

Построение границы Марковица методом кусочно-нелинейной аппроксимации

The construction of Markowitz efficient frontier by the sectionally curvilinear approximation

Криничанский Константин Владимирович

(Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), докт. экон. наук, профессор)

Krinichansky Konstantin Vladimirovich

(Doctor of Economics, Professor of South Ural State University (National Research University))

Безруков Анатолий Владимирович

(Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), старший преподаватель)

Bezrukov Anatoliy Vladimirovich,

(Senior Lecturer of South Ural State University (National Research University))

Аннотация

В работе изложен подход к осуществлению аппроксимации границы допустимого множества портфелей в координатах (доходность, СКО). Авторы показали, что гиперболический вид границы Марковица строго соблюдается лишь для областей, удаленных от оси симметрии гиперболы. Авторы представили вывод функциональной зависимости СКО от доходности портфеля в явном виде. Так как область кривой вблизи оси симметрии может быть описана гиперболой только при нарастании погрешности, предложено на этом участке аппроксимировать ее кубической параболой. Таким образом, реализуется подход к оценке границы Марковица посредством построения кусочно-нелинейной функции.

Annotation

The paper describes an approach to the implementation of the boundary approximation of the feasible set of portfolios in the coordinates [expected return; standard deviation of return]. The authors showed that the Markowitz efficient frontier corresponds the hyperbolic shape exactly only for areas remote from the symmetry axis of the hyperbola. The authors presented the development of the functional connection of the standard deviation with portfolio yield. Since the interval near the axis of symmetry of the curve can be described by a hyperbola only with an increase in measure of inaccuracy, on this area it is offered to approximate it by a cubic parabola. Thus, the approach to

Markowitz efficient frontier evaluation implemented by constructing a sectionally curvilinear function.

JEL: G11, G12, G32

Ключевые слова: инвестиционный анализ; портфельный выбор; оптимизация инвестиционного портфеля; эффективная граница; ценообразование на рынке капитала.

Keywords: Investment Analysis; Portfolio Choice; Portfolio Optimization; Efficient Portfolio Frontier; Capital Asset Pricing.

1. Введение

Решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг рассматривается в классических трудах Г. Марковица [Markowitz, 1952, 1956], У. Шарпа [Sharpe, 1963], Дж. Тобина [Tobin, 1958, 1965]. Современная теория портфеля и ее расширения имеют обширную научную литературу. Ее обобщение можно увидеть в крупных и обстоятельных работах таких авторов, как З. Боди, А. Кейн, А. Маркус [Bodie, Kane, Marcus, 2012], Д. Лунбергер [Luenberger, 2013], Ф. Рейли и К. Браун [Reilly, Brown, 2012], С. Вишванат и К. Кришнамурти [Vishwanat, Krishnamurti, 2009]. На русском языке развиваемые в теории оптимизации портфеля и стыкующейся с ней теории ценообразования на рынках капитала методы анализа представлены в работах У. Шарпа с соавт. [Шарп, Александер, Бэйли, 1998], А. С. Шведова [Шведов, 1999], А. Н. Буренина [Буренин, 2008], Н. И. Берзона и соавт. [Берзон и др., 2011].

Обычным делом для всех работ является анализ активов и формируемых из них портфелей с помощью параметров среднего и стандартного отклонения доходностей активов (портфелей активов) и рассмотрение условий принятия решений инвесторами в координатах риск – ожидаемая доходность. В случае портфельного анализа «классической» координатной плоскостью считается (σ_p, r_p) – СКО и доходность портфеля. При этом часто на предварительном этапе анализа, а также в последующих иллюстрациях для удобства количественного анализа или наглядной графической демонстрации в качестве меры риска вместо СКО принимается дисперсия. Это в особенности становится важно, когда требуется проиллюстрировать графически решение задачи портфельного выбора для случая возможности безрискового заимствования и кредитования. В этом случае эффективная граница становится лучом, образующим касательную к границе допустимого множества портфелей. Тогда, хотя сам анализ осуществляется в координатах (σ_p, r_p) , графический вид границы допустимого множества берется таким, как если бы анализ осуществлялся в координатах, где вместо СКО мерой риска принималась бы дисперсия (см., например, [Bodie, Kane, Marcus, 2012, p. 185], [Буренин, 2008, с. 76–79, 81]).

Это оправдывается тем, что, как утверждается в работах, граница допустимого множества имеет форму гиперболы, и построение к ней касательной (нахождение линии рынка капитала, имеющей в качестве одной из координат ставку без риска) не всегда возможно либо удобно в смысле наглядности; парабола второй степени оказывается более удобна для построения к ней касательной, нежели гипербола.

В настоящей работе излагаются теоретические положения, в рамках которых доказывається некорректность рассмотрения гиперболы в качестве функции, универсально отражающей зависимость $\sigma_p(r_p)$ (наблюдаемую зависимость, рассматриваемую как граница Марковица); осуществляется вывод аналитического вида (явной формы) зависимости $s_p(r_p)$ (функции, аппроксимирующей границу Марковица), подчиняющейся гиперболическому закону; с помощью практического примера показывается степень точности аппроксимации полученной функцией $s_p(r_p)$ наблюдаемой зависимости $\sigma_p(r_p)$; предлагается решение лучшей аппроксимации для областей с наибольшей погрешностью.

2. Обоснование построения границы Марковица методом кусочно-линейной аппроксимации

Граница Марковица или ее сегмент, именуемый эффективным множеством, представляет собой графическое отображение решения задачи оптимизации портфеля. Так называемая теорема об эффективном множестве [Шарп, Александер, Бэйли, 1998, с. 195] звучит так: инвестор выберет свой оптимальный портфель из множества портфелей, каждый из которых: (1) Обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска. (2) Обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности.

Запишем выражения для вычисления ожидаемой доходности и риска портфеля. Доходность портфеля является взвешенной средней доходности входящих в него активов:

$$(1) \quad r_p = \sum_{k=1}^N r_k \cdot g_k,$$

где r_k – ожидаемая доходность k -го актива; g_k – доля k -го актива в портфеле; N – число активов в портфеле.

Риск портфеля рассчитывается следующим образом:

$$(2) \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \cdot g_i \cdot g_j,$$

где c_{ij} – ковариация доходностей i -го и j -го активов.

Таким образом, для построения границы Марковица решается одна из задач оптимизации:

$$(3) \quad r_p \rightarrow \max$$

либо

$$(4) \quad \sigma_p^2 \rightarrow \min$$

при варьировании долей активов g_k и условии нормировки:

$$(5) \quad \sum_k g_k = 1.$$

Дальнейший анализ проводится, как указывалось выше, в координатах (σ_p, r_p) . При этом на примере анализа портфеля, состоящего из двух активов, доказываем, что форма данной зависимости – гипербола [Шведов, 1999, с. 26], [Буренин, 2008, с. 69–71].

Авторам не известны случаи изложения в литературе подходов к построению в явном виде функциональной зависимости СКО портфеля от его доходности.

Частное решение данной задачи было предложено в нашей работе [Криничанский, Безруков, 2014], где множество наблюдаемых точек, образующих эффективный фронт, аппроксимировалось полиномиальной функцией. Такой подход имеет как явные преимущества, так и недостаток. Последний состоит в том, что подход позволяет найти аналитический вид оцениваемой функции, соответствующий лишь некоторому участку кривой Марковица. Действительно, область рабочих значений параметра доходности портфеля r_p в координатах $s_p(r_p)$ довольно ограничена. В указанной работе мы предложили способ преодоления данного недостатка посредством модификации полиномиальной функции путем добавления экспоненциального члена. Это, как мы показали, расширяет аналитические возможности использования полиномиальной аппроксимации для оценки границы Марковица и позволяет, в частности решать такие стандартные задачи, как построение линейной *CML* и нахождение структуры касательного портфеля. Однако все же следует считать предложенный метод ограниченным в своей применимости: в некоторых случаях при его использовании можно столкнуться с проблемой, когда точка касания окажется правее точки перегиба используемого полинома третьей степени.

Собственно, целью настоящей работы является предложить решение проблемы определения формы границы Марковица в координатах (r_p, σ_p) . Для этого мы пытаемся ответить на следующие вопросы:

- Можно ли считать формой кривой, описывающей границу Марковица, гиперболу, как на это указывается в известных работах?
- Каков аналитический вид гиперболы, выражающий функцию $s_p(r_p)$ в явном виде?
- Будет ли полученная кривая лучшим образом аппроксимировать наблюдаемую границу Марковица?

Исследование табличных данных и графика зависимости $\sigma_p(r_p)$ позволяет усмотреть наличие осевой симметрии графика и его асимптотического поведения в областях, удаленных от оси симметрии (минимума функции $\sigma_p(r_p)$).

Симметрия графика и асимптотическое поведение позволяют предположить наличие в зависимости $\sigma_p(r_p)$ *гиперболической составляющей*. Запишем уравнение гиперболы в каноническом виде, взяв в качестве переменных интересующие нас риск и доходность портфеля (классификацию уравнений кривых 2-го порядка, вид уравнения канонической гиперболы и важнейшие характеристики данного уравнения и его графика можно взять из работы: [Бронштейн, Семендяев, 1986, с. 200–203]):

$$(6) \quad \frac{(s_p - m)^2}{b^2} - \frac{(r_p - n)^2}{a^2} = 1,$$

где r_p – доходность портфеля; s_p – оценка риска портфеля, соответствующая данному уровню доходности¹; m и n – смещение центра гиперболы по осям ординат и абсцисс соответственно.

Уравнение (6) описывает плоскую кривую неявно. Приведем каноническую форму к явному виду:

$$\frac{(s_p - m)^2}{b^2} - \left[\frac{(r_p - n)^2 + a^2}{a^2} \right] = 0$$
$$s_p^2 - 2ms + \left\{ m^2 - \frac{b^2}{a^2} [(r_p - n)^2 + a^2] \right\} = 0,$$
$$(7) \quad s_p = m \pm \frac{b}{a} \sqrt{(r_p - n)^2 + a^2}.$$

Таким образом, выраженная в явном виде функция $s_p(r_p)$ содержит квадратный корень из квадратичной функции от r_p . Нас интересует только одна ветвь гиперболы, поэтому будем рассматривать единственный корень с положительным вторым слагаемым.

Запишем также квадрат смещенного значения s_p :

$$(8) \quad (s_p - m)^2 = \frac{b^2}{a^2} [(r_p - n)^2 + a^2].$$

¹ Нам заранее не могут быть известны параметры a , b , m , n данного выражения. Поэтому мы не можем непосредственно вычислить значения $s_p(r_p)$. При этом, в силу того, что данные значения должны соответствовать конкретным (опытным) данным, уместно искать способ нахождения их оценок из эмпирических данных. Алгоритм нахождения оценок $s_p(r_p)$, вычисленных из уравнения гиперболы, но при этом основанных на эмпирических данных, приведен в п. 3 настоящей статьи.

Также отметим, что $(s_p - m)^2$ представляет собой квадратичную функцию от r_p .

Сделаем акцент, что *только при этом условии реализуется классическая каноническая гипербола.*

Теперь рассмотрим функцию риска портфеля, состоящего из произвольного числа активов (формула (2)). Представим ее также в матричной форме:

$$(9) \quad \sigma_p^2 = \mathbf{G}^T \times \mathbf{Cov} \times \mathbf{G},$$

где \mathbf{G} – вектор-столбец долей активов в портфеле; \mathbf{Cov} – матрица ковариаций.

Эта функция, очевидно, представляет собой билинейную форму, а не квадратичную функцию.

Доходность портфеля является линейной формой от доходности активов:

$$(10) \quad r_p = \mathbf{G}^T \times \mathbf{R},$$

где \mathbf{R} – вектор-столбец средних доходностей входящих в портфель активов.

Очевидно, что зависимость $\sigma_p(r_p)$ для $N > 2$ в явном виде записать не удастся. Кроме того, из того, что выражения (2) и (9) являются билинейной формой, а не квадратичной функцией, следует вывод, что в случае, когда число активов $N > 2$, форма кривой, описывающей исследуемую зависимость, будет отличаться от гиперболической. При этом эти отличия будут отчетливо проявляться вблизи оси симметрии (минимума функции $\sigma_p(r_p)$) и сглаживаться в областях, удаленных от оси симметрии, где график функции будет асимптотически приближаться к гиперболе.

Теорема 1. Покажем, что график риска портфеля $\sigma_p(r_p)$ для числа активов $N > 2$ асимптотически стремится к гиперболе.

Доказательство:

Полагаясь на выводы, сделанные из формул (7) и (8), будем считать, что достаточным условием для доказательства того, что некоторая оценка $s_p(r_p)$ функции $\sigma_p(r_p)$ окажется гиперболой, является получение в выражении $s_p(r_p)$ под корнем или в выражении $s_p^2(r_p)$ квадратичной функции от r_p .

Упорядочим величины $r_k g_k$ вклада в доходность портфеля отдельных активов по убыванию, так что $r_1 g_1$ будет иметь наибольшее значение. Также предположим, что некоторые условия формирования оптимального портфеля определяют то, что первое слагаемое $r_1 g_1$ выражения (1) удовлетворительно приближает значение доходности портфеля r_p :

$$r_p = r_1 g_1 + \varepsilon,$$

где ε – малый остаток.

Отсюда

$$(11) \quad g_1 = \frac{r_p - \varepsilon}{r_1} = \frac{r_p}{r_1} - \phi.$$

где ϕ – малый остаток.

В таком случае можно записать

$$(12) \quad \sigma_p^2 = c_{11}g_1^2 + (c_{12}g_2 + c_{13}g_3 + \dots + c_{1N}g_N)g_1 + \nu,$$

где ν – малый остаток.

Формула (12) выражает квадратичную функцию от g_1 .

Теперь, переходя от точного выражения к некоторой оценке дисперсии доходности портфеля, используя формулу (11), запишем:

$$(13) \quad s_p^2 = c_{11} \left(\frac{r_p}{r_1} \right)^2 + (c_{12}g_2 + c_{13}g_3 + \dots + c_{1N}g_N) \left(\frac{r_p}{r_1} \right).$$

Формула (13) – квадратичная функция от r_p .

Наконец, приведем запись риска портфеля в виде СКО его доходности:

$$(14) \quad s_p = \sqrt{s_p^2} = \sqrt{c_{11} \left(\frac{r_p}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{r_p}{r_1} \right) \cdot \sum_{k=2}^N c_{1k}g_k}.$$

Здесь подкоренное выражение также является квадратичной функцией от r_p , что и требовалось доказать. ■

Итак, еще раз укажем, что в силу того, что выражение (9) представляет собой билинейную форму, а не квадратичную функцию, его график, как этого требует вывод, следующий из формулы (8), не будет в точности соответствовать графику канонической гиперболы.

Основываясь на результатах теоремы 1, можно утверждать, что функция $f = s_p(r_p)$ в области больших значений вклада r_1g_1 актива 1 в доходность портфеля: $r_1g_1 \rightarrow r_p$ асимптотически стремится к гиперболе. На всей области определений исследуемая зависимость может быть охарактеризована как *аппроксимируемая гиперболой* (аналитический вид этой функции выводится в п. 3). При этом, как показано в нашей работе [Криничанский, Безруков, 2014], вид анализируемой кривой вблизи окрестности ее осевой симметрии наилучшим образом аппроксимируется полиномом третьей степени. Заранее скажем, что не существует объективного критерия для установления границ области, аппроксимируемой кубической параболой интересующей нас зависимости. Эти границы исследователь определяет из соображений требуемой точности приближения.

Рассмотрим далее случай, когда портфель содержит только два актива. Здесь билинейная форма будет вырождаться в квадратичную функцию от g_1 :

$$\sigma_p^2 = \mathbf{G}^T \times \mathbf{Cov} \times \mathbf{G} = c_{11}g_1^2 + 2c_{12}g_1g_2 + c_{22}g_2^2.$$

Выразив $g_2 = 1 - g_1$, запишем:

$$(15) \quad \sigma_p^2 = c_{11}g_1^2 + 2c_{12}g_1(1 - g_1) + c_{22}(1 - g_1)^2.$$

Доходность портфеля определится как линейная функция от g_1 :

$$r_p = r_1g_1 + r_2g_2 = r_1g_1 + r_1(1 - g_1) = g_1(r_1 - r_2) + r_2,$$

откуда:

$$g_1 = \frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2}; \quad 1 - g_1 = \frac{r_1 - r_p}{r_1 - r_2}.$$

Подставляя выражения для g_1 и $(1 - g_1)$ в формулу (15), получаем квадратичную функцию от r_p :

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= c_{11} \left(\frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2} \right)^2 + 2c_{12} \frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2} \cdot \frac{r_1 - r_p}{r_1 - r_2} + c_{22} \left(\frac{r_1 - r_p}{r_1 - r_2} \right)^2, \\ \sigma_p^2 &= \frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \left\{ r_p^2 (c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) + 2r_p [c_{12}(r_1 + r_2) - c_{11}r_2 - c_{22}r_1] + \right. \\ &\quad \left. + (c_{11}r_2^2 + c_{22}r_1^2 - 2c_{12}r_1r_2) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае двух активов (в том числе преобладающих в портфеле по критерию $r_k g_k$: $r_1 g_1 \geq r_2 g_2 > \dots > r_N g_N$) выражение дисперсии и СКО портфеля содержит явно выраженную квадратичную функцию от r_p , поэтому для данного условия справедливо, что зависимость $\sigma_p(r_p)$ является гиперболой. Этот частный результат показан в работе А.Н. Буренина [Буренин, 2008, с. 69–71].

3. Построение сопряженной к каноническому виду гиперболы для аппроксимации границы Марковица

Запишем еще раз уравнение гиперболы (16) и покажем ее график (рис. 1). Уравнение гиперболы, сопряженной к каноническому виду, в координатах (r, s) (подстрочный индекс “ p ” для удобства здесь и далее в п. 3 опущен) имеет вид:

$$(16) \quad -\frac{(r - r^*)^2}{a^2} + \frac{(s - s^*)^2}{b^2} = 1,$$

где (r^*, s^*) – точка пересечения асимптот.

Введем переменную углового коэффициента асимптот $\pm k$, где $k = b/a$ и запишем интересующий нас случай формулы (7) СКО портфеля (верхняя ветвь):

$$(17) \quad s = s^* + k\sqrt{a^2 + (r - r^*)^2}.$$

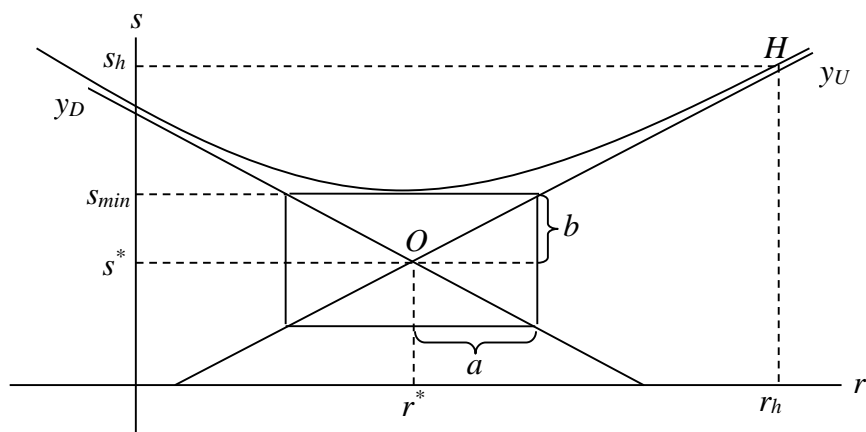


Рисунок 1. Графическая иллюстрация к оценке параметров и построению гиперболы, аппроксимирующей кривую Марковица

Излагаемый здесь метод предполагает работу с анализируемым массивом исходных данных, например, ценами или доходностями множества активов за определенный период. Поэтому параметры s^* , r^* , k , a , b уравнения (17), а также необходимые для промежуточных вычислений параметры s_{min} , s_h , r_h (показаны на рис. 1) определяются из анализа выборки.

Приведем соображения и выкладки для оценки всех указанных параметров.

Параметр s_{min} — это минимальное значение риска s портфеля или же, в геометрическом смысле, — минимальное значение верхней ветви гиперболы, которое достигается в точке r^* оси симметрии графика зависимости $s(r)$. Данный параметр мы предлагаем брать из анализа выборки. Как показали проведенные нами эксперименты, оцениваемая таким способом точка s_{min} тождественна минимуму гиперболы.

Величины s_h и r_h берутся из наблюдений. r_h принимается как значение доходности портфеля, сильно превышающее r^* — соответствующее оси симметрии; $s_h \approx \sigma(r_h)$. Обоснование такого подхода осуществлено путем доказательства того, что при больших r асимптота наблюдаемой зависимости и касательная к нашей гиперболе неограниченно сближаются (см. Приложение 1).

Коэффициент наклона восходящей асимптоты k можно оценить, воспользовавшись следующим очевидным выражением:

$$(18) \quad k = \frac{b}{a} = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{r_n - r_{n-1}}.$$

Точку пересечения асимптот s^* отыщем по двум точкам, принадлежащим восходящей асимптоте: (r^*, s^*) и (r_h, s_h) . Запишем выражение:

$$\frac{s_h - s^*}{r_h - r^*} = k, \text{ отсюда}$$

$$(19) \quad s^* = s_h - k(r_h - r^*).$$

Далее найдем параметры b и a .

$$b = s_{min} - s^*,$$

$$(20) \quad b = s_{min} - s_h + k(r_h - r^*).$$

$$\text{Наконец, } a = \frac{b}{k},$$

$$(21) \quad a = \frac{s_{min} - s_h}{k} + (r_h - r^*).$$

Запишем еще одно следствие выражения (7), задающее уравнение верхней ветви гиперболы:

$$(22) \quad s = s^* + \sqrt{b^2 + k^2(r - r^*)^2}.$$

Используя полученные выше выводы, покажем адаптированный для построения искомой сопряженной к каноническому виду гиперболы, аппроксимирующей границу Марковица, вид:

$$(23) \quad s = s^* + \sqrt{(s_{min} - s^*)^2 + k^2(r - r^*)^2}.$$

Наконец, укажем, что в окрестности оси симметрии лучшая аппроксимация достигается с помощью полинома 3-й степени.

Таким образом, итоговое решение поставленной задачи представляется следующим выражением:

$$(24) \quad s(r) = \begin{cases} s^* + \sqrt{(s_{min} - s^*)^2 + k^2(r - r^*)^2} & \Leftarrow \forall r | (\delta > \delta_0) \\ xr^3 + yr^2 + ur + v & \Leftarrow \forall r | (\delta \leq \delta_0) \end{cases},$$

где δ_0 – пороговое значение погрешности, определяемой исходя из требуемой точности по формуле (24) подбором пары σ_k, s_k .

$$(25) \quad \delta_0 = \frac{|s_k - \sigma_k|}{\sigma_k} \cdot 100\%.$$

4. Числовой пример

Рассмотрим построение границы Марковица в виде кусочно-нелинейной функции на примере трех активов. Возьмем ежемесячные доходности акций Cisco Systems Inc (CSCO),

Procter & Gamble Co (PG), Whirlpool Corp (WHR) за период с 01.02.2010 по 01.05.2014 г. (всего 51 наблюдение). Рассчитаем матрицу ковариаций доходностей (табл. 1).

Таблица 1

Матрица ковариаций

	WHR	PG	CSCO
WHR	124,5132	16,93451	28,8762
PG	16,93451	13,39256	7,789795
CSCO	28,8762	7,789795	65,56972

Дальнейшие расчеты для построения истинной (наблюдаемой) зависимости $\sigma_p(r_p)$ и ее оценки (аппроксимации) с помощью построения гиперболической функции $s_p(r_p)$ представлены в виде таблицы в Приложении 2.

Сформируем строку значений доходностей портфеля r_p , используя формулу (1), с шагом 0,1 п.п. Для каждого заданного значения r_p сформируем вектор-столбец $\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3)^T$ долей активов в портфеле.

Сформируем строку значений риска портфеля в виде параметра дисперсии его доходности, вычисляемого согласно формуле (2).

Задав произвольно начальные значения компонент вектора \mathbf{G} , инициализируем процедуру оптимизации портфеля, минимизируя параметр риска портфеля для каждого значения доходности, варьируя параметрами долей активов при единственном ограничении

$$\sum_k g_k = 1.$$

Далее строим еще одну строку риска портфеля – в виде показателей СКО его доходностей.

Таким образом, мы формируем в табличном виде наблюдаемую зависимость между доходностью r_p и риском σ_p портфеля, известную как граница Марковица.

Графический анализ этой зависимости дает возможность наблюдать область асимптотического поведения кривой, что свидетельствует о наличии в данной зависимости гиперболической составляющей (рис. 2).

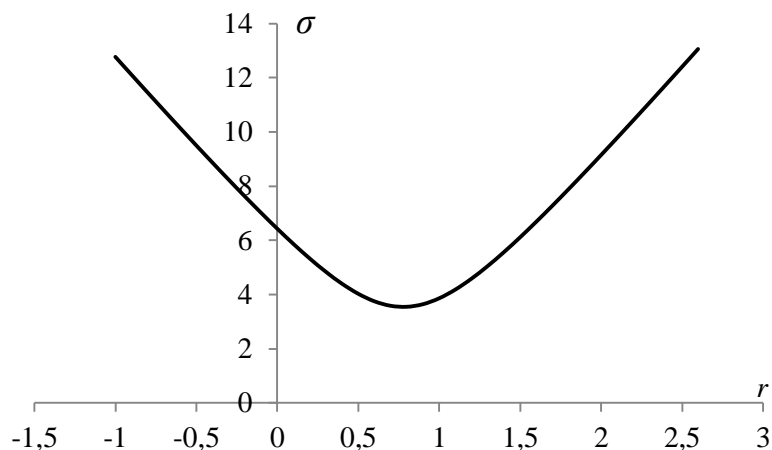


Рисунок 2. Граница Марковица – наблюдаемая зависимость $\sigma(r)$

Для отыскания гиперболической составляющей и тестирования ее соответствия исходной (наблюдаемой) зависимости рассчитаем параметры уравнения (23).

Из сформированных табличных данных определяем: $r^* = 0,8$; $s_{min} = 3,5579$.

Далее рассчитаем коэффициент наклона восходящей и нисходящей асимптот $\pm k$ (формула (18)), используя параметры риска и доходности соседних значений для наиболее удаленных от центра симметрии наблюдений: $k = 6,8934$.

Возьмем $r_h = 50\%$, тогда $s_h \approx \sigma(r_h) = 339,343$.

Вычислим ординату пересечения асимптот по формуле (19):

$$s^* = 0,18824.$$

Наконец, рассчитаем параметр b для построения сопряженной гиперболы (формула (20)): $b = s_{min} - s^* = 3,36962$.

Теперь вычислим расчетные значения $s_p(r_p)$ СКО доходностей портфеля из найденного выше выражения (23) и занесем их в отдельную строку таблицы.

Запишем следующее итоговое уравнение гиперболы, аппроксимирующей границу Марковица:

$$(26) \quad s_p(r_p) = 0,18824 + \sqrt{11,35434 + 47,51896(r_p - 0,8)^2}.$$

Построим графики $\sigma_p(r_p)$ и $s_p(r_p)$ на одной диаграмме. Анализ рисунка 3 показывает, что расчетные показатели $s_p(r_p)$ удовлетворительно приближают наблюдаемые значения $\sigma_p(r_p)$.

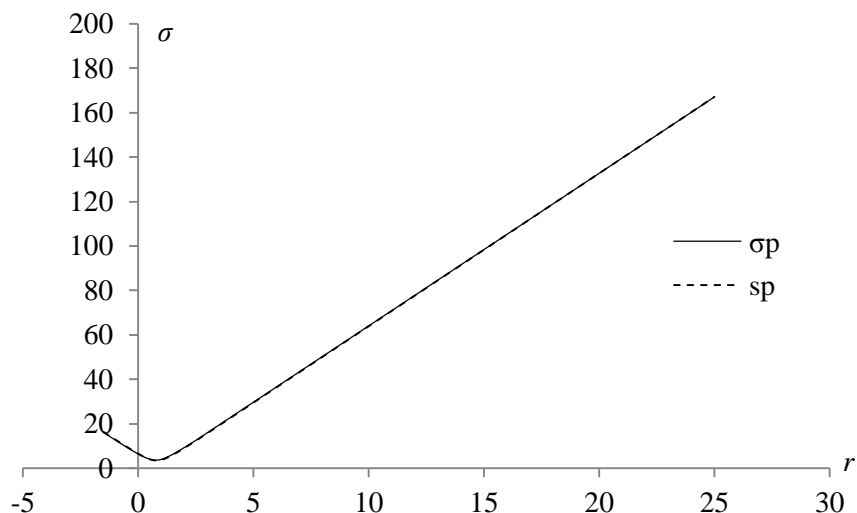


Рисунок 3. Граница Марковица – аппроксимация наблюдаемой кривой $\sigma(r)$ гиперболической функцией $s(r)$

Рассчитаем погрешность результата в удаленной правой точке графика ($r_p = 25\%$) с помощью формулы (25): $\delta|_{r_p=25\%} = 0,00493\%$. Таким образом, наблюдается очень высокая степень точности аппроксимации в данной точке.

Далее выберем диапазон значений $r_p = [0,2; 1,4]$, соответствующий окрестности оси симметрии графиков наблюдаемой зависимости и аппроксимирующей гиперболы. Для данного диапазона наблюдаемых данных осуществим аппроксимацию с помощью полинома 3-й степени.

Получим следующее уравнение:

$$(27) \quad s_p(r_p) = -0,2318r_p^3 + 5,8253r_p^2 - 8,6043r_p + 6,881.$$

Рассчитаем погрешность результата в заданной области значений r_p для функций, выраженных с помощью формул (26) и (27) (табл. 2).

Анализ последних двух строк таблицы 2 показывает, что в малой окрестности оси симметрии лучшая аппроксимация графика $\sigma_p(r_p)$ достигается с помощью полинома 3-й степени.

Таблица 2

Сравнение точности двух способов аппроксимации границы Марковица в окрестности оси симметрии графика

Параметр	Значения												
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4
σ_p	5,341	4,848	4,408	4,039	3,761	3,595	3,558	3,653	3,870	4,190	4,593	5,057	5,569
s_p (гипер)	5,523	5,008	4,542	4,142	3,829	3,628	3,558	3,628	3,829	4,142	4,542	5,008	5,523
s_p (параб)	5,391	4,818	4,356	4,006	3,765	3,633	3,607	3,687	3,870	4,156	4,544	5,031	5,617

Параметр	Значения													
δ (гипер)	3,415	3,308	3,038	2,545	1,809	0,899	0,000	0,681	1,049	1,152	1,094	0,965	0,818	
δ (параб)	0,946	0,625	1,176	0,813	0,119	1,044	1,383	0,934	0,016	0,806	1,062	0,520	0,859	

Таким образом, решение рассматриваемого примера можно записать так:

$$(28) \quad s_p(r_p) = \begin{cases} 0,18824 + \sqrt{11,35434 + 47,51896(r_p - 0,8)^2} & \text{при } 0,2 > r_p > 1,3 \\ -0,2318r_p^3 + 5,8253r_p^2 - 8,6043r_p + 6,881 & \text{при } 1,3 \geq r_p \geq 0,2 \end{cases}$$

Заключение

Как показано в представленной статье, рассмотрение гиперболы в качестве функции, универсально отражающей зависимость СКО портфеля от его ожидаемой доходности $\sigma_p(r_p)$, рассматриваемую как граница Марковица, некорректно. Выраженная в явном виде гиперболическая функция $s_p(r_p)$ содержит квадратный корень из квадратичной функции от r_p , тогда как формула риска портфеля $\sigma_p^2(r_p)$ при числе активов в нем больше двух, во-первых, не поддается выражению в явном виде, во-вторых, является билинейной формой от долей активов, а не квадратичной функцией.

С помощью формулирования и доказательства теоремы, которую можно было бы назвать теоремой об асимптотическом поведении границы Марковица, мы показали, что истинная (наблюдаемая) зависимость $\sigma_p(r_p)$ действительно должна стремиться к гиперболической кривой в областях, удаленных от оси симметрии.

Далее нами были получены выкладки для оценки переменных, входящих в выражение сопряженной гиперболы, отражающей границу Марковица. Вычислив такие переменные в практическом примере на основе реальных данных, и построив наблюдаемую и оцененную зависимость риска (СКО) от ожидаемой доходности портфеля, мы установили, что гипербола действительно хорошо приближает границу Марковица, причем лучшее качество аппроксимации достигается в области асимптотического поведения наблюдаемой кривой.

Высчитав ошибку приближения и воспользовавшись ранее полученными результатами [Криничанский, Безруков, 2014], мы показали, что на участке, соответствующем некоторой окрестности оси симметрии более качественная аппроксимация достигается построением полинома 3-й степени.

Таким образом, в работе обоснован подход к аппроксимации границы Марковица с помощью построения кусочно-нелинейной функции, включающей гиперболическую составляющую и участок, соответствующий полиномиальной функции.

Приложение 1

Покажем, что при больших r (область асимптотического поведения наблюдаемой зависимости $s(r)$) касательная к графику $s(r)$ неограниченно сближается с асимптотой.

Зададим значение r_h абсциссы, достаточно удаленную от центра симметрии. На основе выражения (1П) имеем:

$$(1П) \quad s(r_h) = s^* + k\sqrt{a^2 + (r_h - r^*)^2},$$

$$(2П) \quad s'(r_h) = \frac{k(r_h - r^*)}{\sqrt{a^2 + (r_h - r^*)^2}}.$$

Выразим коэффициент k следующим образом (см. рис. 4):

$$k = \frac{s^*}{r^* - r_L}, \text{ отсюда}$$

$$(3П) \quad r_L = r^* - \frac{s^*}{k}.$$

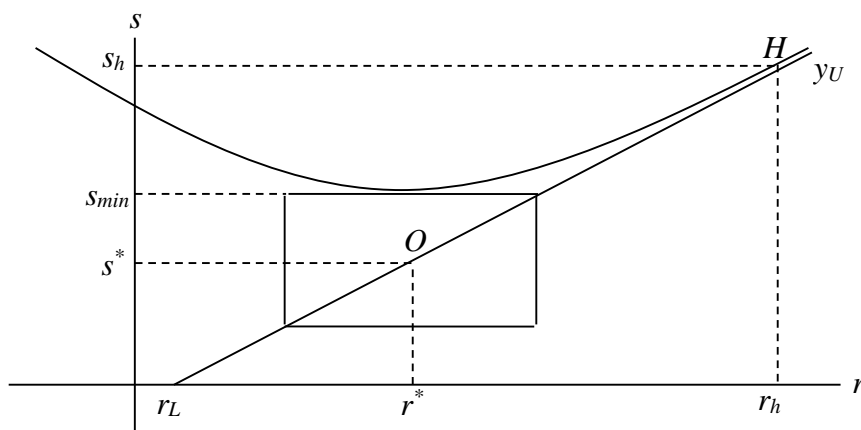


Рисунок 4. Анализ поведения касательной и асимптоты к гиперболе, аппроксимирующей кривую Марковица

Имеем уравнение восходящей асимптоты:

$$(4П) \quad y_U = k(r - r_L); \quad y_U(r_h) = k(r_h - r_L).$$

Запишем уравнение касательной:

$$(5П) \quad s_{кас}(r) = s(r) + s'(r)(r - r_h).$$

Если r_h достаточно велико, тогда второе слагаемое в выражении (1П) можно преобразовать так:

$$(6П) \quad \sqrt{a^2 + (r_h - r^*)^2} \approx r_h - r^*.$$

Тогда получаем:

$$s(r_h) = s_{кас}(r_h) = k(r^* - r_L) + k(r_h - r^*) = k(r_h - r_L).$$

Последнее выражение соответствует формуле (4П).

Таким образом, мы показали, что $s_{кас}(r_h) \sqcup y_U(r_h)$, что и требовалось доказать.

Приложение 2

Таблица 1П

Расчетные значения для построения наблюдаемой зависимости $\sigma(r)$ и оцениваемой сопряженной гиперболы

g_1	-1,55	-1,48	-1,41	-1,35	-1,28	-1,22	-1,15	-1,09	-1,02	-0,96	-0,89	-0,82	-0,76	-0,69
g_2	1,40	1,38	1,36	1,34	1,32	1,30	1,28	1,26	1,24	1,22	1,20	1,18	1,16	1,14
g_3	1,15	1,10	1,06	1,01	0,96	0,92	0,87	0,83	0,78	0,74	0,69	0,64	0,60	0,55
Σg_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
σ_p^2	259,30	238,12	217,89	198,61	180,28	162,91	146,48	131,00	116,48	102,90	90,28	78,61	67,88	58,11
r_p	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2
σ_p	16,10	15,43	14,76	14,09	13,43	12,76	12,10	11,45	10,79	10,14	9,50	8,87	8,24	7,62
s_p	16,40	15,72	15,05	14,38	13,71	13,05	12,38	11,72	11,06	10,41	9,76	9,12	8,49	7,86

Продолжение (по горизонтали) таблицы 1П

g_1	-0,63	-0,56	-0,50	-0,43	-0,36	-0,30	-0,23	-0,17	-0,10	-0,04	0,03	0,09	0,16	0,23
g_2	1,12	1,10	1,08	1,06	1,04	1,02	1,00	0,98	0,96	0,94	0,92	0,91	0,89	0,87
g_3	0,51	0,46	0,41	0,37	0,32	0,28	0,23	0,18	0,14	0,09	0,05	0,00	-0,05	-0,09
Σg_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
σ_p^2	49,29	41,42	34,49	28,52	23,50	19,43	16,31	14,14	12,93	12,66	13,34	14,97	17,56	21,09
r_p	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
σ_p	7,02	6,44	5,87	5,34	4,85	4,41	4,04	3,76	3,60	3,56	3,65	3,87	4,19	4,59
s_p	7,25	6,65	6,07	5,52	5,01	4,54	4,14	3,83	3,63	3,56	3,63	3,83	4,14	4,54

Продолжение (по горизонтали) таблицы 1П

g_1	0,29	0,36	0,42	0,49	0,55	0,62	0,68	0,75	0,82	0,88	0,95	1,01	1,08	1,14
g_2	0,85	0,83	0,81	0,79	0,77	0,75	0,73	0,71	0,69	0,67	0,65	0,63	0,61	0,59
g_3	-0,14	-0,18	-0,23	-0,27	-0,32	-0,37	-0,41	-0,46	-0,50	-0,55	-0,60	-0,64	-0,69	-0,73
Σg_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
σ_p^2	25,58	31,01	37,40	44,73	53,02	62,25	72,44	83,58	95,67	108,71	122,70	137,64	153,53	170,37
r_p	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
σ_p	5,06	5,57	6,12	6,69	7,28	7,89	8,51	9,14	9,78	10,43	11,08	11,73	12,39	13,05
s_p	5,01	5,52	6,07	6,65	7,25	7,86	8,49	9,12	9,76	10,41	11,06	11,72	12,38	13,05

Библиографический список

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
2. Буренин А. Н. Управление портфелем ценных бумаг. – М.: НТО им. академика С.И. Вавилова, 2008.
3. Криничанский К. В., Безруков А. В. Инструментальные методы определения параметров касательного портфеля// Журнал экономической теории. 2014. № 2. С. 65–73.
4. Рынок ценных бумаг. Под общей ред. Н. И. Берзона. – М.: Юрайт, 2011.
5. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции. – М.: ИНФРА–М., 1998.
6. Шведов А. С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг. – М.: ГУ ВШЭ, 1999.
7. Luenberger, David G. (2013), *Investment Science*. 2nd ed. New York: Oxford University Press.
8. Markowitz, Harry M. (1952), *Portfolio Selection*, *Journal of Finance*, 1, no. 1 (March).
9. Markowitz, Harry M. (1956), *The Optimization of the Quadratic Function Subject to Linear Constraints*, *Naval Research Logistic Quarterly*, 3, no. 1-2 (March-June).
10. Reilly, Frank K., Brown, Keith C. (2012), *Investment Analysis and Portfolio Management*. 10th ed. South-Western Educational Publishing. 1080 p.
11. Sharpe, William F. (1963), *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, *Management Science*, 9 no. 2 (January).
12. Tobin, James (1958), *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*, *Review of Economic Studies*, 26, no. 1 (February).
13. Tobin, James (1965), *The Theory of Portfolio Selection*, *The Theory of Interest Rates*, ed. F.H. Hahn and F.P.R. Brechling. London: Macmillan and Co.
14. Vishwanath, S. R., Krishnamurti, C. (Editors) (2009), *Investment Management. A Modern Guide to Security Analysis and Stock Selection*. Berlin: Springer-Verlag.
15. Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus. (2012), *Essentials of Investments*. 9th ed. McGraw-Hill Higher Education

References

1. Bronshtein, I.N., Semendiayev, K.A. (1986), *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov I uchashchihsvya vtuzov* [Handbook of mathematics for engineers and students of technical

Криничанский К. В., Безруков А. В. Построение границы Марковица методом кусочно-нелинейной аппроксимации// Корпоративные финансы. – 2014. – № 3 (31). – С. 114–127
colleges]. 13-th ed. Moscow, Nauka [Science], Gl. red. fis.-mat. lit. [Home Edition physical and mathematical literature].

2. Burenin, A.N. (2008), Upravleniye portfelem cennykh bumag [Analysis of portfolios of securities]. Moscow, NTO im. akademika S.I. Vavilova [Scientific and technical non-governmental organization named after academician S. Vavilov].

3. Krinichansky, K.V., Bezrukov, A.V. (2014), Instrumental'niye metody opredeleniya parametrov kasatel'nogo portfelya [Instrumental methods for determining of the tangent portfolio parameters], Zhurnal ekonomicheskoy teorii, no 2, pp. 65–73.

4. Luenberger, David G. (2013), Investment Science. 2nd ed. New York: Oxford University Press.

5. Markowitz, Harry M. (1952), Portfolio Selection, Journal of Finance, 1, no. 1 (March).

6. Markowitz, Harry M. (1956), The Optimization of the Quadratic Function Subject to Linear Constraints, Naval Research Logistic Quarterly, 3, no. 1-2 (March-June).

7. Reilly, Frank K., Brown, Keith C. (2012), Investment Analysis and Portfolio Management. 10th ed. South-Western Educational Publishing. 1080 p.

8. Rynok cennykh bumag [Securities market]/ ed. by N. I. Berzon. Moscow, Jurait, 2011.

9. Sharpe W., Alexander G., Bailey J. (1998), Investicii [Investments]. Moscow, INFRA-M.

10. Sharpe, William F. (1963), A Simplified Model for Portfolio Analysis, Management Science, 9 no. 2 (January).

11. Shvedov, A. S. (1999), Teoriya effektivnykh portfeley cennykh bumag [Theory of efficient portfolios of securities]. Moscow, GU VSHE [SU HSE].

12. Tobin, James (1958), Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, Review of Economic Studies, 26, no. 1 (February).

13. Tobin, James (1965), The Theory of Portfolio Selection, The Theory of Interest Rates, ed. F.H. Hahn and F.P.R. Brechling. London: Macmillan and Co.

14. Vishwanath, S. R., Krishnamurti, C. (Editors) (2009), Investment Management. A Modern Guide to Security Analysis and Stock Selection. Berlin: Springer-Verlag.

15. Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus. (2012), Essentials of Investments. 9th ed. McGraw-Hill Higher Education