Ж. «Деньги и кредит», 2010, №9

Интервальное резервирование: бережливый подход к расходованию капитала банка

Б.С. Моисеев,
главный экономист Управления стратегии Сбербанка России,
кандидат физико-математических наук, Москва, e-mail: makro16@sbrf.ru

В статье показано, что существующая методика формирования резервов на возможные потери по ссудам приводит к результатам, превышающим ожидаемые потери при кредитовании. Предлагается новый подход к резервированию, который позволяет создавать резервы на уровне, минимально достаточном для покрытия ожидаемых потерь. Методика основывается на доказанном положении о том, что норма резервирования по кредиту, находящемуся в данной категории качества, представляет собой вероятность его перехода в состояние дефолта. Разработанный динамический метод расчета матрицы вероятностей переходов позволяет также адекватно оценивать вероятности дефолтов кредитов даже в период кризиса.

Ключевые слова: ожидаемые потери; интервальное резервирование; матрицы вероятностей переходов; вероятности дефолтов, кризис.

В последние годы банки тратят значительные ресурсы на формирование резервов под возможные потери по ссудам, что существенно снижает показатель достаточности капитала и тормозит дальнейший рост кредитования хозяйствующих субъектов. В большой степени такое положение объясняется глобальными кризисными явлениями в мировой экономике и увеличением на этом фоне кредитных рисков заемщиков. Однако наряду с этими причинами существуют и другие, не связанные с экономикой обстоятельства, приводящие к формированию больших резервов.

В настоящей работе показано, что эти обстоятельства связаны с существующей методикой резервирования, которая не отражает в полной мере соответствия резервов и потерь при кредитовании и потому приводит к завышенным результатам. Предлагается новый подход к резервированию, который позволяет формировать резервы на уровне, необходимом (минимально достаточном) для покрытия потерь, ожидаемых при реализации кредитных рисков.

1. Зависимость резервов от временного интервала

При формировании резервов на возможные потери по ссудам предполагается, что резервы создаются в размере, достаточном для покрытия ожидаемых потерь при кредитовании. Для корректной оценки таких потерь нам потребуется уточнить понятие дефолта.

Будем считать *дефолтом* переход кредитов в низшую категорию качества $i = 5$, которая согласно Положению № 254-П Банка России от 26.03.2004 «О порядке формирования кредитными организациями резервов на возможные потери по ссудам, по ссудной и приравненной ей задолженности» (далее – Положение) соответствует «безнадежным ссудам». Ссуду, оказавшуюся в этой категории, будем относить к потерям.

Что касается других категорий ($i \le 4$), то, если к концу периода кредитования находившиеся здесь кредиты не перешли в состояние дефолта, это означает, что, несмотря на высокие риски, заемщики выполнили все свои обязательства. И, следовательно, потери по этим кредитам отсутствуют. Таким образом, реальные потери при кредитовании мы связываем только с переходом кредитов в состояние дефолта.

Исходя из этих представлений, проанализируем процесс формирования резервов с точки зрения их соответствия ожидаемым потерям при кредитовании. Рассмотрим *группу кредитов*, которые имеют одну и ту же дату выдачи t_0 и одинаковые периоды кредитования T. Пусть в начальный момент t_0 все кредиты Q_i находятся в категории качества i^* ($i^* \le 4$), т.е.

$$Q_i(t_0) = Q_{i^*}(t_0) \text{ при } i = i^* \quad \text{и} \quad Q_i(t_0) = 0 \quad \text{при } i \neq i^*. \qquad (1)$$

Под влиянием кредитного риска часть кредитов в течение периода кредитования перейдет в состояние дефолта ($i = 5$). В момент t_0 ожидаемые потери, связанные с дефолтом, равны:

$$D_{i^*} = W_{i^*} * Q_{i^*} * \left(1 - \frac{A_{i^*}}{Q_{i^*}}\right), \qquad (2)$$

где W_{i^*} - средняя вероятность дефолта кредитов, находящихся в момент t_0 в категории качества i^*, A_{i^*} - величина обеспечения с учетом его категории качества. Здесь мы считаем, что возвращаемая после дефолта величина кредитов совпадает с величиной обеспечения. Мы также предполагаем, что выплата основной суммы долга осуществляется в конце срока, поэтому его величина в течение периода кредитования не меняется. Случай, когда выплата основного долга осуществляется долями, мы рассмотрим в Разделе 4.

Под ожидаемые потери, в соответствии с правилами регулирования, банки в момент выдачи кредитов должны сформировать резервы в виде отчислений от капитала. Для рассматриваемых кредитов, которые находятся в категории качества i^*, резервы составляют величину:

$$R_{i^*} = N_{i^*} * Q_{i^*} * \left(1 - \frac{A_{i^*}}{Q_{i^*}}\right). \qquad (3)$$

Поскольку величина резервов должна покрывать ожидаемые потери:

$$R_{i^*} = D_{i^*}, \qquad (4)$$

то из (2) и (3) получаем, что

$$N_{i^*} = W_{i^*}, \qquad (5)$$

т.е. **норма резервирования кредитов, находящихся в категории качества i^*, имеет смысл вероятности их перехода из этого состояния в состояние дефолта**. Отсюда также следует, что поскольку вероятности дефолтов при рассмотрении полных потерь связаны с периодом существования кредитов T, то и **нормы резервирования, создаваемые под полные потери, также связаны с периодом кредитования**.

Важно отметить, что все соотношения, представленные выше, справедливы и *для отдельного кредита*, который принадлежит рассматриваемой группе. При этом вероятности переходов одиночного кредита, в том числе вероятность дефолта, имеют смысл вероятностей, построенных на статистике воображаемых повторений (реализаций) выдачи кредита. На этой же статистике основаны и ожидаемые потери по отдельному кредиту, которые представляют собой средние по реализациям потери.[1]

В этом случае вместо величин Q_{i^*}, D_{i^*} и A_{i^*} в (2)-(4) следует подставить объем q_{i^*}, ожидаемые потери d_{i^*} и обеспечение a_{i^*} для отдельного кредита. При этом можно видеть, что ожидаемые потери и резервы, рассчитанные для группы в целом, равны

[1] Из теории статистики известно, что вероятности переходов, построенные на статистике группы кредитов, равны соответствующим вероятностям, рассчитанным по статистике реализаций отдельного кредита.

соответственно сумме ожидаемых потерь и сумме резервов, рассчитанных по отдельным кредитам.[2]

Итак, мы рассмотрели ожидаемые потери и создаваемые резервы в момент выдачи кредитов t_0, что соответствует их оценке сразу за весь период кредитования T. Однако со временем под влиянием кредитных рисков происходит движение кредитов по категориям качества, и возникает необходимость новых оценок ожидаемых потерь для корректировки резервов. Только теперь эти **потери рассматриваются на временном интервале: от текущего момента до момента погашения**, который меньше периода кредитования T.

2. Интервальное резервирование под потери по кредитам

Будем считать, что оценка потерь и коррекция резервов по кредиту происходит через равные промежутки времени:

$$\Delta T = \frac{T}{m}, \tag{6}$$

где T - период кредитования, m - целое положительное число. Пусть в текущий момент $t_k = t_0 + k * \Delta T$, где t_0 - момент выдачи кредита, кредит q_i находится в категории качества $i = i^*$ ($i^* \le 4$), т.е.

$$q_i = q_{i^*} \text{ при } i = i^* \text{ и } q_i = 0 \text{ при } i \ne i^*. \tag{7}$$

Тогда ожидаемые потери в момент t_k за временной интервал, от момента t_k до момента погашения t_m, равны:

$$d_{i^*}^{\lambda} = q_{i^*}(t_k) * W_{i^*}^{\lambda}(t_k), \tag{8}$$

где $W_{i^*}^{\lambda}(t_k)$ - вероятность перехода кредита из состояния i^* в состояние дефолта на временном интервале ΔT^{λ}, который представляет собой *срок до погашения кредита*:

$$\Delta T^{\lambda} = t_m - t_k = (m-k) * \Delta T = \lambda * T, \qquad \lambda < 1.$$

Этот интервал будем называть $\lambda -$ *интервалом*, поскольку параметр λ определяет его длительность.

Создаваемые резервы также зависят от $\lambda -$интервала, для них в момент t_k справедливо следующее выражение:

$$r_{i^*}^{\lambda}(t_k) = q_{i^*}(t_k) * N_{i^*}^{\lambda}(t_k). \tag{9}$$

Здесь $N_{i^*}^{\lambda}(t_k)$ - норма резервирования на $\lambda -$интервале для кредита, который в момент t_k находится в категории качества i^*. Учитывая, что в любой момент t_k резервы должны покрывать ожидаемые потери, т.е. должно выполняться условие:

$$r_{i^*}^{\lambda}(t_k) = d_{i^*}^{\lambda}(t_k),$$

получаем соотношение, аналогичное (5), но справедливое для любого $\lambda -$интервала (срока до погашения):

$$N_{i^*}^{\lambda} = W_{i^*}^{\lambda}. \tag{10}$$

[2] В дальнейшем при расчете ожидаемых потерь и резервов с целью компактности изложения будем опускать множитель, связанный с учетом обеспечения отдельного кредита. Для учета обеспечения достаточно умножить полученный результат на этот множитель.

Будем называть вероятности дефолта W_i и нормы резервирования N_i *полными*, поскольку они связаны с полными потерями по кредиту (за весь период кредитования T), а аналогичные величины W_i^λ и N_i^λ, соответствующие $\lambda -$интервалу (сроку до погашения, меньшему периода кредитования), – *интервальными*. Формирование резервов в соответствии с формулой (9) назовем *интервальным резервированием*.

Рассмотрим теперь резервы, создаваемые под потери по ссудам в соответствии с Положением. Для кредита, удовлетворяющего в момент t_k условию (7), резервы формируются согласно следующему соотношению:

$$r_{i^*}(t_k) = q_{i^*}(t_k) * N_{i^*}(t_k). \tag{11}$$

С точки зрения нашего подхода это выражение соответствует резервированию на всем периоде кредитования T. В связи с этим создание резервов по формуле (11) будем называть *полным резервированием*.

Сравним выражение (11) с выражением (9), в котором резервы в момент t_k рассматриваются как покрытие ожидаемых потерь на $\lambda -$интервале (срок до погашения). Заметим, что вероятность дефолта, рассматриваемая на интервале ΔT^λ, меньше вероятности дефолта за период кредитования T, т.е.

$$W_{i^*}^\lambda < W_{i^*}. \tag{12}$$

Это связано с тем, что при прочих равных условиях (рисках, влияющих на переходы кредитов) возможность дефолта уменьшается при уменьшении интервала, на котором рассматриваются переходы ($\Delta T^\lambda < T$). Из соотношений (5), (10) следует, что соотношение, аналогичное (12), справедливо и для норм резервирования:

$$N_{i^*}^\lambda < N_{i^*}.$$

Отсюда видно, что величина резервов (11), создаваемая в соответствии с Положением, в любой момент t_k ($t_k > t_0$) оказывается больше резервов, формируемых на основе подхода, связанного с покрытием ожидаемых потерь по кредиту на $\lambda -$интервале:

$$r_{i^*}(t_k) > r_{i^*}^\lambda(t_k),$$

т.е. **резервы, создаваемые согласно Положению, превосходят ожидаемые потери на сроке от текущего момента до погашения кредита и потому являются завышенными.** В связи с этим представляется важным разработать методику расчета резервов на основе формулы (9) и оценить вероятности дефолтов и ожидаемых потерь на интервале, равным сроку до погашения кредита.

В Приложении 1 подробно изложено построение матрицы вероятностей переходов W_{ij}^α, элементами которой являются вероятности дефолтов W_i^α (при $j = 5$). Там выражение для $W_{ij}^\alpha(\gamma_r)$ получено в виде зависимостей от *коэффициентов вероятностей* γ_r ($r \le 4$) и величины временного интервала $\Delta T^\alpha = \alpha * T$ ($\alpha \le 1$), на котором рассматриваются переходы кредитов по категориям качества ($i, j \le 5$).[3]

[3] Важно отметить, что методика построения матрицы вероятностей переходов, изложенная в Приложении 1, может быть обобщена на любое число категорий качества. При этом каждый банк может произвести расчет матрицы вероятностей и сформировать резервы в соответствии со своей внутренней системой классификации рисков.

В нашем случае, чтобы рассчитать вероятности дефолтов W_i^λ на $\lambda-$интервале, достаточно в выражении для W_{ij}^α положить $j=5$, $\alpha=\lambda$ (см. в Приложении 1 формулу (П1.10)). Для оценки коэффициентов γ_r мы используем два метода расчета: метод виртуальных периодов и динамический метод.

3. Расчет коэффициентов вероятностей

3.1. Метод виртуальных периодов

Для момента t_k помимо вероятности дефолта $W_j^\lambda(\gamma_r(t_k))$, связанной с интервалом ΔT^λ, будем рассматривать и полную вероятность дефолта $W_j(\gamma_r(t_k))$, которая соответствует периоду кредитования T (см. (П1.10) при $\alpha=1$). Этот период будем называть *виртуальным*, поскольку он, в отличие от интервала ΔT^λ, не связан с реальным течением времени. Аналогичный период рассматривается для следующего момента t_{k+1} и т.д. Метод расчета $\gamma_r(t_k)$, построенный на этих периодах, назовем *методом виртуальных периодов*.

Виртуальные периоды здесь соответствуют воображаемой ситуации, когда текущий момент $t_k = t_0 + k * \Delta T$ одновременно является начальным моментом t_0 для другого кредита, для которого уровень рисков, характерный для момента t_k, остается неизменным в течение всего виртуального периода кредитования T. Рассчитанные при этом значения γ_r ($r \le 4$) ставятся в соответствие моменту t_k и рассматриваются на интервале ΔT^λ.

Расчет для момента t_k строится следующим образом. В соответствии с соотношением (5) полная вероятность дефолта $W_i(\gamma_r(t_k))$ равна полной норме резервирования $N_i(t_k)$, поэтому для каждого момента t_k из (П1.10) имеем:[4]

$$W_1 = W_{15} = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4 * L_{1:5}^1 = N_1\,, \tag{13}$$

$$W_2 = W_{25} = \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4 * L_{2:5}^1 = N_2\,, \tag{14}$$

$$W_3 = W_{35} = \gamma_3 * \gamma_4 * L_{3:5}^1 = N_3\,, \tag{15}$$

$$W_4 = W_{45} = \gamma_4 * L_{4:5}^1 = N_4\,. \tag{16}$$

Из этой системы уравнений, полагая значения полных норм резервирования известными (они задаются экспертно: $N_1 < N_2 < N_3 < N_4$), можно последовательно найти значения коэффициентов вероятностей γ_i ($i \le 4$). Так, из уравнения (16) получаем:

$$F_4(\gamma_4) = \exp(-\gamma_4) - 1 + N_4 = 0\,. \tag{17}$$

Отсюда

$$\gamma_4 = -\ln(1 - N_4)\,. \tag{18}$$

Далее, подставляя это значение в уравнение (15), имеем:

$$\gamma_4 * \exp(-\gamma_3) - \gamma_3 * \exp(-\gamma_4) = (\gamma_4 - \gamma_3) * (1 - N_3)\,.$$

[4] Здесь в обозначениях вероятностей дефолта и норм резервирования мы опускаем зависимость от времени t_k.

Используя здесь соотношение (17), находим следующее уравнение относительно неизвестной γ_3:

$$F_3(\gamma_3) = \exp(-\gamma_3) + \frac{N_4 - N_3}{\gamma_4} * \gamma_3 - 1 + N_3 = 0\,. \qquad (19)$$

Аналогично из соотношений (14) и (13) последовательно получаем уравнения относительно γ_2 и γ_1:

$$F_2(\gamma_2) = \exp(-\gamma_2) - \frac{N_3 - N_2}{\gamma_3 * \gamma_4} * \gamma_2^2 + \frac{\gamma_3 * (N_4 - N_2) + \gamma_4 * (N_3 - N_2)}{\gamma_3 * \gamma_4} * \gamma_2 -$$

$$-1 + N_2 = 0\,. \qquad (20)$$

$$F_1(\gamma_1) = \exp(-\gamma_1) + \frac{N_2 - N_1}{\gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4} * \gamma_1^3 - \frac{(N_3 - N_1) * \gamma_2 + (N_2 - N_1) * (\gamma_3 + \gamma_4)}{\gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4} * \gamma_1^2 +$$

$$+ \frac{(N_4 - N_1) * \gamma_2 * \gamma_3 + (N_3 - N_1) * \gamma_2 * \gamma_4 + (N_2 - N_1) * \gamma_3 * \gamma_4}{\gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4} * \gamma_1 -$$

$$-1 + N_1 = 0\,. \qquad (21)$$

Поскольку решение системы уравнений (17), (19)-(21) представляет собой набор коэффициентов γ_r ($r = 1,\ 2,\ 3,\ 4$), через которые выражаются вероятности переходов (П1.9), то это решение должно быть единственным и положительным. Доказательство этого положения приведено в Приложении 2.

Отсюда следует, что для каждого момента t_k существует единственное решение $\gamma_r \geq 0$, которое выражается через полные нормы резервирования $N_i(t_k)$, и его зависимость от времени имеет вид: $\gamma_r(t_k) = \gamma_r(N_i(t_k))$.

3.2. Динамический метод

Данный метод оценки коэффициентов вероятностей основан на исследовании динамики распределения кредитов по категориям качества. По этой причине будем называть этот метод *динамическим*.

Разделим исходный портфель кредитов на субпортфели, каждый из которых состоит из кредитов, имеющих одинаковые периоды кредитования. Рассмотрим субпортфель с периодом кредитования T. Для этих кредитов построим шкалу времени, выбрав произвольно начальный момент t_0^*, от которого в сторону увеличения последовательно через выбранный интервал ΔT отложим моменты времени $t_1 = t_0^* + \Delta t$, $t_2 = t_0^* + 2 * \Delta t$ и т.д. (см. (6)). Эту последовательность моментов назовем *интервальными моментами*. Заменим реальные даты выдачи и погашения кредитов модельными датами, которые близки к реальным, т.е. отличаются от них не более чем на половину интервала, и совпадают с интервальными моментами времени.

С течением времени кредиты перемещаются по категориям качества и их распределения меняются. Рассмотрим два последовательных распределения кредитов

$Q_i(t_{k-1})$ и $Q_j(t_k)$, которые измеряются в моменты t_{k-1} и t_k, т.е. разделены во времени интервалом ΔT. Эти распределения должны быть связаны соотношением:[5]

$$Q_j(t_k) = \sum_{i=1}^{4} Q_i(t_{k-1}) * \widetilde{W}_{ij}^{\mu}(\gamma_r(t_{k-1})), \qquad j \le 4, \qquad (22)$$

где $\widetilde{W}_{ij}^{\mu}$ - усеченная матрица вероятностей переходов на интервале (см (6) и (П1.10) при $\alpha = \mu$):

$$\Delta T^{\mu} = \mu * T = \Delta T, \qquad (23)$$

в которой опущены пятая строка ($i = 5$) и пятый столбец ($j = 5$), т.е. не рассматриваются переходы, связанные с дефолтом. Их рассмотрение привело бы к появлению в (22) пятого уравнения, которое является следствием первых четырех.[6] Это означает, что первые четыре уравнения являются достаточными для нахождения решения γ_r ($r \le 4$), и что полученное решение не противоречит пятому уравнению.

Вместе с тем, для того чтобы решение $\gamma_r(t_{k-1})$ можно было использовать в формуле для потерь (8), его необходимо привести к текущему моменту t_k. Для этого представим приведенное решение в виде:

$$\tilde{\gamma}_r(t_k) = \gamma_r(t_{k-1}) + (\gamma_r(t_k) - \gamma_r(t_{k-1})) =$$

$$= \gamma_r(t_{k-1}) * \left(1 + \frac{\Delta\gamma_r}{\gamma_r(t_{k-1})}\right),$$

где $\Delta\gamma_r = \gamma_r(t_k) - \gamma_r(t_{k-1})$. Полагая теперь, что на интервале ΔT коэффициенты вероятности мало меняются, т.е. риски на этом интервале остаются практически постоянными (условие квазастационарности):

$$\frac{|\Delta\gamma_r|}{\gamma_r} << 1, \qquad (24)$$

в нулевом приближении по малому параметру (24) имеем:

$$\tilde{\gamma}_r(t_k) \approx \gamma_r(t_{k-1}).$$

С учетом этого приближения полученное решение $\gamma_r(t_{k-1})$ следует подставить в выражение для вероятностей дефолтов $W_i^{\lambda}(\tilde{\gamma}_r(t_k))$ на $\lambda-$интервале, которое уже можно

---

[5] Из распределения $Q_j(t_k)$ необходимо исключить кредиты, которые были выданы (или погашены) в момент t_k, поскольку их появление (или исчезновение) в данном распределении не связано с матрицей вероятностей переходов $\widetilde{W}_{ij}^{\alpha}(\gamma_r(t_{k-1}))$.

[6] При добавлении пятого уравнения ($i, j = 5$) сумма пяти уравнений представляет собой тождество (не зависит от γ_r): $\sum_{j=1}^{5} Q_j(t_k) = \sum_{i=1}^{5} Q_i(t_{k-1})$, что указывает на зависимость этих уравнений друг от друга. При суммировании по j мы использовали равенство: $\sum_{i \le j}^{5} W_{ij}^{\mu} = 1$ (см. Приложение 1).

использовать в выражении потерь (8). При этом значения $\tilde{\gamma}_r(t_k)$, полученные при расчете по временной шкале с общим для всего субпортфеля кредитов начальным моментом t_0^*, при использовании в расчете резервов по конкретному кредиту должны быть приведены к локальной временной шкале с начальным моментом t_0, совпадающим с моментом выдачи этого кредита.

Данный подход позволяет рассчитать вероятности дефолтов последовательно для каждого текущего момента t_k на основании знания фактических распределений кредитов в текущий момент $Q_i(t_k)$ и в предыдущий момент $Q_i(t_{k-1})$.

В рамках данного метода можно использовать еще одно приближение, которое позволяет получить решение уравнений (22) в явном виде. Для этого рассмотрим случай малых интервалов ΔT, который соответствует условию (см. (6), (23)):[7]

$$\mu \ll 1. \qquad (25)$$

В этом приближении систему уравнений (22) можно разложить по степеням μ. Так, в первом приближении по μ усеченная матрица вероятностей переходов в (22) имеет вид (см. (П1.10)):

$$\tilde{W}_{ij}^{\mu}(\gamma_r(t_{k-1})) = \begin{pmatrix} 1-\mu*\gamma_1 & \mu*\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu*\gamma_2 & \mu*\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu*\gamma_3 & \mu*\gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\mu*\gamma_4 \end{pmatrix}$$

Подставляя это выражение в (22), получаем следующую систему уравнений относительно γ_r ($r \le 4$):

$$Q_1(t_k) = Q_1(t_{k-1})*(1-\mu*\gamma_1)$$

$$Q_r(t_k) = Q_{r-1}(t_{k-1})*\mu*\gamma_{r-1} + Q_r(t_{k-1})*(1-\mu*\gamma_r), \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

Здесь решение γ_r также следует разложить по степеням μ и для рассматриваемого приближения ограничиться лишь первым членом (не зависит от μ). Далее, последовательно решая эти уравнения, находим, что

$$\mu*\gamma_r(t_{k-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{r}(Q_i(t_{k-1}) - Q_i(t_k))}{Q_r(t_{k-1})}, \qquad r = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \qquad (26)$$

Это выражение представляет собой первое приближение решения системы (22) относительно произведения $\mu*\gamma_r$. Более высокие приближения содержат множители μ^2, μ^3 и т. д.

Поскольку движение кредитов происходит от более высоких категорий качества в момент t_{k-1} к более низким в момент t_k, то сумма всех кредитов по первым r категориям за период ΔT является неотрицательной, т.е.

---

[7] Условие (25) является дополнительным к условию квазистационарности (24), которое хотя и накладывает ограничения на величину интервала ΔT, однако не требует с необходимостью выполнения условия малости интервала (25).

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i(t_{k-1}) \geq \sum_{i=1}^{r} Q_i(t_k), \qquad r = 1, 2, 3, 4.$$

При этом из выражения (26) видно, что полученное решение $\gamma_r(t_{k-1}) \geq 0$, т.е. это решение удовлетворяет условию неотрицательности вероятностей переходов.

Итак, мы рассмотрели два метода расчета коэффициентов вероятностей $\gamma_r(t_k)$, что позволяет определить для отдельного кредита с периодом кредитования T интервальные вероятности дефолтов $W_i^{\lambda}(\gamma_r(t_k))$. В таблице показаны основные свойства этих методов.

Таблица

Сравнительная характеристика методов расчета коэффициентов вероятностей

Метод виртуальных периодов	**Динамический метод**
1. На соответствующем каждому моменту t_k виртуальном периоде кредитования T даются *экспертные оценки* норм резервирования $N_i(t_k)$ (или, что то же самое, вероятностей дефолтов $W_i(t_k)$).	1. Рассматриваются *фактические распределения кредитов* по категориям качества, соответствующие текущему t_k и предыдущему t_{k-1} моментам времени.
2. Расчет интервальных вероятностей дефолтов $W_i^{\lambda}(t_k)$ (норм резервирования $N_i^{\lambda}(t_k)$) соответствует *приведению* (пересчету) *экспертных оценок* этих параметров ($W_i(t_k)$ или $N_i(t_k)$), связанных с периодом кредитования T, *к интервалу* ΔT^{λ}.	2. Рассчитываемые интервальные вероятности дефолтов $W_i^{\lambda}(t_k)$ (нормы резервирования $N_i^{\lambda}(t_k)$) отражают *реальные процессы*, поскольку соответствуют динамике фактических распределений кредитов по категориям качества.

3.2.1. Замечание об оценке вероятности дефолта при кризисе

Ограниченность статистического подхода. Известно, что оценка вероятности дефолта кредитов во время кризиса является довольно серьезной проблемой. Суть ее заключается в том, что использование каких-либо исторических данных для статистических расчетов, относящихся к текущему кризису, находится в известном противоречии с уникальностью кризиса.

Кроме того, статистический подход дает хорошие результаты лишь в тех случаях, когда основывается на данных, соответствующих протяженному временному интервалу, в течение которого внешние (макроэкономические) условия почти не меняются. Но в период кризиса выделить такие протяженные периоды не удается, поскольку даже за небольшие промежутки времени происходят значительные изменения, как самих величин (например, частота дефолтов, макроэкономические показатели и др.), так и связей между ними.

По этим причинам использование для текущего кризиса статистических соотношений, построенных как на ближайших (относящихся к текущему кризису), так и на отдаленных ретроспективных данных (период до кризиса или периоды прошлых кризисов), может приводить к большим неточностям в оценке вероятностей дефолтов.

Возможности динамического метода. В отличие от статистического подхода оценка вероятностей дефолтов динамическим методом (см. Раздел 3.2) не требует наличия ретроспективных данных, соответствующих протяженному временному интервалу. В методе используется всего два набора данных (распределений кредитов по категориям качества), которые связаны с текущим и предыдущим моментами времени. Эти распределения для каждого текущего момента однозначно определяют вероятность дефолта кредитов, в том числе и во время кризиса.

Таким образом, в силу того, что в расчете используются не отдаленные исторические, а текущие данные, которые связаны с рассматриваемым кризисом, **динамический метод дает адекватную оценку дефолта при кризисе**.

Отметим также, что в период кризиса (по сравнению со спокойным периодом) условие применимости метода (24) не накладывает каких-либо особых ограничений. Оно требует лишь выбора меньших интервалов времени ΔT, через которые измеряются распределения кредитов. Это требование связано с необходимостью сохранения точности расчетов при кризисе в условиях быстрых и значительных изменений распределений кредитов по категориям качества.

4. Оценка потерь и резервов в случае, когда сумма долга по кредиту выплачивается долями в течение периода кредитования

Рассмотрим кредит с периодом кредитования T, который в момент выдачи t_0 имеет номинал $q(t_0)$. Сначала рассмотрим случай, когда частичное погашение кредита отсутствует. Пусть в момент $t_k = t_0 + k * \Delta T$ этот кредит $q_{i^*}(t_k)$ ($q_{i^*}(t_k) = q(t_0)$) находится в категории качества $i = i^*$. В следующий момент t_{k+1} его положение можно предсказать только вероятностным способом с помощью матрицы вероятностей переходов $W^{\mu}_{i^* j}(t_k)$, которая в момент t_k описывает вероятность перехода кредита из состояния i^* в состояние j за интервал ΔT (см. (П1.10) при $\alpha = \mu$, $\mu * T = \Delta T$). Таким образом, в момент t_{k+1} положение кредита представляется в виде статистического распределения:

$$q_j(t_{k+1}) = q_{i^*}(t_k) * W^{\mu}_{i^* j}(t_k),$$

которое характеризует средний (по реализациям) объем кредита, приходящийся на категорию качества j.

В момент t_{k+p} статистическое распределение кредита имеет вид:

$$q_j(t_{k+p}) = \sum_{l,r,\dots s=1}^{5} q_{i^*}(t_k) * W^{\mu}_{i^* l}(t_k) * W^{\mu}_{lr}(t_{k+1}) * \dots * W^{\mu}_{sj}(t_{k+p-1}) =$$

$$= q_{i^*}(t_k) * W^{\mu * p}_{i^* j}(t_k), \qquad p = 1, 2, \dots m - k - 1. \qquad (27)$$

Здесь $W^{\mu * p}_{i^* j}(t_k)$ - матрица вероятностей переходов в момент t_k из состояния i^* в состояние j за интервал времени $p * \Delta T = p * \mu * T$:

$$W^{\mu * p}_{i^* j}(t_k) = \sum_{l,r,\dots s=1}^{5} W^{\mu}_{i^* l}(t_k) * W^{\mu}_{lr}(t_{k+1}) * \dots * W^{\mu}_{sj}(t_{k+p-1}).$$

Будем теперь считать, что имеет место частичное погашение кредита. Оно происходит равными долями g от первоначального номинала $q(t_0)$ через равные промежутки времени $f * \Delta T$, где $g = 1/h$, f и h - целые положительные числа такие, что $h * f = m$ (см. (6)). Тогда непогашенная часть кредита, который в момент t_k находится в категории качества i^*, имеет вид:

$$\tilde{q}_{i^*}(t_k) = F(k) * q_{i^*}(t_k), \qquad (28)$$

где

$$F(k)=\begin{cases} k<f\ , & 1 \\ k\geq f*l\ , & 1-l*g\ , \quad l=1,\ 2\ ,\dots h-1. \end{cases} \qquad (29)$$

Распределение кредита по категориям качества в момент t_{k+p} с учетом частичного погашения равно:

$$\tilde{q}_j(t_{k+p})=F(k+p)*q_j(t_{k+p}), \qquad (30)$$

где $q_j(t_{k+p})$ - распределение кредита в отсутствие частичного погашения (см. (27)).

Ожидаемые потери по кредиту $\tilde{q}_{i^*}(t_k)$, который в момент t_k находится в категории качества i^*, описываются выражением:

$$d_{i^*}(t_k)=\tilde{q}_{i^*}(t_k)*W^{\mu}_{i^*}(t_k)+\sum_{p=1}^{m-k-1}\sum_{j=1}^{5}\tilde{q}_j(t_{k+p})*W^{\mu}_j(t_{k+p}). \qquad (31)$$

Здесь $W^{\mu}_{i^*}(t_k)$ и $W^{\mu}_j(t_{k+p})$ - вероятности дефолтов соответственно в моменты t_k и t_{k+p} из состояний i^* и j за интервал ΔT. Первый член в правой части равенства (31) представляет собой потери, ожидаемые в текущий момент t_k и связанные с переходом кредита в состояние дефолта за ($k+1$)-й интервал ΔT. Второй член определяет суммарные потери, ожидаемые в будущие моменты t_{k+p} при переходе кредита в дефолт за последовательные интервалы ΔT: от ($k+2$)-го до m-го, т.е. за общий интервал $(m-k-1)*\Delta T$.

Будем считать, что вероятности переходов и вероятности дефолтов в будущие моменты определяются их значениями в текущий момент t_k, т.е.

$$W^{\mu}_{rs}(t_{k+b})=W^{\mu}_{rs}(t_k), \qquad b=1,\ 2,\ \dots\ p-1, \qquad (32)$$

$$W^{\mu}_j(t_{k+p})=W^{\mu}_j(t_k), \qquad p=1,\ 2,\ \dots\ m-k-1. \qquad (33)$$

Тогда выражение (31) описывает ожидаемые потери в текущий момент t_k за интервал времени $(m-k)*\Delta T$, т.е. от момента t_k до момента окончательного погашения кредита ($\lambda-$интервал).

С учетом соотношений (27)-(30), (32) и (33) выражение (31) можно переписать в виде:

$$d^{\lambda}_{i^*}(t_k)=\tilde{q}_{i^*}(t_k)*\left[W^{\mu}_{i^*}(t_k)+\sum_{p=1}^{m-k-1}\sum_{j=1}^{5}\frac{F(k+p)}{F(k)}*W^{\mu*p}_{i^*j}(t_k)*W^{\mu}_j(t_k)\right].$$

Если бы частичное погашение отсутствовало, то множитель $F(k+p)/F(k)$ в выражении в квадратных скобках равнялся бы 1. Тогда это выражение соответствовало бы вероятности перехода кредита в момент t_k из состояния i^* в состояние дефолта за период времени от текущего момента t_k до момента полного погашения кредита, т.е. за $\lambda-$интервал.

С учетом частичного погашения второй член в квадратных скобках представляет собой сумму вероятностей дефолтов, взвешенных на множитель $F(k+p)/F(k)$, который связан с динамикой остаточного долга по кредиту в течение периода от текущего момента до полного погашения. Таким образом, выражение:

$$\widehat{W}_{i^*}^{\lambda}(t_k) = W_{i^*}^{\mu}(\gamma_r(t_k)) +$$

$$+\sum_{p=1}^{m-k-1}\sum_{j=1}^{5}\frac{F(k+p)}{F(k)} * W_{i^*j}^{\mu*p}(\gamma_r(t_k)) * W_j^{\mu}(\gamma_r(t_k)) \qquad (34)$$

описывает эффективную вероятность дефолта кредита, учитывающую его частичное погашение. Здесь мы учли также, что зависимости от времени матрицы вероятностей переходов и вероятностей дефолтов проявляются через зависимости от времени коэффициентов вероятностей $\gamma_r(t_k)$.

С помощью соотношения (34) ожидаемые потери по кредиту за период от текущего момента до полного погашения описываются выражением:

$$d_{i^*}^{\lambda}(t_k) = \tilde{q}_{i^*}(t_k) * \widehat{W}_{i^*}^{\lambda}(t_k), \qquad (35)$$

где $\tilde{q}_{i^*}(t_k)$ - остаточный долг по кредиту, который в текущий момент t_k находится в состоянии i^*, $\widehat{W}_{i^*}^{\lambda}(t_k)$ - эффективная вероятность дефолта за период от момента t_k до полного погашения (на $\lambda -$интервале).

Величина резервов $r_{i^*}^{\lambda}(t_k)$, формируемая по остаточному долгу $\tilde{q}_{i^*}(t_k)$, представляется в виде, аналогичном выражению для потерь (35):

$$r_{i^*}^{\lambda}(t_k) = \tilde{q}_{i^*}(t_k) * \widehat{N}_{i^*}^{\lambda}(t_k), \qquad (36)$$

где $\widehat{N}_{i^*}^{\lambda}(t_k)$ - эффективная норма резервирования на $\lambda -$интервале, которая учитывает частичное погашение кредита на момент t_k. Ее величина, на основании подхода о покрытии ожидаемых потерь формируемыми резервами ($r_{i^*}^{\lambda}(t_k) = d_{i^*}^{\lambda}(t_k)$), строится в соответствии с соотношением:

$$\widehat{N}_{i^*}^{\lambda}(t_k) = \widehat{W}_{i^*}^{\lambda}(t_k).$$

Здесь для расчета эффективной вероятности дефолта $\widehat{W}_{i^*}^{\lambda}(t_k)$ согласно выражению (34) используется формула (П1.10) для оценки вероятностей переходов $W_{i^*j}^{\mu*p}$ (при $\alpha = \mu * p$) и вероятностей дефолтов $W_{i^*}^{\mu}$, W_j^{μ} (при $\alpha = \mu$), а также Раздел 3 для оценки коэффициентов вероятностей $\gamma_r(t_k)$.

Расчет резервов по формуле (36) так же, как и в случае расчета по формуле (9), будем называть *интервальным резервированием* (на $\lambda -$интервале). При таком резервировании резервы по кредитам формируются (и корректируются) в каждый момент t_k за временной интервал: от текущего момента t_k до момента полного погашения кредита.

Данный подход увязывает размеры резервов с периодом, или *интервалом резервирования* ($\lambda -$интервалом), на котором рассматриваются ожидаемые потери. Характерной величиной здесь выступает норма резервирования $\widehat{N}_{i^*}^{\lambda}$, которая соответствует остаточному долгу и непосредственно связана с данным интервалом. Эту норму резервирования назовем *эффективной интервальной нормой резервирования*.

Итак, мы рассмотрели схему расчета резервов, которая позволяет формировать их объемы в соответствии с ожидаемыми потерями по кредитам. Используя эту методику, рассчитаем теперь минимально достаточный уровень резервов по кредитам и сравним его с резервами, рассчитываемыми по существующей методике.

5. Отношение резервирования

Сначала для различных кредитов рассмотрим динамику ожидаемых потерь на $\lambda-$интервале, который с течением времени уменьшается. Так, для кредитов, которые не перешли в состояние дефолта, ожидаемые потери на этом интервале также могут уменьшаться, в особенности для тех кредитов, которые в текущий момент находятся в высоких категориях качества. Для тех же кредитов, которые быстро смещаются в низкие категории, напротив, может произойти рост потерь. Наконец, для кредитов, которые к текущему моменту оказываются в дефолте, потери являются уже фиксированными (реализованными) и поэтому с течением времени вообще не меняются.

С учетом этих различий при сравнении методик резервирования целесообразно рассматривать совокупную оценку по резервам, т.е. исследовать резервы не по отдельным кредитам, а по группе кредитов.

Для простоты в качестве такой группы рассмотрим группу кредитов (1). Для определенности будем считать, что погашение кредитов наступает в конце срока кредитования. Тогда в момент t_k распределение кредитов примет вид:

$$Q_j(t_k) = Q_{i^*}(t_0) * W_{i^*j}^{\mu*k}(t_0), \tag{37}$$

где матрица вероятностей переходов за интервал $k*\Delta T$ ($k*\mu*T$) равна:

$$W_{i^*j}^{\mu*k}(t_0) = \sum_{s,p,\dots q=1}^{5} W_{i^*s}^{\mu}(\gamma_r(t_0)) * W_{sp}^{\mu}(\gamma_r(t_1)) * \dots * W_{qj}^{\mu}(\gamma_r(t_{k-1})).$$

Потери в момент t_k на $\lambda-$интервале ($\lambda = 1-\mu*k$) составляют величину:

$$D^{\lambda}(t_k) = \sum_{j=1}^{5} Q_j(t_k) * W_j^{1-\mu*k}(\gamma_r(t_k)) =$$

$$= Q_{j=5}(t_k) + \sum_{j=1}^{4} Q_j(t_k) * W_j^{1-\mu*k}(\gamma_r(t_k)). \tag{38}$$

Здесь первый член $Q_{j=5}(t_k)$ в правой части описывает кредиты, которые к моменту t_k уже находятся в состоянии дефолта ($j=5$). Для них потери на $\lambda-$интервале имеют вероятность, равную 1 ($W_{j=5}^{1-\mu*k} = 1$), т.е. представляют собой реализованные потери. Второй член в выражении (38) описывает ожидаемые потери по другим кредитам, которые еще не находятся в состоянии дефолта. Подставим в (38) соотношение (37). Тогда выражение для потерь примет вид:

$$D^{\lambda}(t_k) = Q_{i^*}(t_0) \sum_{j=1}^{5} W_{i^*j}^{\mu*k}(t_0) * W_j^{1-\mu*k}(\gamma_r(t_k)). \tag{39}$$

Будем теперь считать, что в течение всего периода кредитования выполняются *стационарные условия*, т.е. риски, а, следовательно, коэффициенты вероятностей γ_r не меняются со временем:

$$\gamma_r(t_k) = \gamma_r(t_0),\ k = 1,\ 2,\ \dots m-1.$$

Тогда выражение (39) можно записать в виде:

$$D^{\lambda}(t_k) = Q_{i^*}(t_0) * \sum_{j=1}^{5} W_{i^*j}^{\mu*k}(t_0) * W_j^{1-\mu*k}(\gamma_r(t_0)) =$$

$$=Q_{i^*}(t_0)*W_{i^*}(\gamma_r(t_0))=D(t_0). \quad (40)$$

Отсюда видно, что **в стационарных условиях потери на $\lambda-$интервале в любой момент t_k остаются неизменными и равны ожидаемым потерям $D(t_0)$ в начальный момент t_0.** Это связано со следующими обстоятельствами. С одной стороны, с течением времени все большее число кредитов оказывается в состоянии дефолта, и при этом увеличиваются реализованные потери. С другой стороны, уменьшается $\lambda-$интервал, что приводит к уменьшению на этом интервале ожидаемых потерь. В стационарных условиях эти изменения компенсируют друг друга, и поэтому общие потери в течение периода кредитования не меняются.

В соответствии с методикой интервального резервирования потери $D^{\lambda}(t_k)$ в любой момент t_k должны покрываться корректируемыми в этот момент резервами. С учетом соотношения (40), где полная вероятность дефолта W_{i^*} соответствует полной норме резервирования N_{i^*}, величина резервов равна:

$$R^{\lambda}(t_k)=Q_{i^*}(t_0)*N_{i^*}.$$

Рассмотрим теперь величину резервов, которая рассчитывается в соответствии с существующей методикой (полного) резервирования. Сначала исследуем общую динамику создаваемых резервов. Так, в соответствии с Положением в начальный момент t_0 величина резервов для группы кредитов (1) равна:

$$R(t_0)=Q_{i^*}(t_0)*N_{i^*}.$$

С течением времени часть кредитов смещается (и в стационарных условиях тоже) из категории i^* в более низкие категории j ($i^*<j$). В момент t_k величина резервов для нового распределения кредитов $Q_j(t_k)$ (см. (37)) рассчитывается по формуле:

$$R(t_k)=\sum_{i^*\le j}^{5}Q_j(t_k)*N_j.$$

Заметим, что при движении кредитов вниз по категориям для распределения $Q_j(t_k)$ выполняется соотношение: $Q_j(t_k)>0$ (по крайней мере, для некоторых $j>i^*$) в отличие от начального распределения, для которого $Q_j(t_0)=0$ при $j>i^*$. Отсюда следует, что

$$R(t_k)>R(t_0),$$

поскольку для более низких категорий j выполняется соотношение: $N_j>N_{i^*}$ ($j>i^*$). Таким образом, **при смещении кредитов в сторону более низких категорий качества резервы, оцениваемые по существующей методике, возрастают**.

Наибольшего значения они достигают в предпоследний перед погашением кредитов момент t_{m-1} ($T=m*\Delta T$):

$$R(t_{m-1})=\sum_{j=1}^{5}Q_j(t_{m-1})*N_j.$$

В этом выражении распределение кредитов в момент t_{m-1} связано с начальным распределением соотношением (см. (37)):

$$Q_j(t_{m-1}) = Q_{i^*}(t_0) * W^{1-\mu}_{i^* j}(\gamma_r(t_0)),$$

где $W^{1-\mu}_{i^* j}(\gamma_r(t_0))$ - матрица вероятностей переходов в момент t_0 за интервал $(m-1)*\Delta T$ ($(1-\mu)*T$).

Входящие сюда коэффициенты вероятностей γ_r в соответствии с Разделом 3.1 вычисляются методом виртуальных периодов, если известны значения полных норм резервирования N_i. Мы рассмотрим два варианта значений норм резервирования, которые соответствуют нижней и верхней границам, установленным в Положении для различных категорий качества кредитов:

Вариант 1: $N_1 = 0.01\%$, $N_2 = 1\%$, $N_3 = 21\%$, $N_4 = 51\%$ (41)

Вариант 2: $N_1 = 0.01\%$, $N_2 = 20\%$, $N_3 = 50\%$, $N_4 = 99\%$. (42)

Заметим, что здесь введены коррективы к некоторым значениям, используемым в Положении. Так, вместо $N_1 = 0$ рассматривается близкое значение $N_1 = 0.01\%$, поскольку в соответствии с полученной матрицей вероятностей переходов при значении $N_1 = 0$ переходы из категории качества $i = 1$ отсутствуют. Действительно, из уравнения (21) следует, что в этом случае коэффициент вероятности $\gamma_1 = 0$, при этом в матрице вероятностей (П1.10) все вероятности переходов из категории качества $i = 1$ обращаются в нуль. Кроме того, в варианте 2 вместо значения $N_4 = 100\%$ используется близкое значение $N_4 = 99\%$, которое позволяет избежать возникновения неустойчивостей при численных расчетах матрицы вероятностей.[8]

Теперь для каждого из вариантов исследуем поведение отношения резервов RR (reserves ratio):

$$RR(i^*) = \frac{R(t_{m-1})}{R^{\lambda}(t_k)} = \frac{\sum_{j=1}^{5} W^{1-\mu}_{i^* j}(\gamma_r(t_0)) * N_j}{N_{i^*}},$$

которое связано с периодом кредитования T. Это отношение назовем *отношением резервирования*. Оно характеризует превышение резервов $R(t_{m-1})$ (максимальное значение за период кредитования), оцененных в соответствии с существующей методикой, над минимально достаточным уровнем резервирования $R^{\lambda}(t_k)$, которое определяется ожидаемыми потерями.

Отношение резервирования рассмотрим для различных начальных распределений $Q_{i^*}(t_0)$, которые соответствуют нахождению группы кредитов в различных категориях качества ($i^* = 1,\ 2,\ 3,\ 4$). Расчеты проведем для каждого из вариантов (41), (42) при значении $\mu = 0.05$ ($m = 20$).

---

[8] В аналитических выражениях при некоторых значениях переменных могут возникать неопределенности типа: $0 * \infty$, которые разрешаются (вычисляются аналитически) путем предельного перехода. При численных расчетах в окрестности таких неопределенностей могут возникать численные неустойчивости. Их можно избежать, если вместо точных значений переменных, связанных с неопределенностью, рассматривать их близкие значения.

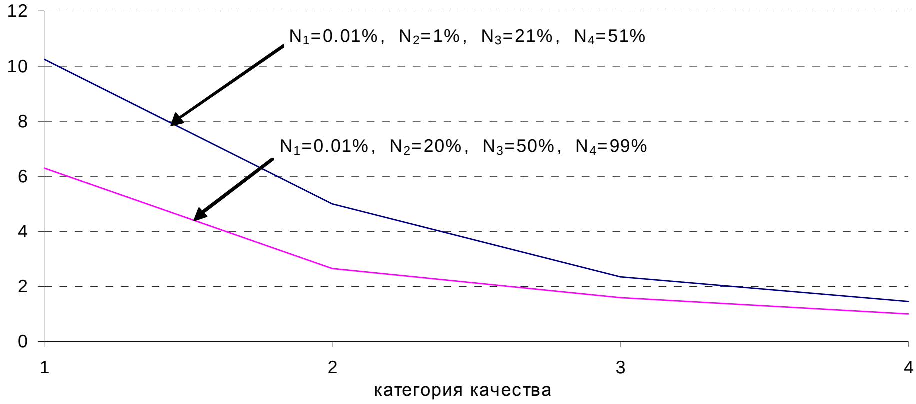

Рис. 1. Зависимость отношения резервирования от начального распределения кредитов по категориям качества.

На рис.1 показаны результаты расчетов. Из рисунка видно, что чем лучше качество кредитов, тем больше отношение резервирования. Причем для первого варианта, который соответствует меньшим значениям норм резервирования, величина RR оказывается больше.

Максимальных значений отношение резервирования достигает для кредитов, находящихся в первой категории качества: 10 для первого варианта и 6 – для второго. С понижением качества категорий значения RR для двух вариантов сближаются: при $i^* = 3$ они находятся вблизи значения 2.

Отсюда следует, что при оценке резервов под потери по кредитам **существующая методика резервирования приводит к результату, который для категорий качества** $i^* \le 3$ **в несколько раз превышает необходимый уровень**. Причем, чем выше начальное качество кредитов, тем больше создается излишних резервов в течение периода кредитования.

Альтернативой существующей методике резервирования может служить рассмотренная выше методика *интервального резервирования*, которая ориентирована на покрытие ожидаемых потерь (т.е. адекватна кредитным рискам), и потому приводит к необходимому (минимально достаточному) уровню создаваемых резервов. Такое резервирование отражает *бережливый подход* к расходованию капитала, при котором сэкономленные капитальные ресурсы могут быть направлены на расширение кредитования, в том числе в целях модернизации производства и внедрения инноваций.

Приложение 1

Построение модельной матрицы вероятностей переходов

Рассмотрим группу кредитов с периодом кредитования T и датой выдачи t_0.[9] Для того чтобы оценить вероятность их дефолта в течение промежутка времени, меньшего периода кредитования, необходимо построить соответствующую матрицу вероятностей переходов кредитов по категориям качества. Для этого используем некоторые упрощения. Так, поскольку вероятности переходов W_{ik} из категории i в более высокие категории k ($k < i$) на практике оказываются существенно меньшими, чем в более низкие j ($i < j$), а именно: $W_{ik} << W_{ij}$, будем считать вероятности переходов в более высокие категории равными нулю:

$$W_{ik} = 0 \ \ (k < i), \qquad (\text{П}1.1)$$

т.е. вместо реальной матрицы будем использовать *модельную треугольную матрицу вероятностей*.

Рассмотрим сначала переходы в течение достаточно малого временного интервала:

$$\Delta t = \frac{T}{n}, \qquad (\text{П}1.2)$$

где T - период кредитования, n - большое целое число. На таком интервале значимыми, т.е. отличными от нуля, будем считать вероятности переходов только в соседние состояния $i+1$, поскольку для более дальних переходов вероятности будут существенно меньшими. Тогда, учитывая приближение (П1.1), матрицу вероятностей переходов из состояния i в состояние j можно представить в виде:

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}1.3)$$

где p_i - вероятность перехода кредитов из состояния i ($i \le 4$) в состояние $i+1$, $\delta_i = 1 - p_i$ ($0 \le p_i \le 1$). Здесь значение $i = 5$ соответствует дефолту. Из этого состояния кредиты уже никуда не переходят, поэтому $\delta_5 = 1$ ($p_5 = 0$).

С помощью матрицы вероятностей (П1.3) определим изменение распределения кредитов во времени. Так, если в начальный момент t_0 распределение кредитов по категориям качества равно $Q_i(t_0)$, то через интервал Δt, в момент t_1 ($t_1 = t_0 + \Delta t$), оно представляется величиной:

$$Q_j(t_1) = \sum_{i=1}^{5} Q_i(t_0) * \omega_{ij}(t_0),$$

в момент t_2 ($t_2 = t_0 + 2 * \Delta t$):

[9] Результаты, полученные в этом Приложении для группы кредитов, применимы и для отдельных кредитов, которые составляют данную группу (см. раздел 1).

$$Q_j(t_2)=\sum_{i=1}^{5} Q_i(t_1)*\omega_{ij}(t_1)=\sum_{i,l=1}^{5} Q_i(t_0)*\omega_{il}(t_0)*\omega_{lj}(t_1),$$

и т.д. Наконец, в момент t_k ($t_k=t_0+k*\Delta t$), распределение примет вид:

$$Q_j(t_k)=\sum_{i,l,m,\dots s,r=1}^{5} Q_i(t_0)*\omega_{il}(t_0)*\omega_{lm}(t_1)*\dots*\omega_{sr}(t_{k-2})*\omega_{rj}(t_{k-1}), \qquad (П1.4)$$

где $\omega_{ij}(t_s)$ - матрица вероятностей (П1.3), в которой вероятности переходов $p_l=p_l(t_s)$ ($1\le l\le 4$) соответствуют моменту t_s ($0\le s\le k-1$), $k=1,2,\dots n$.

Вводя обозначение:

$$W_{ij}(k*\Delta t)=\sum_{l,m,\dots s,r=1}^{5} \omega_{il}(t_0)*\omega_{lm}(t_1)*\dots*\omega_{sr}(t_{k-2})*\omega_{rj}(t_{k-1}), \qquad (П1.5)$$

выражение (П1.4) можно записать в следующем виде:

$$Q_j(t_k)=\sum_{i=1}^{5} Q_i(t_0)*W_{ij}(k*\Delta t), \qquad (П1.6)$$

где $W_{ij}(k*\Delta t)$ - матрица вероятностей переходов за период $k*\Delta t$.

Рассмотрим формулу (П1.5) на периоде $m*\Delta t$, положив здесь $k=m$ (m - целое), где $m=\alpha*n$ ($\alpha\le 1$), при этом $m*\Delta t=\alpha*T$ (см. (П1.2)). Будем считать, что в течение всего периода выполняются *стационарные условия*, при которых вероятности переходов p_l, а, следовательно, и матрицы вероятностей ω_{ij} не зависят от времени.

Подставим в формулу (П1.5) выражение для матрицы вероятностей (П1.3). Производя последовательное умножение матриц, которые соответствуют отдельным временным интервалам Δt, получаем матрицу вероятностей переходов на периоде $m*\Delta t$:

$$W_{ij}(\alpha*T)=\begin{pmatrix} \delta_1^m & p_1*G_{1:2}^{m-1} & p_1*p_2*G_{1:3}^{m-2} & p_1*p_2*p_3*G_{1:4}^{m-3} & p_1*p_2*p_3*p_4*G_{1:5}^{m-4} \\ 0 & \delta_2^m & p_2*G_{2:3}^{m-1} & p_2*p_3*G_{2:4}^{m-2} & p_2*p_3*p_4*G_{2:5}^{m-3} \\ 0 & 0 & \delta_3^m & p_3*G_{3:4}^{m-1} & p_3*p_4*G_{3:5}^{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4^m & p_4*G_{4:5}^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5^m \end{pmatrix} \qquad (П1.7)$$

Здесь введены обозначения:

$$G_{l:l+1}^{m-1}=G^{m-1}(\delta_l,\delta_{l+1})=\sum_{q=0}^{m-1}\delta_l^q*\delta_{l+1}^{m-q-1}, \qquad l=1,2,3,4$$

$$G_{l:l+2}^{m-2}=G^{m-2}(\delta_l,\delta_{l+1},\delta_{l+2})=\sum_{q=0}^{m-2}\delta_l^q*G_{l+1:l+2}^{m-q-2}, \qquad l=1,2,3 \qquad (П1.8)$$

$$G_{l:l+3}^{m-3}=G^{m-3}(\delta_l,\delta_{l+1},\delta_{l+2},\delta_{l+3})=\sum_{q=0}^{m-3}\delta_l^q*G_{l+1:l+3}^{m-q-3}, \qquad l=1,2$$

$$G_{1:5}^{m-4} = G^{m-4}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5) = \sum_{q=0}^{m-4} \delta_1^q * G_{2:5}^{m-q-4}.$$

В каждом соотношении (П1.8) величина G, стоящая с правой стороны равенства, выражается через величину G в предыдущем равенстве, стоящую с левой стороны. Так, величина $G_{l+1:l+2}^{m-q-2}$ выражается через $G_{l:l+1}^{m-1}$, $G_{l+1:l+3}^{m-q-3}$ - через $G_{l:l+2}^{m-2}$ и т.д.

Используя тождество:

$$\sum_{k=0}^{m} \delta_l^k * \delta_q^{m-k} = \frac{\delta_l^{m+1} - \delta_q^{m+1}}{\delta_l - \delta_q}, \qquad l < q,$$

где $l = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ и $q = 2,\ 3,\ 4,\ 5$, выражения (П1.8) можно просуммировать и записать в следующем виде:

$$G_{l:l+1}^{m-1} = \frac{\delta_l^m - \delta_{l+1}^m}{\delta_l - \delta_{l+1}}, \qquad l = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$G_{l:l+2}^{m-2} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\delta_{l+k}^m}{\prod_{q=l}^{l+2}(\delta_{l+k} - \delta_q)'}, \qquad l = 1,\ 2,\ 3$$

$$G_{l:l+3}^{m-3} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\delta_{l+k}^m}{\prod_{q=l}^{l+3}(\delta_{l+k} - \delta_q)'}, \qquad l = 1,\ 2$$

$$G_{1:5}^{m-4} = \sum_{k=0}^{4} \frac{\delta_{1+k}^m}{\prod_{q=1}^{5}(\delta_{1+k} - \delta_q)'},$$

где $\prod_{q=l}^{r}(\delta_{l+k} - \delta_q)'$ - произведение по всем q от $q = l$ до $q = r$ за исключением $q = l + k$, $\delta_l = 1 - p_l$.

Напомним, что p_l ($l \le 4$) рассматриваются на малом интервале Δt (см. (П1.2)), поэтому в первом приближении вероятности переходов в соседние состояния можно представить в виде (n - велико):

$$p_l = \frac{\gamma_l}{n}. \qquad \text{(П1.9)}$$

Величины γ_l ($\gamma_l \ge 0$) назовем *коэффициентами вероятностей*.

При $m, n \to \infty$ ($\alpha = m/n$ - const) величина:

$$\delta_l^m = \left(1 - \frac{\gamma_l}{n}\right)^m \quad \Rightarrow \quad \exp(-\alpha * \gamma_l).$$

Подставляя это в (П1.7) и учитывая (П1.9), матрицу вероятностей (П1.7) можно представить в виде:

$$W_{ij}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \exp(-\alpha*\gamma_1) & \gamma_1*L_{1:2}^{\alpha} & \gamma_1*\gamma_2*L_{1:3}^{\alpha} & \gamma_1*\gamma_2*\gamma_3*L_{1:4}^{\alpha} & \gamma_1*\gamma_2*\gamma_3*\gamma_4*L_{1:5}^{\alpha} \\ 0 & \exp(-\alpha*\gamma_2) & \gamma_2*L_{2:3}^{\alpha} & \gamma_2*\gamma_3*L_{2:4}^{\alpha} & \gamma_2*\gamma_3*\gamma_4*L_{2:5}^{\alpha} \\ 0 & 0 & \exp(-\alpha*\gamma_3) & \gamma_3*L_{3:4}^{\alpha} & \gamma_3*\gamma_4*L_{3:5}^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-\alpha*\gamma_4) & \gamma_4*L_{4:5}^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}1.10)$$

где

$$L_{l:l+1}^{\alpha} = \frac{\exp(-\alpha*\gamma_l) - \exp(-\alpha*\gamma_{l+1})}{\gamma_{l+1} - \gamma_l}, \qquad l = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$L_{l:l+2}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\exp(-\alpha*\gamma_{l+k})}{\prod\limits_{q=l}^{l+2}{}' (\gamma_q - \gamma_{l+k})}, \qquad l = 1,\ 2,\ 3 \qquad (\text{П}1.11)$$

$$L_{l:l+3}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\exp(-\alpha*\gamma_{l+k})}{\prod\limits_{q=l}^{l+3}{}' (\gamma_q - \gamma_{l+k})}, \qquad l = 1,\ 2$$

$$L_{1:5}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{4} \frac{\exp(-\alpha*\gamma_{1+k})}{\prod\limits_{q=1}^{5}{}' (\gamma_q - \gamma_{1+k})}.$$

С помощью соотношений (П1.11) можно показать, что сумма вероятностей в каждой строке матрицы (П1.10) равна 1. Наиболее просто это можно увидеть для состояния $i = 4$. Так, для четвертой строки матрицы (П1.10) имеем:

$$\exp(-\alpha*\gamma_4) + \gamma_4 * \frac{\exp(-\alpha*\gamma_4) - 1}{-\gamma_4} = 1.$$

Это означает, что полученная матрица действительно удовлетворяет условию вероятностей, в соответствии с которым кредит, находящийся в состоянии i, либо останется в этом состоянии, либо перейдет в любое другое возможное состояние j ($i < j$).

Полученное выражение (П1.10) позволяет рассчитать вероятности переходов за любой конечный интервал времени $\Delta T^{\alpha} = \alpha * T$ ($\alpha \le 1$), если известны значения коэффициентов вероятностей γ_l ($l \le 4$). В свою очередь, с помощью матрицы вероятностей (П1.10) можно найти нормы резервирования N_i^{α}, соответствующие данному интервалу ΔT^{α}.

Так, используя вероятности дефолтов W_i^{α} ($W_i^{\alpha} = W_{i5}^{\alpha}$) из формулы (П1.10) для оценки ожидаемых потерь, можно аналогично (4) получить, что на интервале ΔT^{α}:

$$N_i^{\alpha} = W_i^{\alpha}.$$

Таким образом, **для любого интервала $\Delta T^{\alpha} = \alpha * T$ ($\alpha \le 1$) норму резервирования по кредитам, которые находятся в состоянии i, можно найти, исходя из рассчитываемой по формуле (П1.10) вероятности их перехода из этого состояния в состояние дефолта.**

Приложение 2

Исследование свойств коэффициентов вероятностей

В соответствии с уравнениями (17), (19)-(21) решения γ_i зависят от параметров следующим образом:

$$\gamma_4 = \gamma_4(N_4), \qquad \text{(П2.1)}$$

$$\gamma_3 = \gamma_3(\gamma_4, N_3, N_4), \qquad \text{(П2.2)}$$

$$\gamma_2 = \gamma_2(\gamma_3, \gamma_4, N_2, N_3, N_4), \qquad \text{(П2.3)}$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, N_1, N_2, N_3, N_4). \qquad \text{(П2.4)}$$

Подставим решения, начиная с (П2.1), в последующие, в которых предыдущие решения рассматриваются как параметры. Тогда зависимость решений от параметров примет вид:

$$\gamma_4 = \gamma_4(N_4), \qquad \text{(П2.5)}$$

$$\gamma_3 = \gamma_3(N_3, N_4), \qquad \text{(П2.6)}$$

$$\gamma_2 = \gamma_2(N_2, N_3, N_4), \qquad \text{(П2.7)}$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(N_1, N_2, N_3, N_4). \qquad \text{(П2.8)}$$

Отсюда видно, что коэффициенты вероятностей γ_i, а, следовательно, и вероятности переходов p_i зависят от норм резервирования данной категории i и всех более низких категорий j ($i < j$), но не зависят от норм резервирования более высоких категорий k ($k < i$). Это обстоятельство является важным фактором при анализе и построении решений γ_i. Рассмотрим последовательно решения уравнений (17), (19)-(21).

Из (18) видно, что уравнение (17) имеет одно положительное решение γ_4. Для того чтобы выявить искомые положительные решения (корни) других уравнений, исследуем поведение функций $F_i(\gamma)$ при возрастании аргумента, а также особенности некоторых корней уравнений $F_i(\gamma) = 0$ ($i < 4$).

1. Рассмотрим сначала уравнение (19). Из него нетрудно видеть, что в точке $\gamma = \gamma_4$ (см. (П2.1)) уравнение $F_3(\gamma_4) = 0$ преобразуется в уравнение $F_4(\gamma) = 0$, т.е. γ_4 является также корнем уравнения (19). Этот корень, хотя и является положительным, но не зависит от параметра N_3, поэтому не удовлетворяет условию (П2.6) и не может рассматриваться как искомое решение.

Однако уравнение (19) имеет еще один положительный корень.[10] Это видно из поведения функции $F_3(\gamma)$ при возрастании аргумента от $\gamma = 0$ до $\gamma \to \infty$. Так, поскольку $F_3(\gamma = 0) = N_3 > 0$ и $F_3(\gamma \to \infty) > 0$, то при возрастании аргумента функция $F_3(\gamma)$ сначала из положительной области ($F_3 > 0$) через один из корней уходит в отрицательную область ($F_3 < 0$), а затем, проходя через другой корень, снова становится положительной. Этот

[10] Из графического представления функций $F_i(\gamma)$ можно видеть (при любых допустимых значениях параметров), что уравнение (19) имеет не более двух положительных корней, уравнение (20) – не более трех, а (21) – не более четырех.

второй корень, обозначим его γ_3 ($\gamma_3 > 0$), уже зависит от параметров N_3, N_4 и поэтому может рассматриваться как искомое решение уравнения (19).

2. Уравнение (20) при $\gamma = \gamma_4$ преобразуется в уравнение $F_4(\gamma) = 0$, а при $\gamma = \gamma_3$ - в уравнение $F_3(\gamma) = 0$. Таким образом, корни γ_4 и γ_3 уравнений (17) и (19) являются также корнями уравнения (20), однако они не зависят от параметра N_2 и поэтому не удовлетворяют условию (П2.7).

Анализируя поведение функции $F_2(\gamma)$, которая при $\gamma = 0$ равна $N_2 > 0$, а при $\gamma \to \infty$ отрицательна, можно утверждать, что она меняет знак трижды. Это означает, что помимо корней γ_3 и γ_4 она имеет еще третий корень γ_2 ($\gamma_2 > 0$), который зависит от параметров N_2, N_3, N_4 и поэтому является искомым решением уравнения (20).

3. Уравнение (21) при $\gamma = \gamma_4$, $\gamma = \gamma_3$ и $\gamma = \gamma_2$ преобразуется соответственно в уравнения (17), (19) и (20), т.е. корни этих уравнений одновременно являются корнями уравнения (21). Так как эти корни не зависят от параметра N_1, они не являются искомыми корнями уравнения (21).

Искомый корень можно определить из анализа поведения функции $F_1(\gamma)$. Так, поскольку $F_1(\gamma = 0) = N_1 > 0$ и $F_1(\gamma \to \infty) > 0$, то эта функция должна менять знак четыре раза, т.е. помимо корней γ_2, γ_3 и γ_4 она имеет еще один корень γ_1 ($\gamma_1 > 0$). Этот корень зависит от параметров N_1, N_2, N_3, N_4 и является искомым корнем уравнения (21).

Итак, мы показали, что система уравнений (17), (19)-(21) имеет единственное положительное решение γ_i ($i \le 4$), которое удовлетворяет условиям (П2.5)-(П2.8). На рис. 2 представлены функции $F_i(\gamma)$ и корни γ_i уравнений (17), (19)-(21) (коэффициенты вероятностей), рассчитанные для конкретных значений норм резервирования: $N_1 = 0.5\%$, $N_2 = 10\%$, $N_3 = 30\%$, $N_4 = 90\%$. Значениям функций F_1 и F_2 соответствует правая шкала, значениям F_3 и F_4 - левая. Отметим, что взаимное расположение корней γ_i ($i \le 4$) может меняться в зависимости от значений параметров N_j ($j \le 4$).

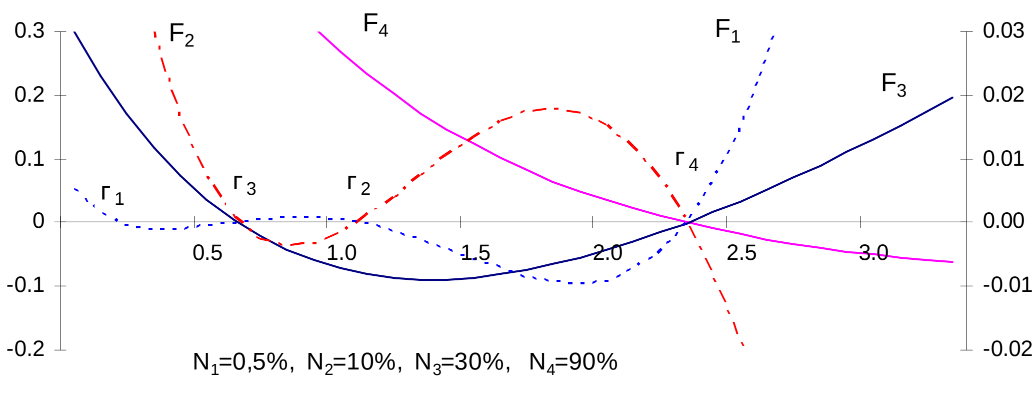

Рис. 2. Коэффициенты вероятностей γ_i соседних переходов.

Система уравнений (17), (19)-(21) позволяет рассчитать коэффициенты вероятностей γ_i ($i \le 4$) при заданных значениях норм резервирования N_j ($j \le 4$). Отсюда можно определить матрицу вероятностей переходов на любом конечном периоде, меньшем периода кредитования T.