотношением

$$\varepsilon(x) = 1 - \exp\left(-\frac{|x|}{\beta}\right). \tag{17}$$

Проинтегрировав рыночную плотность $f_m(x)$ по множеству $X(\varepsilon)$, получаем его рыночную вероятность

$$\gamma(\varepsilon) = 2\int_0^{-\beta\ln(1-\varepsilon)} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)du = 1-(1-\varepsilon)^{\beta}, \qquad \varepsilon\in[0,1].$$

Далее, интегрирование в равенстве (14) дает для параметра *b* функции $B_{cr}(\varepsilon;b)$ выражение

$$b = A\frac{\Gamma(\lambda+\beta+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\beta+1)}, \tag{18}$$

где $\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} x^{\mu-1}e^{-x}dx$ – гамма-функция, $\mu > 0$. Поэтому с учетом (17) мы приходим к выражению для платежной функции

$$g(x) = B_{cr}(\varepsilon(x)) = A\frac{\Gamma(\lambda+\beta+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\beta+1)}\left(1-\exp\left(-\frac{|x|}{\beta}\right)\right)^{\lambda}.$$

Функция $g(x)$ снова непрерывна и $g(0) = 0$, но ее производная в нуле зависит от значения параметра λ, а именно

$$g'(\pm 0) = \begin{cases} 0, & \lambda > 1, \\ \pm b/\beta, & \lambda = 1, \\ \pm\infty, & \lambda < 1, \end{cases}$$

здесь и ниже до конца раздела *b* определяется по формуле (18).

Если $\lambda > 1$, то платежная функция в нуле имеет непрерывную и равную нулю производную, каждая ее ветвь в окрестности нуля выпукла, а затем после точки перегиба и до бесконечности – вогнута. Такая функция больше напоминает платежную функцию комбинации двух стрэнглов, одного длинного и одного короткого. При этом страйки обоих стрэнглов расположены симметрично относительно нуля, а страйки длинного стрэнгла ближе к нулю, чем страйки короткого. Эти платежные функции свойственны более расположенным к риску инвесторам.

Если $\lambda = 1$, функция $g(x)$ имеет излом в нуле, и в этом случае она в большей степени напоминает платежную функцию сэндвича в сочетании с длинным безрисковым активом.

Однако и при $\lambda > 1$, и при $\lambda = 1$ упомянутые инструменты даже с наилучшим образом подобранными страйками и объемом позиции можно рассматривать лишь как первое приближение к искомой платежной функции $g(x)$ оптимального портфеля. Их явно недостаточно, чтобы точно отразить интересы нашего инвестора, которые мы условились описывать функцией $B_{cr}(\varepsilon;b)$.

Следуя рекомендациям развиваемой теории, можно воспользоваться представлениями оптимального портфеля, приведенными выше. В обоих случаях можно снова применить представление (11). Имеем

$$\boldsymbol{G} = g(0)\boldsymbol{U} - \left|g'(0)\right|\left(\boldsymbol{P}(0) + \boldsymbol{C}(0)\right) + b(\lambda/\beta)^2 \times$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{P}(x)s(-x)dx + \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{C}(x)s(x)dx \right),$$

где для всех $x \ge 0$

$$s(x) = \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\right)^{\lambda-2} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\left(\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Теперь в соответствии со значениями параметра λ подставим в это представление портфеля конкретный вид функции $g(x)$. При $\lambda > 1$ в этом представлении все неинтегральные слагаемые обращаются в ноль, и оно приобретает вид

$$G = b(\lambda/\beta)^2 \left(\int_{-\infty}^{0} P(x)s(-x)dx + \int_{0}^{\infty} C(x)s(x)dx \right),$$

а при $\lambda = 1$ –

$$G = -b(\lambda/\beta)(P(0) + C(0)) + b(\lambda/\beta)^2 \times$$
$$\times \left(\int_{-\infty}^{0} P(x)s(-x)dx + \int_{0}^{\infty} C(x)s(x)dx \right).$$

В последнем случае $\lambda < 1$ функция $g(x)$ имеет особенность типа "острие" и она походит на платежную функцию безрискового актива с выколотой нулевой ценой актива. В работе [2] отмечалось, что значение $\lambda < 1$ соответствует нерасположенному к риску инвестору, поэтому такой вид платежной функции не должен вызывать удивления.

В этом случае производная функции $g(x)$ в нуле бесконечна и представление (11) теряет смысл. Поэтому вместо него следует использовать представление (12) и учесть, что $g(0) = g'(-\infty) = g'(+\infty) = 0$. Имеем

$$G = b(\lambda/\beta)^2 \left(\int_{-\infty}^{0} (P(x) - P(0))s(-x)dx + \int_{0}^{\infty} (C(x) - C(0))s(x)dx \right).$$

Эта формула дает представление оптимального портфеля инвестора в случае $\beta < 1$ и $\lambda < 1$ в виде континуальной смешанной комбинации опционов колл и пут.

Предложенный подход к построению оптимального портфеля тем не менее носит во многом теоретический характер, хотя мы и пытались отразить в наших представлениях портфеля рыночные реалии. При его использовании мы получаем континуальные комбинации опционов. Для решения проблемы континуума на практике достаточно будет интегралы заменить интегральными суммами, и в нашей задаче точками деления вещественной прямой надо будет выбрать именно рыночные страйки. Однако проблемы остаются. И связаны они с отсутствием полной и достоверной информации о рыночном распределении вероятностей будущей цены базового актива. К решению подобных проблем мы и переходим.

2. Приближенно оптимальный портфель инвестора на реальном рынке опционов

Общая схема построения портфеля, предложенная в предыдущем разделе, была ориентирована на использование вероятностных распределений как инвестора, так и рынка. И если свое распределение инвестор вправе задавать как угодно, то рынок все свои представления о распределении вероятностей будущих цен базового актива отражает исключительно в ценах опционов. На выбранном пути нам пришлось бы рыночные распределения вероятности восстанавливать по ценам опционов.

Поэтому мы предложим сейчас модификацию метода построения оптимального портфеля инвестора непосредственно на основе цен опционов с реальными рыночными страйками. Поскольку восстановление распределения вероятностей по ним, как и все в статистике, производится с погрешностями, этот метод носит приближенный характер.

2.1. Дискретный по страйкам рынок опционов

Рассмотрим рынок опционов, на котором действуют естественные ограничители, и потому на нем присутствуют опционы лишь для конечного множества страйков. Эти страйки пронумерованы в возрастающем порядке и отстоят друг от друга на величину h. Введем необходимые обозначения. Рассматривается множество n страйков E_i, $i \in I'$, и для определенности положим $I' = \{1,2,\dots,n\}$. Иногда, и так будет в приводимом ниже примере, удобнее вводить иную нумерацию множества страйков. Наряду с множеством I' будем рассматривать и подмножество его "внутренних" точек $I = \{2,3,\dots,n-1\}$, а также множество $I^\circ = \{1,2,\dots,n-2\}$ с тем же, как у множества I, количеством элементов. Множество I° применяется далее при установлении определенного порядка во множестве I.

Сначала предположим, что на рынке присутствуют все указанные страйки как для опционов колл, так и для опционов пут. В дальнейшем мы сделаем более реалистичные предположения. Для удобства опционы колл и пут со страйком E_i будем обозначать $\boldsymbol{C}(i)$ и $\boldsymbol{P}(i)$ соответственно, а их цены – $C(i)$ и $P(i)$. Индексами m и t будем помечать все введенные рыночные характеристики с точки зрения самого рынка и инвестора соответственно.

В дискретном случае наряду с плотностями вероятности $f(x)$ будем рассматривать их оценки. В связи со свойством (7) эти оценки естественно задавать в виде вторых разностей либо цен опционов колл, либо цен опционов пут. Поэтому они задаются для всех рассматриваемых точек E_i за исключением двух крайних, соответствующих значениям $i = 1, n$, поскольку для них вторая разность не определена. Оценку плотности вероятности в точке E_i обозначим $\tilde{f}(i)$. Итак, либо

$$\tilde{f}(i) = \frac{1}{h^2}\Delta_2 C(i), \qquad i \in I, \tag{19}$$

либо

$$\tilde{f}(i) = \frac{1}{h^2}\Delta_2 P(i), \qquad i \in I, \tag{20}$$

где

$$\Delta_2 H(i) = H(i+1) - 2H(i) + H(i-1). \tag{21}$$

В теоретической конструкции оба выражения (19) и (20) должны давать один и тот же результат, на реальном рынке эти характеристики могут различаться, хотя и незначительно.

Основное свойство плотности вероятности гласит, что интеграл от нее по всей вещественной прямой равен 1. Этому свойству должно отвечать аналогичное свойство для оценки плотности вероятности (19) или (20). А именно, суммирование (19) по всем $i \in I$ с предварительным умножением на h (элемент вероятности равен произведению плотности вероятности на длину интервала) дает

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{i\in I}\tilde{f}(i)\,h = \frac{1}{h}\sum\nolimits_{i\in I}\bigl(C(i-1) - 2C(i) + C(i+1)\bigr) = \\ = \frac{1}{h}\bigl(C(0) - C(1) - C(n) + C(n+1)\bigr) \approx C'(n+1) - C'(0) \approx 1.\end{gathered} \tag{22}$$

В последнем равенстве используется свойство (4), а также незначительность вероятности превышения ценой базового актива по абсолютной величине уровня крайних страйков.

Аналогичное соотношение имеет место и для представления (20) (при этом используется свойство (5)):

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{i\in I}\tilde{f}(i)\,h &= \frac{1}{h}\sum\nolimits_{i\in I}\big(P(i-1)-2P(i)+P(i+1)\big)=\\ &=\frac{1}{h}\big(P(0)-P(1)-P(n)+P(n+1)\big)\approx P'(n+1)-P'(0)\approx 1.\end{aligned}\tag{23}$$

Из свойства (6) для производных цен опционов колл и пут по страйку следует, что для всех $i \in I$

$$C(i+1)-C(i)+h = P(i+1)-P(i).$$

Поэтому, а также в силу того, что вторая разность является первой разностью двух соседних первых разностей, мы получим, заменяя одну из первых разностей для колла разностью для пута и наоборот, еще два возможных представления оценки плотности вероятности, а именно, для всех $i \in I$

$$\tilde{f}(i)=\frac{1}{h^2}\big(C(i+1)-C(i)-\big(P(i)-P(i-1)-h\big)\big)\tag{24}$$

и

$$\tilde{f}(i)=\frac{1}{h^2}\big(P(i+1)-P(i)-\big(C(i)-C(i-1)+h\big)\big).\tag{25}$$

Рассмотрим и вариант смешанного представления, который важен для реального рынка. Разделим множество всех страйков на две группы страйком с индексом a – E_a. Лишь для этого страйка при образовании второй разности используем и опцион колл, и опцион пут, причем по формуле (24). При $i > a$ используем только коллы, при $i < a$ – только путы. Этот пороговый индекс a обычно располагается примерно в середине множества I.

Тогда вместо формул (22) и (23) будем иметь

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_{i\in I}\tilde{f}(i)\,h = \frac{1}{h}\sum\nolimits_{i<a}\big(P(i-1)-2P(i)+P(i+1)\big)+ \\
+\frac{1}{h}\sum\nolimits_{i>a}\big(C(i-1)-C(i)+C(i+1)\big)+ \\
+\frac{1}{h}\big(C(a+1)-C(a)-P(a)+P(a-1)+h\big)= \\
=\frac{1}{h}\big(P(0)-P(1)-P(a-1)+P(a)+ \\
+C(a)-C(a+1)-C(n)+C(n+1)\big)+ \\
+\frac{1}{h}\big(C(a+1)-C(a)-P(a)+P(a-1)+h\big)= \\
=\frac{1}{h}\big(P(0)-P(1)-C(n)+C(n+1)+h\big)\approx \\
\approx C'(n+1)-P'(0)+1\approx 1.
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

Таким образом, теоретически, не имеет значения, какую из вторых разностей мы используем. Получающиеся оценки эквивалентны. Однако иное дело – реальный рынок. Реальные цены опционов могут не удовлетворять основным свойствам вероятностных распределений. Определяющими здесь могут быть три фактора. Во-первых, это просто игра случая; во-вторых, сказываются более сложные взаимоотношения риска с доходностью инструментов; в-третьих, процентная ставка не равна нулю.

Проще всего было бы предположить, что нарушение соотношений (22), (23) или (26) обусловлено действием третьего фактора. Тогда можно было бы ввести в модель при определении цен опционов корректирующий множитель с тем, чтобы упомянутые соотношения выполнялись. К сожалению, реальность сложнее. Однако все эти вопросы остаются за рамками данного исследования.

Итак, мы будем принимать, что приближенное равенство единице суммы оценок вероятностей по всем страйкам, какие бы варианты вторых разностей для этого ни использовались, имеет место, т.е. соотношения (22), (23) или (26) выполняются.

2.2. Алгоритм построения приближенно оптимального портфеля инвестора на реальном рынке

На реальном рынке при необходимости можно воспользоваться любой из четырех предложенных оценок плотности вероятности цены актива в зависимости от цели инвестирования.

Допустим, что мы получили рыночную оценку плотности вероятности $\tilde{f}_m(i)$, $i \in I$. Инвестор, имея свое представление о плотности вероятности $f_t(x)$, $x \in R$, может найти теоретические цены опционов колл и пут по формулам (1) и (2) и затем преобразовать их в оценки $\tilde{f}_t(i)$ по любой из формул (19), (20), (24), (25). Поскольку в основе такого преобразования при любом варианте расчета второй разности используется одна и та же плотность вероятности $f_t(x)$, результат получается один и тот же.

Далее в соответствии с алгоритмом из [2] и критерием Неймана-Пирсона [3] образуем отношение правдоподобия

$$\tilde{L}(i) = \frac{\tilde{f}_m(i)}{\tilde{f}_t(i)}, \qquad i \in I, \tag{27}$$

и упорядочиваем все страйки из множества I по убыванию этого отношения. Обозначим через π взаимооднозначное отображение множества I на множество $I^\circ = \{1,2,\ldots, n\text{–}2\}$, отвечающее устанавливаемому отношением (27) порядку во множестве I, т.е.

$$\tilde{L}(\pi(k)) \geq \tilde{L}(\pi(l)), \quad \textit{если} \quad k < l. \tag{28}$$

(Если отношение правдоподобия в двух точках совпадает, то выбор порядка в перестановке для этих точек произволен.) Обратное к $\pi(i)$, $i \in I^\circ$, отображение обозначим ω. Оно взаимооднозначно отображает I° на I, и для него тождественно по $i \in I$ выполняется $\omega(\pi(i)) = i$.

Теперь нам предстоит строить портфель опционов, наилучшим образом отражающим интересы инвестора. Инвестора, как и в [2], будем характеризовать функцией $B(\varepsilon)$ из континуальной модели *VaR*, что означает намерение инвестора обеспечить выполнение неравенств

$$P_t\left\{B \geq B(\varepsilon)\right\} \geq 1-\varepsilon, \qquad \varepsilon \in [0,1], \tag{29}$$

при этом предпочтение отдается меньшим значениям ε, т.е. удовлетворять эти неравенства нужно, начиная с $\varepsilon = 0$ и продвигаясь в сторону больших значений по возможности вплоть $\varepsilon = 1$.

При построении портфеля в качестве "строительных блоков" будем использовать инструменты, которые соответствуют способам получения оценок плотности вероятности из стоимостей опционов (см. формулы (19), (20), (24), (25)). Эти инструменты можно называть "вторыми разностями" опционов в точках, соответствующих страйкам, и обозначать $\boldsymbol{G}(i)$.

В качестве иллюстрации воспользуемся представлениями (19) и (24). Так, страйку E_i, $i \in I$, в соответствии с формулой (19) сопоставим инструмент, состоящий из *двух длинных опционов колл со страйками* E_{i-1} *и* E_{i+1} *и двух коротких опционов колл со страйком* E_i, а в соответствии с формулой (24) – из *одного длинного опционов пут и одного длинного опциона колл со страйками* E_{i-1} *и* E_{i+1} *соответственно, двух коротких опционов колл и пут со страйком* E_i *и одного длинного безрискового актива в количестве* h.

Оба эти инструмента фактически определяются одной и той же платежной функцией и являются *баттерфляем* – комбинацией длинного стрэнгла и короткого стрэддла. Поскольку в нашей задаче каждый такой инструмент $\boldsymbol{G}(i)$ означает комбинацию опционов с тремя соседними страйками, его будем называть *элементарным баттерфляем*.

Если суммировать инструменты $\boldsymbol{G}(i)$ с некоторыми весовыми множителями, можно получать самые разнообразные инструменты. Под инструментом $\boldsymbol{G}(Y)$, где Y – произвольное подмножество I, понимается портфель из инструментов $\boldsymbol{G}(i)$, соответствующих страйкам E_i, $i \in Y$, каждый в единственном числе. Очевидно, он является дискретным аналогом инструмента "индикатор множества".

В соответствии с (27) и (28) построим систему подмножеств X_k множества I по правилу

$$X_k = \left\{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(k)\right\}, \qquad k \in I^\circ .$$

Рассмотрим возрастающую последовательность критических доходов B_k, $k \in I^\circ$, которая получается из возрастающей функции $B(\varepsilon)$ по следующему правилу. Сопоставим каждому страйку E_i "вероятность" инвестора $h\tilde{f}_t(i)$. Тогда множеству X_k будет отвечать "вероятность" инвестора

$$\varepsilon_k = \tilde{P}_t\{X_k\} = h\sum_{i=1}^{k} \tilde{f}_t\bigl(\pi(i)\bigr), \qquad k \in I^\circ. \tag{30}$$

Положим теперь

$$B_k = B(\varepsilon_k), \qquad k \in I^\circ, \tag{31}$$

и рассмотрим инструмент

$$\boldsymbol{G} = B_1\boldsymbol{G}\bigl(\overline{X_0}\bigr) + (B_2 - B_1)\boldsymbol{G}\bigl(\overline{X_1}\bigr) + \ldots + (B_{n-2} - B_{n-3})\boldsymbol{G}\bigl(\overline{X_{n-3}}\bigr)$$

(сумма инструментов определяется как инструмент, отвечающий сумме платежных функций складываемых инструментов).

Перепишем равенство, по-иному группируя слагаемые:

$$\boldsymbol{G} = B_1\boldsymbol{G}\bigl(\pi(1)\bigr) + B_2\boldsymbol{G}\bigl(\pi(2)\bigr) + \ldots + B_{n-2}\boldsymbol{G}\bigl(\pi(n-2)\bigr). \tag{32}$$

Таким образом, мы получаем, что предпочтениям инвестора отвечает взвешенная сумма инструментов $\boldsymbol{G}(i)$, причем именно весовые коэффициенты характеризуют его предпочтения. Как и в [2], можно сказать, что чем более круто растет функция $B(\varepsilon)$ в окрестности $\varepsilon = 1$ (или последовательность B_k вблизи $k = n$–2), тем меньше проявляет инвестор нерасположенность к риску, и наоборот.

Если B_1 является отрицательной величиной, то это значит, что инвестор использует короткие позиции по инструментам, соответствующим реализациям цены актива с относительно небольшими с его точки зрения вероятностями, с тем чтобы вырученные от этого средства направлять на приобретение инструментов, соответствующих реализациям цены актива с относительно большими вероятностями, что также говорит о его большей расположенности к риску.

Если раскрыть содержание "строительных блоков" в (32), то можно получить выражение инструмента $\boldsymbol{G}$ непосредственно через опционы колл или пут. Так, например, используя (19) и (21), формулу (32) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} = B_1\big(\boldsymbol{C}(\pi(1)-1) - 2\boldsymbol{C}(\pi(1)) + \boldsymbol{C}(\pi(1)+1)\big) + \\ + B_2\big(\boldsymbol{C}(\pi(2)-1) - 2\boldsymbol{C}(\pi(2)) + \boldsymbol{C}(\pi(2)+1)\big) + \ldots \\ \ldots + B_{n-2}\big(\boldsymbol{C}(\pi(n-2)-1) - 2\boldsymbol{C}(\pi(n-2)) + \boldsymbol{C}(\pi(n-2)+1)\big). \end{aligned} \tag{33}$$

Перепишем полученную формулу, группируя слагаемые, соответствующие одному и тому же страйку. Кроме того, воспользуемся обратным к π отображением ω. В результате равенство (33) приобретает вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} = B(\omega(2))\boldsymbol{C}(1) + \big(B(\omega(3)) - 2B(\omega(2))\big)\boldsymbol{C}(2) + \\ + \sum\nolimits_{i=3}^{n-2}\big(B(\omega(i-1)) - 2\,B(\omega(i)) + B(\omega(i+1))\big)\boldsymbol{C}(i) + \\ + \big(B(\omega(n-2)) - 2B(\omega(n-1))\big)\boldsymbol{C}(n-1) + B(\omega(n-1))\boldsymbol{C}(n). \end{aligned} \tag{34}$$

Это представление портфеля инвестора можно считать окончательным. В общем случае "оптимальный" инструмент инвестора оказывается комбинацией всех имеющихся на рынке опционов колл (или пут). При этом в короткой позиции оказываются опционы со страйками, доставляющими *наименьшие* значения отношению правдоподобия (27).

Точно так же мы можем получить аналогичную формулу, дающую представление инструмента $\boldsymbol{G}$ в терминах путов. Она получается простой заменой в (34) обозначения $\boldsymbol{C}$ опциона колл обозначением опциона пут $\boldsymbol{P}$, т.е.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} = B(\omega(2))\boldsymbol{P}(1) + \big(B(\omega(3)) - 2B(\omega(2))\big)\boldsymbol{P}(2) + \\ + \sum\nolimits_{i=3}^{n-2}\big(B(\omega(i-1)) - 2\,B(\omega(i)) + B(\omega(i+1))\big)\boldsymbol{P}(i) + \\ + \big(B(\omega(n-2)) - 2B(\omega(n-1))\big)\boldsymbol{P}(n-1) + B(\omega(n-1))\boldsymbol{P}(n). \end{aligned}$$

Теоретически, этот инструмент должен иметь ту же стоимость, что и инструмент (34). Но на реальном рынке это не обязательно так. Применяя представления инструмента $\boldsymbol{G}$ с помощью различных смешанных вторых разностей, можно получить и другие формулы с одновременным участием и коллов, и путов. Такое построение мы проделаем несколько ниже лишь для одного частного случая, в значительной мере соответствующего картине реального рынка.

В случае простой структуры системы множеств X_k, например, когда для каждого k множество X_k получается из X_{k-1} присоединением одного из соседних к множеству X_{k-1} страйка, этой формуле можно было бы придать более наглядный вид. Однако в каждом конкретном случае такое представление лучше получать непосредственно по предложенной схеме.

Переходим к рассмотрению случая, представляющего интерес при практической реализации методики, когда множество всех страйков разделено на две группы страйком с индексом a – E_a. При этом лишь для этого страйка на рынке присутствует и опцион колл, и опцион пут. Для остальных страйков – опцион лишь одного типа. При $i > a$ есть только коллы, при $i < a$ – только путы.

В рассматриваемом случае при образовании "вторых разностей" у инвестора выбора нет. При $i > a$ эти инструменты строятся исключительно из коллов в соответствии с (19), при $i < a$ – из путов (равенство (20)), а при $i = a$ – из тех и других по формуле (24), что означает использование при $i = a$ наряду с коллами и путами также безрискового актива в объеме h.

Поэтому "оптимальный" портфель инвестора принимает вид

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G} = {} & B(\omega(2))\boldsymbol{P}(1) + \left(B(\omega(3)) - 2B(\omega(2))\right)\boldsymbol{P}(2) + \\
& + \sum\nolimits_{i=3}^{a-1}\left(B(\omega(i-1)) - 2\,B(\omega(i)) + B(\omega(i+1))\right)\boldsymbol{P}(i) + \\
& + \left(B(\omega(a-1)) - B(\omega(a))\right)\boldsymbol{P}(a) + hB(\omega(a)) + \\
& + \left(B(\omega(a+1)) - B(\omega(a))\right)\boldsymbol{C}(a) + \\
& + \sum\nolimits_{i=a+1}^{n-2}\left(B(\omega(i-1)) - 2\,B(\omega(i)) + B(\omega(i+1))\right)\boldsymbol{C}(i) + \\
& + \left(B(\omega(n-2)) - 2B(\omega(n-1))\right)\boldsymbol{C}(n-1) + B(\omega(n-1))\boldsymbol{C}(n).
\end{aligned} \tag{35}$$

Рыночная стоимость этого инструмента наименьшая при выполнении ограничений (29). Эта стоимость получается, если все входящие в сумму инструменты оцениваются по рынку, т.е. если все вхождения $\boldsymbol{P}(i)$ и $\boldsymbol{C}(i)$ в последней формуле заменить $P_m(i)$ и $C_m(i)$ соответственно. В результате мы получим рыночную стоимость G_m единичного инструмента $\boldsymbol{G}$, и чтобы инвестировать в этот инструмент сумму A, необходимо приобрести A/G_m таких инструментов.

Если же в качестве стоимости слагаемых инструментов вставить в формулу оценки инвестора $P_t(i)$ и $C_t(i)$, то мы получим предполагаемый доход G_t инвестора от вложения в инструмент $\boldsymbol{G}$ с точки зрения самого инвестора и общий его доход от вложения суммы A в этот инструмент равный $AG_t/G_{m.}$

2.3. Иллюстрация построения приближенно оптимального портфеля инвестора

Рассмотрим модель рынка и инвестора, в основе которой лежат предположения и конструкции *примеров* 2 и 3 из работы [2]. В них для инвестора и рынка используются распределения вероятностей цены актива, относящиеся к одному и тому же типу, а именно к часто используемому на финансовых рынках (см., например, [4]) двустороннему двухпараметрическому экспоненциальному распределению $Exp(\alpha,\beta)$ с произвольным параметром α и $\beta > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right), \qquad x \in R, \tag{36}$$

при этом распределения вероятностей для инвестора и рынка будут различаться параметрами.

Как следует из изложения приведенной выше теории, в данной работе для нас важны не сами распределения, а цены опционов (колл и пут), как для рынка, так и для инвестора. Но вычисляться эти цены должны именно по этим распределениям.

Снова для упрощения записи математические ожидания обоих распределений принимаются равными нулю ($\alpha = 0$), что никак не влияет на содержательность результатов, так как имеет значение лишь взаимное расположение распределений на оси цен.

Стоимость опциона колл для распределения с плотностью (36), где $\alpha = 0$, составляет

$$C(E;0,\beta)=\frac{1}{2}\left(\beta\exp\left(-\frac{|E|}{\beta}\right)+|E|-E\right). \qquad (37)$$

Предположим теперь (как и в [2]), что рынку отвечает распределение $Exp(0,1)$, а инвестору – $Exp(0,\beta)$, причем $\beta < 1$.

Будем предполагать, что на рынке присутствуют опционы для нечетного числа страйков $n = 2m + 1$, из них один страйк расположен в нуле, m страйков лежат левее нуля, отстоя друг от друга (начиная с нуля) на h, и m страйков – симметрично правее нуля. В нашем примере в силу симметрии в качестве исходного множества индексов страйков удобнее принять $I' = \{-m,\ldots,-1,0,1,\ldots,m\}$. Тогда множество "внутренних" индексов $I = \{-m+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,m-1\}$, а множество $I^{\circ} = \{1,2,\ldots,2m-1\}$. Страйку, который разделяет рыночные коллы и путы и являющийся единственным, с которым на рынке торгуются и те, и другие, естественно приписать индекс $a = 0$.

Тогда в соответствии с (37) для всех $i \in I'$ и $i \geq 0$

$$C_m(i)=P_m(-i)=\frac{1}{2}\exp(-ih),$$

$$C_t(i)=P_t(-i)=\frac{\beta}{2}\exp\left(-\frac{ih}{\beta}\right).$$

Хотя рассматриваемые распределения вероятностей являются хорошей аппроксимацией реально наблюдаемых на рынке распределений, трудно ожидать, что рыночные цены опционов будут столь строго отвечать данному симметричному распределению. Однако для нас пример интересен как иллюстративный.

В соответствии с процедурой построения "оптимального" портфеля инвестора составим вторые разности цен опциона для рынка и инвестора и с их помощью отношение правдоподобия, а затем упорядочим эти отношения для разных страйков по убыванию. Так мы получим способ определения последовательности вложенных друг в друга множеств X_k, на дополнении к которым следует проверять ограничения критерия VaR.

Несложные выкладки позволяют получить из (19), (20), (21) равенства

$$\tilde{f}_m(i) = \frac{1}{2h^2}\exp(-h|i|)(\exp(h) + \exp(-h) - 2), \quad i \in I \setminus \{0\},$$

а из (24) –

$$\tilde{f}_m(0) = \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2}(1 - \exp(-h)).$$

Аналогично для оценок плотности вероятности инвестора имеем

$$\tilde{f}_t(i) = \frac{\beta}{2h^2}\exp\left(-\frac{h|i|}{\beta}\right)\left(\exp\left(\frac{h}{\beta}\right) + \exp\left(-\frac{h}{\beta}\right) - 2\right), \; i \in I \setminus \{0\}, \quad (38)$$

и

$$\tilde{f}_t(0) = \frac{1}{h} - \frac{\beta}{h^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{h}{\beta}\right)\right). \quad (39)$$

Следующим шагом определения "оптимального" портфеля инвестора будет упорядочение всех "внутренних" страйков $i \in I$ по убыванию отношения правдоподобия. Применяя отношение правдоподобия (27) к рассматриваемому примеру, видим, что два наибольших (совпадающих между собой) значения это отношение принимает при $i = \pm(m{-}1)$, следующие по убыванию два значения (они также совпадают между собой) оно принимает при $i = \pm(m{-}2)$ и т.д., наименьшее – при $i = 0$.

Составим упорядоченный набор, который будет означать результат применения отображения π к набору $I°$:

$$\pi\{1, 2, \ldots, 2m-1\} = \{-m+1, m-1, -m+2, m-2, \ldots, -1, 1, 0\}. \quad (40)$$

По нему очевидным образом восстанавливается обратное отображение ω:

$$\begin{gathered}\omega\{-m+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,m-1\}= \\ =\{1,3,\ldots,2m-3,2m-1,2m-2,\ldots,4,2\}.\end{gathered} \tag{41}$$

В силу равенства отношения правдоподобия в симметричных относительно нуля точках отображение π может быть выбрано неединственным способом. Для определенности здесь принимается, что при равенстве отношения правдоподобия в двух точках отрицательному страйку приписывается меньший номер в наборе I°.

Теперь определяется система множеств

$$X_k=\{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(k)\},\ k\in I^{\circ},$$

т.е. для каждого $k \in I^{\circ}$ в качестве множества X_k принимается совокупность первых k элементов набора в правой части (40).

Далее по оценкам плотности вероятности инвестора определяются коэффициенты B_k. Но для этого сначала необходимо задаться функцией критических доходов $B(\varepsilon)$. Ее можно взять, например, в виде

$$B(\varepsilon)=(1+\theta)A\,\varepsilon^{\lambda},\qquad \theta=\lambda/\beta,\quad \lambda>0. \tag{42}$$

С функцией $B(\varepsilon)$ такого типа мы имели дело в *примере* 3 работы [2]. Данный конкретный вид она приобретает в том случае, когда все ресурсы инвестора идут на выполнение неравенств (29), и на максимизацию среднего дохода инвестиционных возможностей у него не остается, а также $b_2 = 0$. Используя формулы (38) и (39) оценок плотности вероятности инвестора для разных страйков, по формуле (30) определяем "вероятности" ε_k. Имеем

$$\varepsilon_1=h\,\tilde{f}_t(-m+1)=\frac{\beta}{2h}\exp\left(-\frac{h(m-1)}{\beta}\right)\left(\exp\left(\frac{h}{\beta}\right)+\exp\left(-\frac{h}{\beta}\right)-2\right),$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1+h\,\tilde{f}_t(m-1)=\frac{\beta}{h}\exp\left(-\frac{h(m-1)}{\beta}\right)\left(\exp\left(\frac{h}{\beta}\right)+\exp\left(-\frac{h}{\beta}\right)-2\right),$$

$$\ldots,$$

$$\varepsilon_{2j-1} = \varepsilon_{2j-2} + h\tilde{f}_t(-m+j) =$$
$$= \varepsilon_{2j-2} + \frac{\beta}{2h}\exp\left(-\frac{h(m-j)}{\beta}\right)\left(\exp\left(\frac{h}{\beta}\right) + \exp\left(-\frac{h}{\beta}\right) - 2\right),$$

$$\varepsilon_{2j} = \varepsilon_{2j-1} + h\tilde{f}_t(m-j) =$$
$$= \varepsilon_{2j-2} + \frac{\beta}{h}\exp\left(-\frac{h(m-j)}{\beta}\right)\left(\exp\left(\frac{h}{\beta}\right) + \exp\left(-\frac{h}{\beta}\right) - 2\right),$$

$$j = 2,3,\ldots,m-1,$$

$$\ldots,$$

$$\varepsilon_{2m-1} = \varepsilon_{2m-2} + h\tilde{f}_t(0) = \varepsilon_{2m-2} + 1 - \frac{\beta}{h}\left(1 - \exp\left(-\frac{h}{\beta}\right)\right).$$

Применяя равенства (31) и (42), получаем последовательно весовые коэффициенты портфеля инвестора B_k

$$B_k = B(\varepsilon_k) = (1+\theta)A\varepsilon_k^{\lambda}, \quad k \in I^{\circ}.$$

Нам остается воспользоваться представлением портфеля (35), а также отображением ω (41). В результате мы получаем окончательно представление "оптимального" портфеля инвестора в виде

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{G} = B_1\boldsymbol{P}(-m) + (B_3 - 2B_1)\boldsymbol{P}(-m+1) + \\
+ \sum_{i=-m+2}^{-1}(B_{2m+2i-3} - 2B_{2m+2i-1} + B_{2m+2i+1})\boldsymbol{P}(i) + \\
+ (B_{2m-3} - B_{2m-1})\boldsymbol{P}(0) + hB_{2m-1} + (B_{2m-2} - B_{2m-1})\boldsymbol{C}(0) + \\
+ (B_{2m-1} - 2B_{2m-2} + B_{2m-4})\boldsymbol{C}(1) + \\
+ \sum_{i=2}^{m-2}(B_{2m-2i+2} - 2B_{2m-2i} + B_{2m-2i-2})\boldsymbol{C}(i) + \\
+ (B_2 - 2B_4)\boldsymbol{C}(m-1) + B_2\boldsymbol{C}(m-1).
\end{gathered} \tag{43}$$

Приведение полной формулы ввиду ее громоздкости здесь нецелесообразно. Фактически, мы построили алгоритм нахождения весовых коэффициентов "оптимального" портфеля, сформировав его последовательными шагами. Последующее использование вычислительной техники превращает интересующую инвестора проблему в разряд технической.

Стоит отметить следующее свойство полученного портфеля. Несмотря на то, что плотности вероятности инвестора и рынка для цены базового актива симметричны относительно нуля, "оптимальный" инструмент такой симметрией уже не обладает. Действительно, коэффициенты при путах и коллах с симметричными относительно нуля страйками не совпадают между собой.

Однако определенная симметрия все же сохраняется. Дело в том, что неоднозначность построения последовательности системы множеств $\{X_k, k \in I^{\circ}\}$ такова, что для каждой такой системы найдется другая, получающаяся из первой зеркальным отражением относительно нуля. Соответственно "оптимальным" в нашем примере будет не только портфель (43), но и портфель, получающийся из него зеркальным отражением относительно нуля всех его весовых коэффициентов.

В заключение укажем, какие необходимо провести изменения в предложенной процедуре, если вероятностные представления о рынке самого рынка и инвестора меняются местами. Этот случай можно смоделировать, если приписать рынку и инвестору, например, те же, что и ранее, распределения $Exp(0,1)$ и $Exp(0,\beta)$ соответственно, только на этот раз положить $\beta > 1$. Все формулы оценки плотностей вероятности для рынка и инвестора сохраняют силу. Равно как и формула, выражающая отношение правдоподобия этих оценок. Однако теперь отношения правдоподобия для разных "внутренних" страйков в силу $\beta > 1$ имеют обратный по сравнению с прежним порядок, а именно

$$\pi\{1,2,\ldots,2m-1\} = \{0,1,-1,\ldots,m-2,-m+2,m-1,-m+1\}.$$

В этом отображении мы выбираем в точности обратный порядок к представленному формулой (40), хотя здесь вновь можно было бы воспользоваться произволом, проистекающим из равенства отношения правдоподобия в симметричных относительно нуля точках. Соответственно трансформируется и обратное к π отображение ω:

$$\omega\{-m+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,m-1\} =$$
$$=\{2m-1,\ 2m-3,\ldots,5,3,1,2,4\ldots\ 2m-4,2m-2\}.$$

Последовательность "вероятностей" инвестора ε_k, $k \in I^\circ$, вновь определяется с помощью формул (38) и (39), но на этот раз суммирование вероятностей начинается от центра распределения к краям, как того требует отображение π. Выписывание необходимой для ее вычисления рекуррентной процедуры, аналогичной случаю $\beta < 1$, мы опускаем. Далее, как и прежде, проводится вычисление весовых коэффициентов B_k, $k \in I^\circ$, для новой последовательности ε_k. Таким образом, построение портфеля завершается.

Литература

1. Маршалл Дж. Ф., Бансал В. К. Финансовая инженерия. М.: ИНФРА-М, 784 с.
2. Агасандян Г.А. Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь (VaR). М.: ВЦ РАН, 2001. 34 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Наука, 1975.
4. Рей К.И. Рынок облигаций. Торговля и управление рисками. М.: Дело, 1999. 600 с.
5. Агасандян Г.А. Обобщенные опционы. М.: ВЦ РАН, 2000. 20 с.

Оглавление