МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ

Д.А.Саакян

Рынок Капитала, Ереван, 2004, N1-2, стр. 25-27

Резюме

В данной работе предложен модель многокритериальной оптимизации для управления инвестиционным портфелем, где в качестве критериев берутся максимизация доходности портфеля и, одновременно, минимизация риска портфеля. Автором предложено понятие “степень предпочтения максимизации доходности портфеля”, а также разработан механизм определения данного показателя. Найдены аналитические решения для определения степени предпочтения, удельных весов активов, ожидаемой доходности и риска оптимального портфеля. В работе рассматривается и конкретный пример.

Ключевые слова: финансовая математика, многокритериальная оптимизация, инвестиционный портфель, доходность, риск.

Классической задачей финансовой математики является задача оптимального распределения ограниченных ресурсов. Предполагается, что на рынке существуют возможности вложения свободных средств в разные активы. Доходность каждого актива является случайной величиной, которая характеризуется математическим ожиданием и стандартным отклонением.

Основные концепции управления инвестиционным портфелем изучены во многих научных трудах. В частности, изучена задача максимизации ожидаемой доходности, при ограничении на максимальный уровень риска портфеля, а также задача минимизации риска портфеля, при ограничении на минимальный уровень допускаемой доходности портфеля. Последняя задача в теории известна как задача Марковица.

Рассмотрим задачу оптимизации инвестиционного портфеля, с критериями максимизации ожидаемой доходности и минимизации риска портфеля.

Дан инвестиционный портфель с N активами. Каждый актив вида i характеризуется количеством Q_i в портфеле и ценой на единицу актива p_i. Доходность r_P и рискованность σ_P^2 портфеля рассчитываются следующими формулами:

$$r_P = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot r_i \tag{1}$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i \cdot w_j \cdot Cov_{ij} \tag{2}$$

где r_i - доходность актива вида i, w_i - удельный вес актива i в портфеле, Cov_{ij} - ковариация доходностей активов i и j и $Cov_{kk} = \sigma_k^2$ - дисперсия актива k и $Cov_{ij} = Cov_{ji}$.

Определим следующую задачу многокритериальной оптимизации для инвестиционного портфеля:

1. Критерий максимизации ожидаемой доходности портфеля

$$F(w) = (w, r) = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot r_i \to Max \tag{3}$$

2. Критерий минимизации рискованности портфеля

$$G(w) = (Cw, w) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i \cdot w_j \cdot Cov_{ij} \to Min \tag{4}$$

3. Ограничение на полное вложение средств

$$(w,e)=1 \tag{5}$$

где $e=(1,1,...,1)^T$, C - ковариационная матрица доходностей активов и $w_i \ge 0$, $i=1,...,N$.

Из задачи многокритериальной оптимизации (3)-(5) перейдем к следующей оптимизационной задаче:

$$H(\alpha,w)=\alpha\cdot F(w)-(1-\alpha)\cdot G(w)\to Max \tag{6}$$

где α - степень предпочтения инвестором максимизации доходности портфеля. Для фиксированной α мы получим оптимизационную задачу (6) и (5).

Для решения этой задачи нужно построить функцию Лагранжа:

$$L(\lambda,\alpha,w)=H(\alpha,w)+\lambda\cdot[(w,e)-1]=\alpha\cdot F(w)-(1-\alpha)\cdot G(w)+\lambda\cdot[(w,e)-1] \tag{7}$$

Оптимальное решение должно удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{\partial L}{\partial w}=\alpha\cdot\frac{\partial F}{\partial w}-(1-\alpha)\cdot\frac{\partial G}{\partial w}+\lambda\cdot e=\alpha\cdot r-2(1-\alpha)\cdot Cw+\lambda\cdot e=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=(w,e)-1=0 \tag{9}$$

Из уравнения (8) для w будем иметь:

$$w=\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\cdot C^{-1}r+\frac{\lambda}{2(1-\alpha)}\cdot C^{-1}e \tag{10}$$

Установив w в уравнение (9) находим λ:

$$\lambda^*=2(1-\alpha)\cdot\frac{1}{(C^{-1}e,e)}-\alpha\cdot\frac{(C^{-1}r,e)}{(C^{-1}e,e)} \tag{11}$$

Обозночая

$$a_1=(C^{-1}r,r),\ a_2=(C^{-1}r,e),\ a_3=(C^{-1}e,e) \tag{12}$$

для λ будем иметь

$$\lambda^*=2(1-\alpha)\cdot\frac{1}{a_3}-\alpha\cdot\frac{a_2}{a_3} \tag{13}$$

Устоновив λ^* в уравнение (10) для w получим:

$$w^* = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \cdot C^{-1}r + \frac{1}{a_3} \cdot C^{-1}e - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot C^{-1}e \tag{14}$$

Для фиксированной α доходность и рискованность портфеля будут рассчитыватся следующими формулами:

$$F(w^*) = (w^*, r) = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_3} \cdot \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} + \frac{a_2}{a_3} \tag{15}$$

$$G(w^*) = (Cw^*, w^*) = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_3} \cdot \left(\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\right)^2 + \frac{1}{a_3} \tag{16}$$

В качестве результата будем иметь следующие формулы для расчета ожидаемой доходности и рискованности портфеля — в зависимости от степени предпочтения α:

$$F(\alpha) = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_3} \cdot \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} + \frac{a_2}{a_3}, \tag{17}$$

$$G(\alpha) = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_3} \cdot \left(\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\right)^2 + \frac{1}{a_3}, \tag{18}$$

В качестве критерия эффективности рассмотрим коэффициент Шарпа — $P(\alpha) = \dfrac{F^2(\alpha)}{G(\alpha)}$.

$$P(\alpha) = \frac{F^2(\alpha)}{G(\alpha)} = \frac{\left(\dfrac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_3} \cdot \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)} + \dfrac{a_2}{a_3}\right)^2}{\dfrac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_3} \cdot \left(\dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)}\right)^2 + \dfrac{1}{a_3}} \tag{19}$$

Эффективный портфель получится в случае максимальной значении функции $P(\alpha)$. Функция $P(\alpha)$ достигнет максимального значения в следующих точках:

$$\alpha_1 = \frac{2a_2}{2a_2 - (a_1 a_3 - a_2^2)}, \ \alpha_2 = \frac{2}{2 + a_2}, \tag{20}$$

Мы имеем $\alpha_1 \notin [0,1)$, потому что $a_2 \geq 0$ и $a_1 a_3 \geq a_2^2$, но $\alpha_2 \in [0,1)$: Для $\alpha^* = \alpha_2$ мы сможем рассчитать

$$F\left(\alpha^*\right)=\frac{a_1}{a_2},\ G\left(\alpha^*\right)=\frac{a_1}{a_2^2}\ \text{ и }\ P\left(\alpha^*\right)=a_1 .$$

Рассмотрим следующий числовой пример с тремя видами ценных бумаг. Даны доходность и ковариационная матрица доходностей этих активов:

$$r=\begin{pmatrix}14.00\%\\16.75\%\\18.26\%\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0.030 & 0.019 & 0.008\\0.019 & 0.025 & 0.018\\0.008 & 0.018 & 0.035\end{pmatrix}$$

Решая задачу (6) и (5) для каждого $\alpha\in[0,1)$, получим следующую таблицу решений:

Таблеца. Структура оптимального портфеля в зависимости от α

α	w_1	w_2	w_3	$G(w)$	$F(w)$	$H(\alpha,w)$	$P(\alpha)$
0.00	0.44	0.20	0.36	0.0198	0.1609	-0.0198	1.307290
0.05	0.40	0.23	0.37	0.0198	0.1622	-0.0107	1.325558
0.10	0.35	0.26	0.39	0.0200	0.1636	-0.0016	1.340744
0.15	0.30	0.30	0.40	0.0202	0.1652	0.0076	1.351246
0.20	0.25	0.34	0.41	0.0206	0.1669	0.0169	1.354994
0.25	0.18	0.39	0.43	0.0211	0.1689	0.0264	1.349407
0.30	0.11	0.44	0.44	0.0220	0.1712	0.0359	1.331441
0.35	0.03	0.51	0.47	0.0233	0.1738	0.0457	1.297778
0.40	0.00	0.50	0.50	0.0240	0.1751	0.0556	1.276336
0.45	0.00	0.45	0.55	0.0245	0.1758	0.0656	1.258841
0.50	0.00	0.39	0.61	0.0253	0.1767	0.0757	1.231841
0.55	0.00	0.32	0.68	0.0265	0.1777	0.0858	1.191445

0.60	0.00	0.24	0.76	0.0283	0.1790	0.0961	1.132471
0.65	0.00	0.12	0.88	0.0312	0.1807	0.1066	1.048535
0.70	0.00	0.00	1.00	0.0350	0.1826	0.1173	0.952650
0.75	0.00	0.00	1.00	0.0350	0.1826	0.1282	0.952650
0.80	0.00	0.00	1.00	0.0350	0.1826	0.1391	0.952650
0.85	0.00	0.00	1.00	0.0350	0.1826	0.1500	0.952650
0.90	0.00	0.00	1.00	0.0350	0.1826	0.1608	0.952650
0.95	0.00	0.00	1.00	0.0350	0.1826	0.1717	0.952650

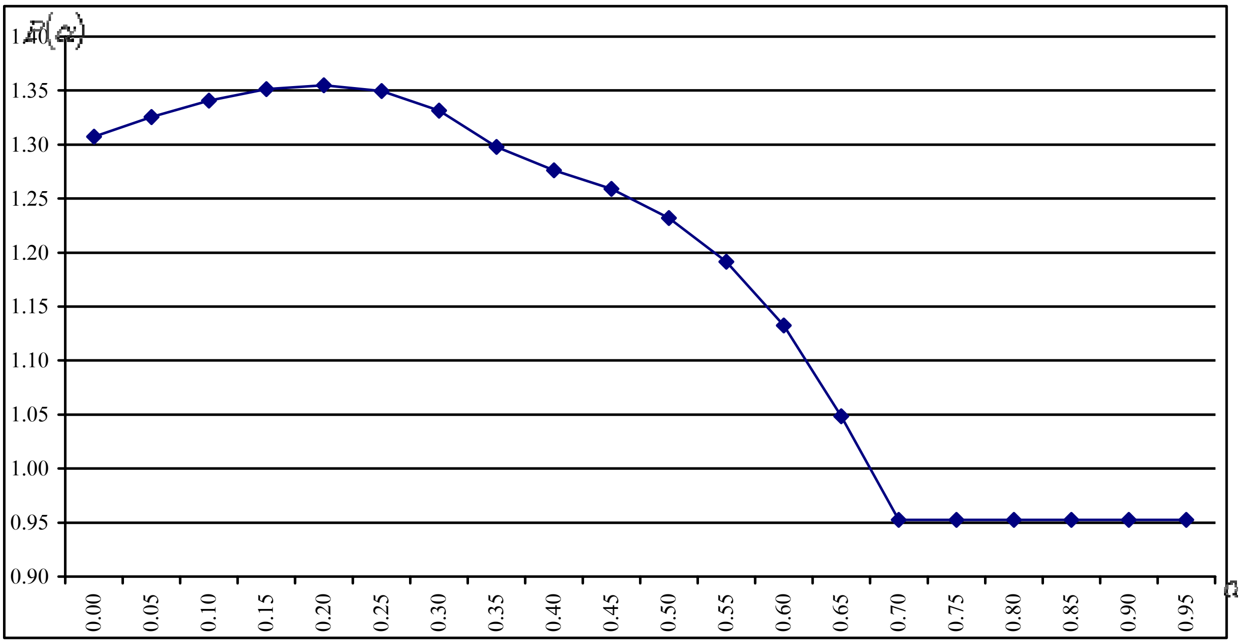

Рисунок. Кривая функции $P(\alpha)$

Данные таблицы показывают, что функция $P(\alpha)$ достигает максимального значения в точке $\alpha^* = 0.2$. Это означает, что для инвестора степень предпочтения максимизации доходности портфеля равна 0.2. В этом случае для структуры оптимального портфеля будем иметь - $w^* = (0.25, 0.34, 0.41)$. Для ожидаемой доходности будем иметь $r_P = F(\alpha^*) = 17\%$, и для рискованности - $\sigma_P = \sqrt{G(\alpha^*)} = 0.14$:

Установливая входные значения в уравнения (12), (20), (14), (17), (18) и (19), получим те же значения.

Литература

1. Markowitz H.M. Portfolio selections, Journal of Finance, 1952, May
2. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York, John Wiley & Sons, 1959.
3. Fletcher R. Practical Methods of Optimization, John Wiley, New York, 1994.
4. Wilkes F.M. Mathematics for Business and Economics, Routledge, London, 1994.
5. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции: Пер. С англ, М., Инфра-М, 1997г., 1024с.
6. Боди Э., Мертон Р. Финансы: Пер с англ, М., Издательский дом «Вильямс», 2003г., 592с.
7. Т.Дж.Уотшем, К.Паррамоу. Количественные методы в финансах. Москва, «Финансы», ЮНИТИ, 1999г., 527с.
8. Задача Марковица. http://www.sword.kiev.ua/pages/seap/13_03_01.htm
9. И.Волошин, VaR подход к поиску оптимального портфеля активов, Клуб банковских аналитиков. http://www.bankclub.ru
10. Ю.Косимов, Введение в современную теорию инвестирования: многомерные модели портфельного анализа, Деловой партнер, N6, 1996г., стр. 30.

ОБ АВТОРЕ

Саакян Давид Альбертович,

Кандидат физикоматематических наук,

Российско-армянский государственный (Славянский) университет,

Доцент кафедры экономики и финансов,

Старший эксперт консалтинговой компании "SMART GROUP",

Эл.почта: Sahakyan@netsys.am