Криничанский К.В., Безруков А.В. Некоторые практические задачи модели оптимизации портфеля// Журнал экономической теории. – 2012. – № 3. – С. 142–147

УДК 336.76

Криничанский К.В., д.э.н.,
профессор ЮУрГУ (НИУ)

Безруков А.В.,
ст. преп. ЮУрГУ (НИУ)

НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ

Ключевые слова

Теория инвестиционного портфеля, инвестиционный анализ, оптимизация портфеля, ценообразование на рынке капитала.

Key words

Portfolio Selection; Investment Analysis; Portfolio Optimization; Capital Asset Pricing.

1. Введение

Методы решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг предложены в ряде работ зарубежных авторов: Harry M. Markowitz (1952, 1956) [4], William F. Sharpe (1963) [7], James Tobin (1958, 1965) [8] и др.

В ряде работ, вышедших на русском языке, в более или менее подробном изложении были предложены алгоритмы решения частных задач, составляющих модель оптимизации инвестиционного портфеля [2, с. 195–256; 3]. Отдельный интерес представляют методы определения структуры касательного портфеля (оптимизация для случая возможности безрискового заимствования и кредитования), не требующие определения «угловых» портфелей. В частности, такой алгоритм предложен в работе Elton Edwin J., Gruber Martin J., Padberg Manfred D. (1976) [5] и приложен в работе У. Шарпа, Г. Александера и Дж. Бэйли [2, с. 253–255]. Однако данный метод имеет недостатки, так как требует анализа рыночной модели и извлечения из нее таких данных, как коэффициент «бета» (β_{iI}) и параметр несистематического риска ($\sigma_{\varepsilon i}^2$). Недостатки состоят в относительно большом количестве расчетов и нестабильности значений обозначенных параметров.

В настоящей статье предлагается решение задачи определения параметров касательного портфеля в рамках обобщения модели Г. Марковица на случай безрискового заимствования и кредитования. Оптимизация (расчет эффективной границы) осуществляется с использованием функции Лагранжа путем введения линейных уравнений функции полезности агента в качестве критических линий.

В качестве расчетных параметров нас интересуют такие параметры касательного портфеля, как координаты точки касания с эффективным фронтом, значения ожидаемой доходности и риска портфеля, структура портфеля. Предлагаемая модель позволяет также получить аналитический вид уравнения эффективного множества с условием заимствования и кредитования по безрисковой ставке (вид уравнения *CML*).

2. Модель

Дана функция $\sigma_p^2 = \sigma_p^2(r_p)$, выражающая зависимость риска портфеля ценных бумаг от ожидаемой доходности такого портфеля. График данной функции[1] является кривой второго порядка, а следовательно, выражается полиномом $y(x) = ax^2 + bx + c$, где $x = r_p$, $y(x) = \sigma_p^2$ (см. рис. 1).

На основе исходных данных о доходностях имеющихся ценных бумаг или характеристиках их распределения местоположение данной кривой можно определить с помощью методов оптимизации с использованием функции Лагранжа (см. изложение ниже, а также п. 3 и Приложение к данной работе).

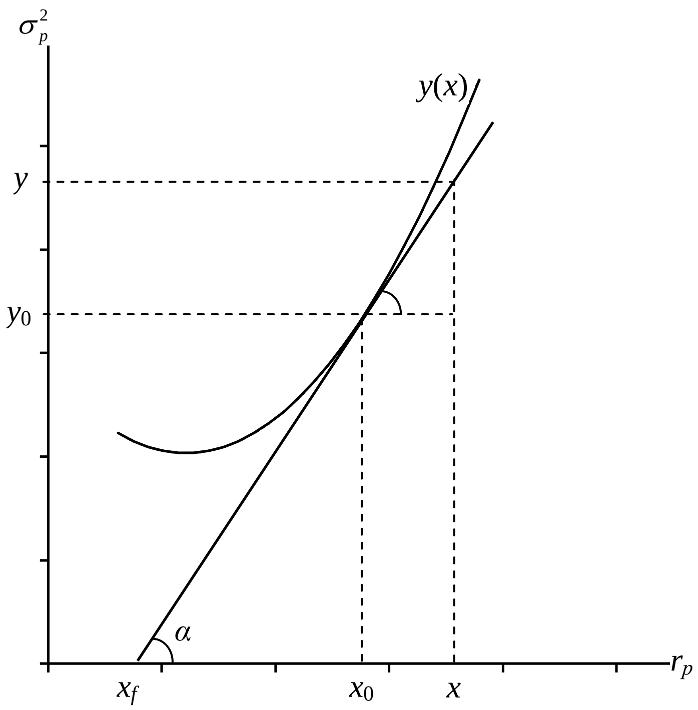

Рисунок 1.

Осуществим вывод уравнения касательной $y = y_{кас}$ к графику функции $y = y(x) = ax^2 + bx + c$. Для этого запишем выражения для тангенса угла α:

$$tg\ \alpha = \frac{y_{кас} - y_0}{x - x_0} \text{ и}$$

$$tg\ \alpha = \frac{y_{кас} - 0}{x - x_f},$$

где x_f – доходность безрискового актива.

[1] См., например: [3, с. 25–26].

Так как тангенс угла α равен также производной функции $y(x)$ в точке x_0: $tg\ \alpha = y'(x_0)$, то можно записать:

$$y_{\text{кас}} = y'(x_0)\cdot(x - x_0) + y_0, \qquad (1)$$

где $y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$; $y'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Также верно:

$$y_{\text{кас}} = y'(x_0)\cdot(x - x_f). \qquad (2)$$

Приравняем друг к другу выражения (1) и (2):

$$(2ax_0 + b)\cdot(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)\cdot(x - x_f)$$

Перемножим выражения в скобках и приведем подобные члены:

$$-(2ax_0 + b)\cdot x_0 + ax_0^2 + bx_0 + c = -(2ax_0 + b)\cdot x_f.$$

Теперь можно найти точку $(x_0;\ y_0)$ касания прямой $y_{\text{кас}}$ и графика $\sigma_p^2(r_p)$ через заранее задаваемые значения x_f. Имеем квадратное уравнение

$$ax_0^2 - 2ax_f \cdot x_0 - bx_f - c = 0.$$

Его корни:

$$x_0 = \frac{2a\cdot x_f \pm \sqrt{4a^2\cdot x_f^2 + 4a\cdot(b\cdot x_f + c)}}{2a}.$$

Так как корень $x_0 = \frac{2a\cdot x_f - \sqrt{4a^2\cdot x_f^2 + 4a\cdot(b\cdot x_f + c)}}{2a}$ задает касательную к левой ветви параболы, которая уже не является частью эффективного фронта, будем считать данный корень посторонним.

Тогда имеем единственный корень:

$$x_0 = \frac{2a\cdot x_f + \sqrt{4a^2\cdot x_f^2 + 4a\cdot(b\cdot x_f + c)}}{2a}. \qquad (3)$$

Зная x_0 находим вторую координату:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c. \qquad (4)$$

Коэффициенты a, b, c можно найти с помощью построения модели множественной регрессии σ_p^2 на r_p и r_p^2 или – в том случае, если график построен с помощью программного приложения, например, MS Excel – посредством выведения уравнения тренда на график $\sigma_p^2(r_p)$. Использование второго способа более привлекательно, однако оно предполагает нахождение местоположения точек в пространстве $(r_p,\ \sigma_p^2)$, соответствующих эффективному множеству портфелей по Марковицу.

Для осуществления оптимизации (расчета координат точек, составляющих эффективную границу), введем линейное уравнение функции полезности агента

$$U = \psi r_p - \sigma_p^2,$$

в котором параметр неприятия риска ψ будем использовать как переменную, задающую положение (наклон) функции U, выступающей в данном случае в качестве критической линии к воображаемому эффективному фронту. Определение параметров риска и доходности портфеля для заданной функции полезности (заданном параметре ψ) осуществляется с использованием функции

Лагранжа. Общий ход решения данной задачи можно проследить, например, в работе Л.С. Тарасевича, П.И. Гребенникова, А.И. Леусского [1, с. 173–174].

Покажем развернутое доказательство соответствующей модели.

Итак, при заданных параметрах распределения доходностей ценных бумаг (известных средних, стандартных отклонениях доходности каждой бумаги и корреляциях доходности), а также параметре неприятия риска ψ задача оптимизации сводится к решению условия

$$L = \psi r_p - \sigma_p^2 - \lambda(\sum_{j=1}^{N} g_j - 1) \to \max,$$

то есть определению структуры портфеля, максимизирующего функцию полезности.

Для примера с тремя ценными бумагами функция Лагранжа в развернутом виде запишется так:

$$\begin{aligned} L = \psi(r_1g_1 + r_2g_2 + r_3g_3) - (g_1^2\sigma_{11} + g_1g_2\sigma_{12} + g_1g_3\sigma_{13} + g_2g_1\sigma_{21} + \\ + g_2^2\sigma_{22} + g_2g_3\sigma_{23} + g_3g_1\sigma_{31} + g_3g_2\sigma_{32} + g_3^2\sigma_{33}) - \lambda g_1 - \lambda g_2 - \lambda g_3 + \lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

где σ_{ij} – ковариации ценных бумаг i и j.

Отыщем первые частные производные функции L по g_1, g_2, g_3 и λ и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial g_1} = \psi r_1 - 2g_1\sigma_{11} - g_2\sigma_{12} - g_3\sigma_{13} - g_2\sigma_{21} - g_3\sigma_{31} - \lambda = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial g_2} = \psi r_2 - g_1\sigma_{12} - g_1\sigma_{21} - 2g_2\sigma_{22} - g_3\sigma_{23} - g_3\sigma_{32} - \lambda = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial g_1} = \psi r_3 - g_1\sigma_{13} - g_2\sigma_{23} - g_1\sigma_{31} - g_2\sigma_{32} - 2g_3\sigma_{33} - \lambda = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -g_1 - g_2 - g_3 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что матрица ковариаций $[\mathbf{S}]$ симметрична относительно главной диагонали, то есть $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, поэтому система (6) запишется в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \partial L/\partial g_1 \\ \partial L/\partial g_2 \\ \partial L/\partial g_3 \\ \partial L/\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi r_1 \\ \psi r_2 \\ \psi r_3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2g_1\sigma_{11} + 2g_2\sigma_{12} + 2g_3\sigma_{13} + \lambda \\ 2g_1\sigma_{21} + 2g_2\sigma_{22} + 2g_3\sigma_{23} + \lambda \\ 2g_1\sigma_{31} + 2g_2\sigma_{32} + 2g_3\sigma_{33} + \lambda \\ g_1 + g_2 + g_3 - 1 \end{bmatrix} = [0] \quad (7)$$

Перенося единицу из нижней строки второго слагаемого в правой части уравнения (7) в первое слагаемое и представляя вычитаемую матрицу в виде произведения матрицы на столбец, получаем:

$$\begin{bmatrix} \psi r_1 \\ \psi r_2 \\ \psi r_3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{23} & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = [0]. \tag{8}$$

Вектор $\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_2, \lambda)^{\mathrm{T}}$ определится следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{23} & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \psi r_1 \\ \psi r_2 \\ \psi r_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

то есть

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi r_1 \\ \psi r_2 \\ \psi r_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Можно показать, что из уравнения (10) следует система:

$$\begin{cases} g_1 = c_1 + \psi(a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3) \\ g_2 = c_2 + \psi(a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3) \\ g_3 = c_3 + \psi(a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3) \\ \lambda = c_4 + \psi(c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3) \end{cases}. \tag{11}$$

Данный результат можно обобщить на произвольное число ценных бумаг, так что имеет место решение:

$$\begin{cases} g_1 = c_1 + \psi(a_{11}r_1 + \ldots + a_{1N}r_N) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_N = c_N + \psi(a_{N1}r_N + \ldots + a_{NN}r_N) \\ \lambda \neq 0 \end{cases}. \tag{12}$$

Варьируя параметр неприятия риска ψ, можно найти составляющие (структуру) эффективных портфелей ценных бумаг, а затем вычислить пары значений (r_p, σ_p^2) для данных портфелей.

Чтобы определить пропорции бумаг, образующих касательный портфель, используем свойство, согласно которому доли бумаг в портфеле линейно зависят от ψ.[2]

[2] Данное свойство будет иметь силу при условии, что к структуре портфеля не применяются ограничения типа $\sum_{i=1}^{m} e_{ij} \cdot g_i = h_j$, j = 1, 2,…, m, за исключением ограничения $\sum_{i=1}^{N} g_i = 1$. См. [3, с. 37–42].

Найдя (x_0, y_0), из расчетных данных, можно определить пару значений параметра пси: ($\psi^{н}$, $\psi^{в}$), которые ограничивают снизу и сверху портфели, между которыми на кривой $\sigma_p^2(r_p)$ лежит касательный портфель.

Далее, пользуясь зависимостями $g_i(\psi)$ и применяя метод линейной интерполяции, можно найти доли бумаг в касательном портфеле.

Наконец, так как в данной работе зависимость между доходностью портфеля и риском исходно была представлена аналитически и графически в виде зависимости риска от доходности, предложим также аналитический вид уравнения касательной – эффективного множества с условием заимствования и кредитования по безрисковой ставке (*линии рынка капитала*) [3] – в виде обратной зависимости:

$$x_{кас} = x_0 + \frac{\sigma_p^2 - y_0}{2a \cdot x_0 + b} \ . \qquad (13)$$

Также должно выполняться:

$$x_{кас} = x_f + \frac{\sigma_p^2}{2a \cdot x_0 + b} . \qquad (14)$$

3. Числовой пример

Проиллюстрируем модель числовым примером.

1) Зададим распределение доходности для $N = 3$ ценных бумаг. Найдем параметры средних, стандартных отклонений и корреляций:

Номер ценной бумаги	r_i, %	σ_i, %	Corr(i,j)		
1	7,1	11,3	1		
2	6,3	9,0	0,7789	1	
3	9,1	12,6	0,6896	0,4935	1

2) Определим вид границы допустимого множества и эффективного фронта (выделенная жирным часть кривой) для случая, когда не предполагается возможность заимствования и кредитования по безрисковой ставке (рис. 2).

[3] Отличие формул (13) и (14) от традиционного вида линии *CML* состоит в том, что в привычном нам виде эта зависимость строится от параметра риска, взятого не в виде дисперсии, а в виде среднего квадратичного отклонения.

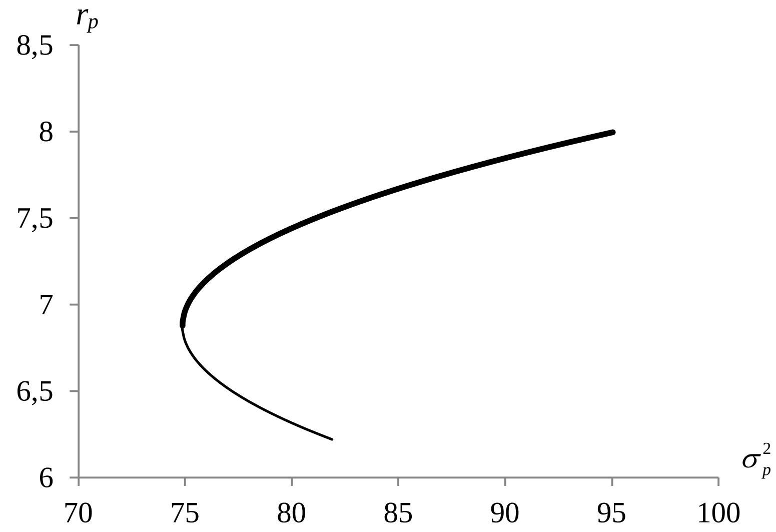

Рисунок 2.

Таблица с расчетными значениями к данной и следующим иллюстрациям приводится в Приложении.

3) Покажем полученную зависимость в виде графика $\sigma_p^2(r_p)$ и построим уравнение данной зависимости как полином второй степени (рис. 3).

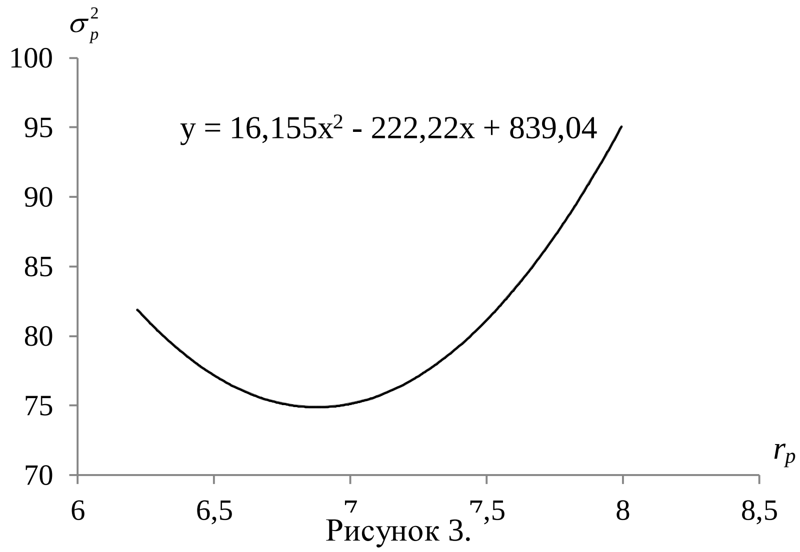

Рисунок 3.

4) Введем некоторое значение безрисковой ставки: $r_f = 4{,}5$ %. Используя формулы (3) и (4), определим координаты точки касания графика $\sigma_p^2(r_p)$ и линии, проходящей через точку, соответствующую введенному значению r_f :

$$x_0 = \frac{2 \cdot 16{,}15 \cdot 4{,}5 + \sqrt{4 \cdot (16{,}15)^2 \cdot (4{,}5)^2 + 4 \cdot 16{,}15 \cdot (-222{,}2 \cdot 4{,}5 + 839)}}{2 \cdot 16{,}15} =$$

$= 7{,}7074$.

$y_0 = 16{,}15 \cdot (7{,}7074)^2 - 222{,}2 \cdot 7{,}7074 + 839 = 85{,}7895$.

$(x_0\ , y_0) = (7{,}7074;\ 85{,}7895)$.

Отобразим линию касательной на рисунке:

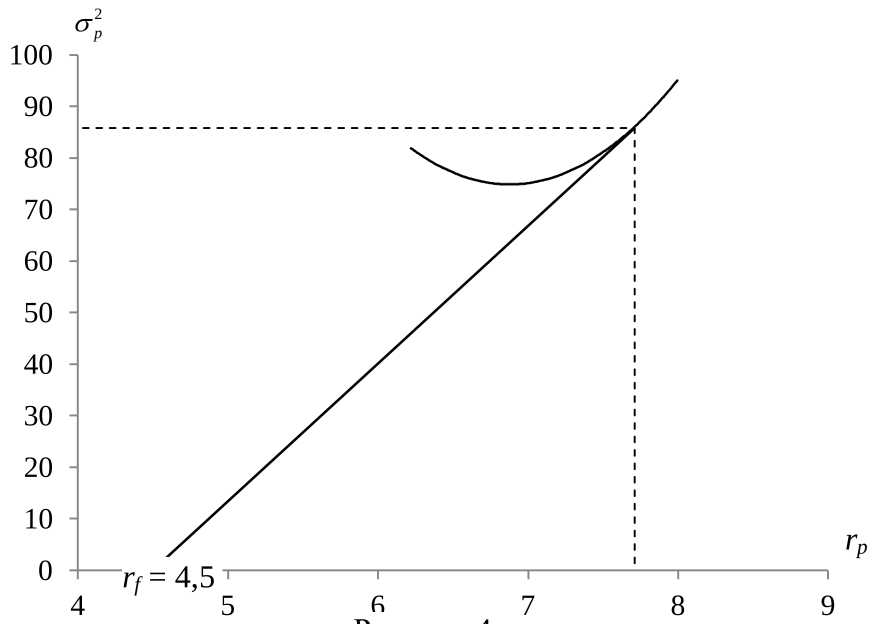

Рисунок 4.

Также в силу формул (13) и (14) имеем:

$$x_{кас} = 7,7074 + \frac{\sigma^2 - 85,7895}{26,833} \quad \text{или}$$

$x_{\text{кас}} = 4,5 + 0,0372675\sigma^2$.

Данные уравнения являются аналитическими выражениями эффективного множества для случая с условием заимствования и кредитования по безрисковой ставке, то есть формулами линии рынка капитала (уравнениями *CML*).

5) Определим структуру касательного портфеля.

Находим значения параметра неприятия риска, ограничивающие касательный портфель: $(\psi^{н}, \psi^{в}) = (28, 29)$.

Перед тем, как проводить интреполяцию, покажем графически, что величина доли ценной бумаги j в эффективном портфеле при наших предположениях линейно зависит от параметра ψ:

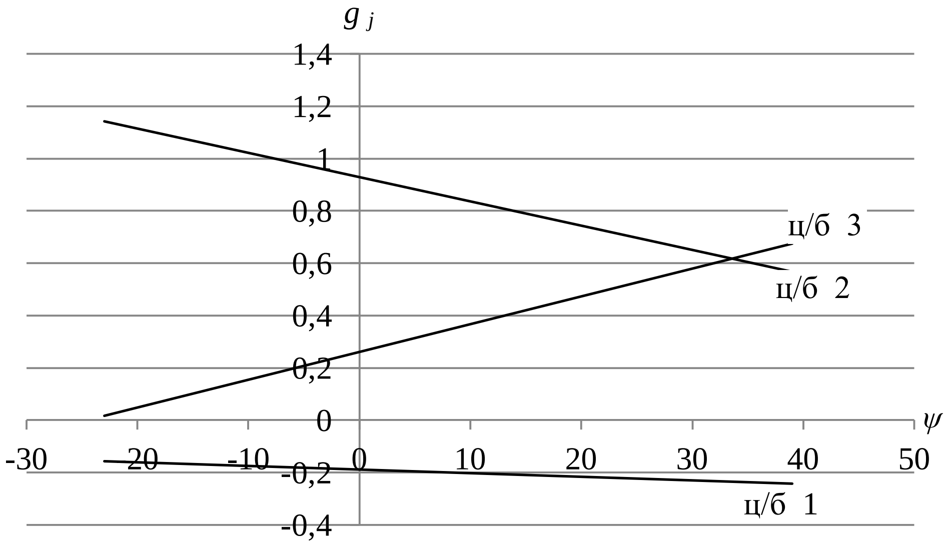

Рисунок 5.

Далее рассчитываем значения долей ценных бумаг, соответствующие нижней и верхней границам параметра ψ, и проводим интерполяцию:

$g_1^н$ = –0,226702509;

$g_1^в$ = –0,228046595;

$$g_1 = \frac{-0,226702509 - 0,228046595}{2} = -0,227374552.$$

$g_2^н$ = 0,669086022;

$g_2^в$ = 0,659811828;

$$g_2 = \frac{0,669086022 + 0,659811828}{2} = 0,664448925.$$

$g_3^н$ = 0,557616487;

$g_3^в$ = 0,568234767;

$$g_3 = \frac{0,557616487 + 0,568234767}{2} = 0,562925627.$$

Проверка суммы полученных долей свидетельствует о корректности расчетов:

$\sum g_i$ = –0,227374552 + 0,664448925 + 0,562925627 = 1.

Наконец, рассчитаем параметры риска и доходности касательного портфеля:

$r_p = 7,6943\,\%$,

$\sigma_p^2 = 85,6459$. σ = 9,2545 %.

Библиографический список

1. *Тарасевич, Л. С., Гребенников, П. И., Леусский, А. И.* Макроэкономика: Учебник. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Высшее образование, 2006. 654 с.

2. *Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.* Инвестиции. – М.: ИНФРА–М., 1998. XII, 1028.

3. *Шведов А. С.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. – М.: ГУ ВШЭ, 1999. 142 с.

4. *Markowitz Harry M.* (1952). «Portfolio Selection», Journal of Finance, 1, no. 1 (March), pp. 77-91.

5. *Elton Edwin J., Gruber Martin J., Padberg Manfred D.* (1976). «Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection», Journal of Finance, 31, no. 5 (December), pp. 1341-1357.

6. *Markowitz Harry M.* (1956). «The Optimization of the Quadratic Function Subject to Linear Constraints, Naval Research Logistic Quarterly, 3, nos. 1-2 (March-June), pp. 111-133

7. *Sharpe William F.* (1963). «A Simplified Model for Portfolio Analysis», Management Science, 9 no. 2 (January), pp. 277-293.

8. *Tobin James* (1958). «Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk», Review of Economic Studies, 26, no. 1 (February), pp. 65-86.

9. *Tobin James* (1965). «The Theory of Portfolio Selection», The Theory of Interest Rates, ed. F.H. Hahn and F.P.R. Brechling. London: Macmillan and Co.

Приложение

Расчет параметров границы допустимого множества портфелей

ψ	-23	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3
g_1	-0,1582	-0,1608	-0,1635	-0,1662	-0,1689	-0,1716	-0,1743	-0,177	-0,1797	-0,1823	-0,185
g_2	1,14207	1,12352	1,10497	1,08642	1,06788	1,04933	1,03078	1,01223	0,99368	0,97513	0,95659
g_3	0,01608	0,03732	0,05856	0,07979	0,10103	0,12227	0,1435	0,16474	0,18598	0,20721	0,22845
$\sum g_i$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
r_p	6,21851	6,27582	6,33314	6,39045	6,44776	6,50507	6,56238	6,6197	6,67701	6,73432	6,79163
σ_p^2	81,8883	80,7209	79,6596	78,7044	77,8554	77,1125	76,4757	75,9451	75,5206	75,2022	74,9899

Продолжение табл.

ψ	-1	1	0	3	5	7	9	11	13	15	17	19
g_1	-0,1877	-0,1904	-0,1891	-0,1931	-0,1958	-0,1985	-0,2012	-0,2039	-0,2065	-0,2092	-0,2119	-0,2146
g_2	0,93804	0,91949	0,92876	0,90094	0,88239	0,86384	0,8453	0,82675	0,8082	0,78965	0,7711	0,75255
g_3	0,24969	0,27092	0,26031	0,29216	0,3134	0,33463	0,35587	0,37711	0,39834	0,41958	0,44082	0,46205
$\sum g_i$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
r_p	6,84894	6,90625	6,87760	6,96357	7,02088	7,07819	7,1355	7,19281	7,25013	7,30744	7,36475	7,42206
σ_p^2	74,8838	74,8838	74,8705	74,9899	75,2022	75,5206	75,9451	76,4757	77,1125	77,8554	78,7044	79,6596

Продолжение табл.

ψ	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
g_1	-0,2173	-0,22	-0,2227	-0,2254	-0,228	-0,2307	-0,2334	-0,2361	-0,2388	-0,2415
g_2	0,73401	0,71546	0,69691	0,67836	0,65981	0,64126	0,62272	0,60417	0,58562	0,56707
g_3	0,48329	0,50453	0,52576	0,547	0,56823	0,58947	0,61071	0,63194	0,65318	0,67442
$\sum g_i$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
r_p	7,47937	7,53668	7,594	7,65131	7,70862	7,76593	7,82324	7,88056	7,93787	7,99518
σ_p^2	80,7209	81,8883	83,1619	84,5415	86,0273	87,6193	89,3173	91,1215	93,0319	95,0483

Аннотация

В работе предложен способ решения некоторых задач, рассматриваемых в модели оптимизации портфеля ценных бумаг для случая безрискового заимствования и кредитования, а именно, определения параметров касательного портфеля и получения аналитического выражения уравнения *CML*. Оптимизация (расчет эффективной границы) осуществляется с использованием функции

Лагранжа путем введения линейных уравнений функции полезности агента в качестве критических линий.

Annotation

This work suggests a method to accomplish some problems considered in the model of securities portfolio optimization for the case of risk-free borrowing and lending, especially, determining the parameters of the tangent portfolio and deriving the analytic expression of the *CML* equation. The optimization (calculating the effective frontier) is carried out using the Lagrange function by introducing the linear equations of the agent utility function as crucial lines.

Krinichansky K.V., Doctor of Economics,
Professor of South Ural State University (National Research University)

Bezrukov A.V.,
Senior Lecturer of South Ural State University (National Research University)

SOME PRACTICAL TASKS OF THE PORTFOLIO OPTIMIZATION MODEL