

Г. Г. Димитриади. Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид: цели Организатора финансовой пирамиды // Электронный журнал "Исследовано в России", 175, стр. 2117-2124, 2003 г. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/175.pdf>

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ФИНАНСОВЫХ ПИРАМИД: ЦЕЛИ ОРГАНИЗАТОРА ФИНАНСОВОЙ ПИРАМИДЫ¹

Г. Г. Димитриади (george-d@yandex.ru)

Институт системного анализа РАН

Введение. В работе [2] описаны основные существующие в литературе подходы к математическому описанию финансовых пирамид.

Работы [1–8] посвящены развитию подхода, предложенного С.В. Дубовским [9–10] и называемого «сценарным» или «детерминированным».

Приведем его основные идеи.

Организатор создает финансовую пирамиду. Им может быть как физическое лицо, так и организация. Поэтому как синоним термина «Организатор» рассматриваются слова «фирма», «организация», «компания» и т.п.

Для охвата наиболее широкого набора ситуаций и отсутствия привязки к какой-либо конкретной организационной схеме финансовая пирамида определяется как следующая финансовая схема.

Определение. В течение некоторого периода времени Организатор финансовой пирамиды продает собственные обязательства, по которым он обязуется выплатить их предъявителю определенную сумму в будущем. Предполагается, что Организатор выполняет *все* свои обязательства вплоть до некоторого момента, называемого крахом финансовой пирамиды.

Без ограничения общности будем предполагать, что обязательства Организатора суть бескупонные облигации. Очевидно, что любой набор обязательств с известными потоками денежных выплат в будущем (векселя, облигации, а также акции, сберегательные сертификаты [11] и др. финансовые, в том числе производные, инструменты в некоторых случаях) можно свести к набору бескупонных облигаций. Поэтому данное рассмотрение носит достаточно общий характер.

Упрощающие предположения.

1. Будем считать, что Организатор выполняет обязательства перед своими кредиторами только за счет выручки от продажи облигаций в рамках финансовой пирамиды, т.е. не привлекая средств со стороны.

Такое предположение вполне естественно в свете того, что обычно понимают под финансовой пирамидой, и исследование этого случая имеет наибольший интерес.

¹ Работа подготовлена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 02-02-00090а.

2. Все рассматриваемые бескупонные облигации выпускаются на один и тот же срок.

Это предположение сильно ограничивает область рассматриваемых ситуаций.

Обозначения. Будем считать, что финансовая пирамида начинается в момент времени $t=0$, $V(t)$ – доход Организатора финансовой пирамиды, $g(t)$ – объем распроданных в момент времени t ценных бумаг по номиналу, $\theta > 0$ – фиксированный срок, на который эмитируются облигации Организатора, отсчитываемый от момента их продажи, $c_g \in [0;1]$ – цена, выраженная в долях от номинала, по которой происходят продажи облигаций.

Основные уравнения динамики модели имеют следующий вид:

$$\frac{dG}{dt} = \begin{cases} g(t), t < \theta \\ g(t) - g(t - \theta), t \geq \theta \end{cases}, V(0) = 0,$$

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} c_g(t)g(t), t < \theta \\ c_g(t)g(t) - g(t - \theta), t \geq \theta \end{cases}, V(0) = 0,$$

$$\frac{dW}{dt} = \begin{cases} 0, t < \theta \\ [1 - c_g(t)]g(t - \theta), t \geq \theta \end{cases}, W(0) = 0.$$

(ср. с [2])

Используя эти формулы, можно рассчитать функции $G(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ в любой момент по известной функции $g(t)$.

При записи этих формул не предполагается постоянство цены. Она, как и остальные величины, вообще говоря, зависит от времени: $c_g = c_g(t)$.

Кроме того, в модели вводится функция спроса на облигации Организатора пирамиды (подробно обсуждена в [4]). Тогда

$$\frac{dV}{dt} = c_g(t)g(t) - g(t - \theta)$$

$$g(0) = 0, t \in [-\theta, 0) \quad - \text{зависимость выручки Организатора финансовой}$$

$$g(t) = g_0 \Phi(c_g(t)) f(t)$$

пирамиды от времени. Функция $g(t)$ представляется как произведение двух функций: функции спроса $\Phi(c_g)$, зависящей от цены обязательств Организатора, и заданной функции роста $f(t)$ – априорного сценария притока вкладчиков пирамиды в зависимости от времени. g_0 – постоянная – коэффициент пропорциональности для выбранных единиц.

Модель, аналогичная рассматриваемой, также имеет место в [1-4].

Развитие модели. В качестве развития модели в [5-8] введена еще одна переменная – управление:

$s \in [0,1]$ – доля от текущей выручки $c_g g(t)$, затрачиваемая Организатором на рекламу финансовой пирамиды.

Она позволяет учесть расходы Организатора финансовой пирамиды на рекламу собственных обязательств, а также дополнительно вызванный этим приток вкладчиков.

В случае с учетом рекламной кампании обязательств Организатора пирамиды уравнения динамики модели имеют следующий вид:

$$\frac{dG}{dt} = \begin{cases} g(t), t < \theta \\ g(t) - g(t - \theta), t \geq \theta \end{cases}, G(0) = 0,$$

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} c_g(t)s(t)g(t), t < \theta \\ c_g(t)s(t)g(t) - g(t - \theta), t \geq \theta \end{cases}, V(0) = 0,$$

$$\frac{dW}{dt} = \begin{cases} 0, t < \theta \\ [1 - c_g(t)]g(t - \theta), t \geq \theta \end{cases}, W(0) = 0.$$

По сравнению с вариантом для модели без учета рекламной кампании изменилось второе уравнение.

В варианте модели с учетом рекламной кампании соответственно $g(t) = g_0 e^{rs} \Phi(c_g) f(t)$ при $t \geq 0$: функция $g(t)$ представлена в виде произведения трех функций: функции эффективности вложений в рекламу e^{rs} , зависящей от доли вложений в рекламу, функции спроса $\Phi(c_g)$, зависящей от цены обязательств Организатора, и заданного сценария притока вкладчиков в зависимости от времени $f(t)$. g_0 – постоянная.

Целью данной статьи является рассмотрение и формулировка различных вариантов целей Организатора финансовой пирамиды, их качественное обсуждение и сравнение и получение утверждения о сравнении целей в их крайнем варианте.

Цели Организатора финансовой пирамиды. В этой модели поведение Организатора финансовой пирамиды никак не ограничивается. В реальной жизни Организатор, создавая финансовую пирамиду, всегда преследует какие-то цели. Обычно это формулируемая явно или неявно цель получения прибыли и увеличения личного богатства. Эта постановка может предполагать как непосредственное получение денег, так и косвенное, например, использование получаемых от финансовой пирамиды средств для покрытия текущих финансовых потребностей. После краха финансовой пирамиды Организатор предполагает использовать какой-то способ ухода от выполнения обязательств или их выполнение за счет других источников. Возможны и другие (например, промежуточные) варианты действий.

Предполагается, что компания создает новую или использует существующую процедуру (торговую площадку [11]), позволяющую создавать однотипную внешнюю задолженность (например, путем продажи ценных бумаг определенного типа) в течение продолжительного времени. Сформулируем две возможные цели Организатора финансовой пирамиды.

Цель 1а. Целью Организатора финансовой пирамиды является максимизация собственной выручки, полученной от финансовой пирамиды.

Такая цель часто преследуется небольшими компаниями, частными лицами с раскрученным имиджем и т.п. Однако, как показывает история, Организаторы, открыто ставящие цель типа 1а, имеют шансы привлечь очень большие средства.

Другая возможная цель имеет вид:

Цель 2а. Целью Организатора финансовой пирамиды является точное покрытие всех текущих потребностей (бюджетного дефицита) за счет пирамиды.

Цели типа 2а обычно соответствуют крупным организациям или государственным структурам, обладающими полномочиями по исполнению бюджета и управлению долгом.

Например, крупная частная компания, преследуя вторую цель, тем самым (благодаря предсказуемости собственного поведения для внешних наблюдателей и наличию *ликвидного* рынка собственных обязательств) снижает для себя стоимость внешних рыночных заимствований и получает другие косвенные выгоды. В то же время часть привлеченных средств может быть использована для покрытия бюджетного дефицита.

Другим примером является уполномоченный государственный орган, целью которого может являться долгосрочный выпуск государственных долговых обязательств. Эта цель может быть обусловлена двумя причинами: покрытие (части) текущего бюджетного дефицита государства и/или создание ликвидного рынка государственных ценных бумаг для повышения ликвидности рынка в целом и увеличения его стабильности.

Переформулируем эти цели в рамках рассматриваемой модели финансовой пирамиды:

Цель 1. Целью Организатора финансовой пирамиды является максимизация своей выручки $V(T)$ в момент окончания (краха) T финансовой пирамиды. Считаем, что после этого момента Организатор больше не выполняет свои обязательства.

Цель 2. Целью Организатора финансовой пирамиды является максимальное увеличение времени жизни финансовой пирамиды, т.е. величины T – момента окончания (краха) финансовой пирамиды. Считаем, что после этого момента Организатор больше не выполняет свои обязательства.

Цель 1 достаточно близка к цели 1а. В это же время цели 2 и 2а сильно различаются. Организатор, преследующий цель 2а, хочет покрывать текущее потребление за счет пирамиды. Во-первых, это не всегда возможно: потребностей может быть больше, чем вся суммарная выручка от пирамиды к этому же моменту времени. Во-вторых, при постановке этой цели непонятно, что делается с выручкой от финансовой пирамиды, оставшейся после оплаты текущих потребностей. Цели же 1 и 2 сформулированы более четко.

Из рассмотренных выше примеров и сути целевых установок видно, что обе поставленные цели 1 и 2 различные, взаимосвязанные и взаимоисключающие: привлеченные ранее или в текущий момент средства могут быть использованы либо для покрытия текущего бюджетного дефицита, либо для финансирования своих обязательств с текущим сроком исполнения, что позволяет продлить срок существования схемы привлечения внешних заимствований. Часто организации пытаются совместить обе сформулированные цели, достигая их лишь частично. Далее будут отдельно рассматриваться цели 1 и 2 как крайние случаи поведения Организатора.

Условия окончания финансовой пирамиды. Рассмотрим два альтернативных условия окончания финансовой пирамиды.

а) Условие $\frac{dV}{dt} = 0$: финансовая пирамида существует только до тех пор (Организатор выполняет свои обязательства), пока выполняется условие $c_g(t)(1-s(t))g(t) > g(t-\theta)$.

б) Условие $V = 0$: Организатор может использовать для погашения собственных обязательств не только выручку текущего момента $c_g(t)(1-s(t))g(t)$, но и ранее полученную. В таком случае условие окончания можно записать как $V = 0$.

Условия окончания а) и б) соответствуют целям 1 и 2.

В качестве условия окончания финансовой пирамиды можно выбрать и любые промежуточные варианты между двумя описанными, например, такое: Организатор может использовать для погашения собственных обязательств не только выручку текущего момента $c_g(t)(1-s(t))g(t)$, но и фиксированную часть ранее полученной (например, не более половины: $\leq 50\%$).

Заметим, что в работах [1–8] при рассмотрении моделей и постановке задач оптимизации поведения Организатора везде используется цель 1.

Имеет место следующее утверждение:

Утверждение. *Утверждение о сравнении целей.* Финансовая пирамида для Организатора, преследующего цель 1, существует не дольше, чем финансовая пирамида для Организатора, преследующего цель 2, при прочих равных условиях

или эквивалентно:

финансовая пирамида с условием окончания $\frac{dV}{dt} = 0$ существует не дольше, чем финансовая пирамида с условием окончания $V = 0$ при прочих равных условиях.

Доказательство. Для первой пирамиды цель ставиться как максимизация выручки $V(T)$ Организатора в момент окончания пирамиды T . Это значит, что пирамида заканчивается, когда производная $\frac{dV(t)}{dt}$ первый раз меняет знак на отрицательный². Значит, $\frac{dV(t)}{dt} \geq 0$ при $t \in [0, T]$. Итак, $V(0) = 0$ и $\frac{dV(t)}{dt} \geq 0$. Следовательно, $V(t) \geq 0$ при $t \in [0, T]$ [12], и вторая финансовая пирамида обязательно существует на отрезке времени $t \in [0, T]$. Утверждение доказано.

Формула зависимости дохода Организатора пирамиды от времени. В качестве иллюстрации выведем общую формулу зависимости дохода $V(t)$ Организатора пирамиды от времени для двух различных случаев, позволяющую находить время жизни финансовой пирамиды при различных условиях ее окончания.

² Предполагается, что функции $f(t)$ – априорный сценарий притока вкладчиков пирамиды в зависимости от времени – и $g(t)$ монотонно возрастающие.

Финансовая пирамида без альтернативных источников доходности. Основное уравнение изменения выручки Организатора финансовой пирамиды имеет вид³:

$$\frac{dV(t)}{dt} = c_g g(t) - g(t - \theta).$$

Здесь предполагается, что $V(0) = 0$, $g(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, $g(t) = 0$ при $t \in [-\theta, 0)$.

Проинтегрировав основное уравнение, получим:

$$V(t) = \int_0^t [c_g(\xi)g(\xi) - g(\xi - \theta)] d\xi.$$

Эта формула учитывает как случай $c_g = const$, так и $c_g = c_g(t)$.

Финансовая пирамида с альтернативными источниками доходности. Пусть r – эффективная годовая ставка альтернативных вложений (для простоты будем считать $r = const$), под которую Организатор имеет возможность вкладывать собранные средства. Положим, что имеется возможность вкладывать по этой ставке произвольную сумму, и имеется возможность изымать вклад через произвольное время, получив приращение (проценты) ровно за этот период. Рассматриваются непрерывные проценты.

Основное уравнение изменения выручки Организатора финансовой пирамиды теперь имеет вид:

$$\frac{dV(t)}{dt} = c_g g(t) - g(t - \theta) + rV(t).$$

При записи этого уравнения предполагалось, что вся текущая положительная выручка вкладывается под процент r и изымается со вклада ровно размере, необходимом для точного выполнения своих обязательств, и только в те моменты времени, когда оказывается $c_g g(t) - g(t - \theta) < 0$.

Отметим, что для организации, преследующей цель 1, не предполагается «накопление» фирмой выручки от финансовой пирамиды для последующего выполнения собственных обязательств, и наличие альтернативных вложений на пирамиде никак не сказывается. Поэтому далее рассматривается случай Организатора, который может использовать выручку для погашения облигаций в будущие моменты времени. Таким образом, это может быть Организатор, преследующий цель 2 или промежуточную цель между целями 1 и 2.

Решим полученное дифференциальное уравнение относительно $V(t)$. Обозначим $f(t) = c_g g(t) - g(t - \theta)$. Имеем:

$$\frac{dV(t)}{dt} = f(t) + rV(t).$$

Решение однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dV(t)}{dt} = rV(t)$ имеет вид:

$$V(t) = De^{rt}, \text{ где } D - \text{ произвольная постоянная.}$$

³ Здесь для простоты рассматривается модель без рекламной кампании. Ее учет несложен, но излишне загромождает формулы.

Для получения решения неоднородного уравнения используем метод вариации постоянных. Положим $D = D(t)$ и подставим $V(t) = D(t)e^{rt}$ в решаемое уравнение:

$$D'(t)e^{rt} + re^{rt}D(t) = f(t) + re^{rt}D(t), \quad D'(t) = f(t)e^{-rt},$$

$$D(t) = \int_0^t f(\xi)e^{-r\xi}d\xi + C, \text{ где } C \text{ – произвольная постоянная. Значит:}$$

$$V(t) = e^{rt} \left(\int_0^t f(\xi)e^{-r\xi}d\xi + C \right).$$

Но $V(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. В итоге получим формулу для вычисления $V(t)$ при наличии альтернативных источников доходности:

$$V(t) = e^{rt} \int_0^t [c_g g(\xi) - g(\xi - \theta)] e^{-r\xi} d\xi.$$

Выводы. Для модели описания финансовых пирамид [1–8], лежащей в рамках подхода С.В. Дубовского [9–10], в статье приведено описание различных возможных целевых установок Организатора финансовой пирамиды, выделены две крайние взаимоисключающие установки, получено утверждение об их сравнении, а также получены формулы, описывающие зависимость дохода Организатора от времени в общем виде в рассматриваемой модели без учета рекламной кампании и в случае возможности альтернативных вложений собранных средств для Организатора.

Было строго показано, что финансовая пирамида для Организатора, который использует (хотя бы) часть ранее полученных средств для выполнения своих обязательств, существует не меньшее время, чем для Организатора, который сразу «выводит» все полученные средства из финансовой пирамиды, например, для финансирования текущего дефицита бюджета.

Таким образом, получен частичный ответ на вопрос: если Организатор пирамиды «хранит» (хотя бы частично) ранее полученные деньги для выполнения будущих обязательств и вкладывает их на время этого «ожидания», то как при этом учитывается временная стоимость денег и как можно сравнить время жизни финансовой пирамиды и выручку Организатора в этом случае по сравнению со случаем без альтернативных вложений? Однако более подробное и общее исследование этого случая и результатов, следующих из полученных формул, остается делом будущего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Димитриади Г.Г.* Обзор моделей государственного долга. М.: Эдиториал УРСС, 2002 и сайт www.mirkin.ru.
2. *Димитриади Г.Г.* Математические модели финансовых пирамид // Электронный журнал «Исследовано в России», 83, стр. 929-936, 2002. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/083.pdf>

3. *Димитриади Г.Г.* Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид // Труды XLV научной конференции МФТИ (ГУ) «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», ч. VII. М.: МФТИ, 2002.
4. *Димитриади Г.Г.* Модели финансовых пирамид: детерминированный подход. М.: Едиториал УРСС, 2002 и сайт www.mirkin.ru.
5. *Димитриади Г.Г.* Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай линейного роста // Журнал «Аспирант и соискатель». 2002, № 5. С.24-33.
6. *Димитриади Г.Г.* Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай экспоненциального роста // Журнал «Аспирант и соискатель». 2002, № 5. С.34–38.
7. *Димитриади Г.Г.* Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу // Журнал «Математическое моделирование», 2003, № 4, т.15, с. 23–33.
8. *Димитриади Г.Г.* Финансовые пирамиды: детерминированная модель с вложениями в рекламу // Сборник научных трудов «Математические и инструментальные методы экономического анализа: управление качеством». Выпуск 5. – Тамбов, Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2002. С.57–66.
9. *Дубовский С.В.* Прогнозирование инфляции и обменного курса рубля в российской нестационарной экономике. М.: Издательство УРСС. 2001.
10. *Дубовский С.В.* Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков // Экономика и математические методы, 2002, т.38, № 2, С.84–96.
11. Рынок ценных бумаг: Учебник // Под ред. В.А. Галанова, А.И. Басова. М.: Финансы и статистика, 2002.
12. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М.: Издательство МФТИ, 1997.