***Г.Г. Димитриади.* Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай экспоненциального роста // Аспирант и соискатель. 2002, № 5. С. 34-38.**

Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай экспоненциального роста

Г. Г. Димитриади (george-d@yandex.ru)

Развивается подход к описанию финансовых пирамид, предложенный С. В. Дубовским. Рассмотрена и решена задача максимизации выручки Организатора в момент окончания финансовой пирамиды по цене-параметру продажи обязательств Организатора и вложениям в рекламу-параметру в случае экспоненциального роста финансовой пирамиды.

В литературе существует несколько подходов к математическому описанию финансовых пирамид [1-6]. Их краткое описание дано в статье [7] в этом же сборнике.

Настоящая статья лежит в рамках подхода, предложенного С. В. Дубовским. Ему принадлежат основные уравнения модели и постановка задачи оптимизации [3, 4]. Основной целью данной работы является решение задачи максимизации выручки Организатора финансовой пирамиды по цене-параметру продажи его обязательств и вложениям в рекламу-параметру в случае экспоненциального роста финансовой пирамиды.

Рассматриваемая здесь модель финансовой пирамиды описана в статье [7], а более подробно – в [5, 6].

Поставим задачу максимизации аналогично [7]. Основным отличием является экспоненциальная функции роста $f(t) = e^t$. Такая функция роста соответствует крайнему случаю «очень быстрого роста» финансовой пирамиды согласно обсуждению в [6].

Итого сформулируем задачу как:

$$\begin{cases} V(T) \to \max\limits_{s,c_g} \\ V(0) = 0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = c_g\left(1-s\right)g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o e^{\gamma s}\dfrac{(1-c_g)^n}{c_g^m}e^{\lambda t}, t \ge 0 \\ n > 1, 0 < m < 1, \gamma > 0, \lambda > 0 \\ c_g = const \in [0,1] \\ s = const \in [0,1] \end{cases}$$

Решение.

$0 \le t < \varphi$: $\dfrac{dV(t)}{dt} = g_0 e^{\gamma s}\left(1-s\right)(1-c_{\mathrm{g}})^n c_g^{1-m} e^{\lambda t} \ge 0$.

$t \ge \varphi$: $\dfrac{dV(t)}{dt} = g_0 e^{\gamma s}\left(1-s\right)(1-c_{\mathrm{g}})^n c_g^{1-m} e^{\lambda t} - g_0 e^{\gamma s}(1-c_{\mathrm{g}})^n c_g^{-m} e^{\lambda t} e^{-\lambda\varphi} =$

$= g_0 e^{\gamma s}(1-c_{\mathrm{g}})^n c_g^{-m} e^{\lambda t}\left[\left(1-s\right)c_g - e^{-\lambda\varphi}\right]$.

1) $c_g\left(1-s\right) \le e^{-\lambda\varphi}$. В этом случае при $0 \le t < \varphi$ $\dfrac{dV(t)}{dt} \ge 0$, а при $t \ge \varphi$ $\dfrac{dV(t)}{dt} \le 0$ $t \ge 0$. Значит, время, дающее максимум по t при фиксированных s и c_g, есть $T = \varphi$.

$V(T) = \dfrac{g_0\left(e^{\lambda\varphi} - 1\right)}{\lambda} e^{\gamma s}\left(1-s\right)(1-c_g)^n c_g^{1-m} \to \max\limits_{\substack{s\in[0,1] \\ c_g\in[0,1]}}$. Задача распадается на 2 независимые задачи максимизации по s и c_g. Легко получить, что решение задачи для c_g:

$(1-c_g)^n c_g^{1-m} \to \max\limits_{c_g\in[0,1]}$

имеет вид

$c_g^* = \dfrac{1-m}{n+1-m} \in (0,1)$, т.к. $n > 1, 0 < m < 1$,

а задачи для s

$e^{\gamma s}\left(1-s\right) \to \max\limits_{s\in[0,1]}$

– вид:

$s^* = \max\left\{0, 1 - \dfrac{1}{\gamma}\right\}$.

Случай 1 имеет место, если $\frac{1-m}{n+1-m}\min\left\{1,\frac{1}{\gamma}\right\}\le e^{-\lambda\varphi}$.

2) $(1-s)c_g > e^{-\lambda\varphi}$. $\frac{dV(t)}{dt}\ge 0$ при $t\ge 0$. Значит, время, дающее максимум по t при фиксированных s и c_g, есть $T=T_1$.

$$V(t)=c_g(1-s)\int_0^t g(\xi)d\xi-\int_0^{t-\varphi}g(\xi)d\xi=g_0e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[c_g(1-s)\frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda}-\frac{e^{\lambda t}e^{-\lambda\varphi}-1}{\lambda}\right]=$$

$$=\frac{g_0}{\lambda}e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[c_g(1-s)\left(e^{\lambda t}-1\right)-\left(e^{\lambda t}e^{-\lambda\varphi}-1\right)\right].$$

$$V(T)=\frac{g_0\left(e^{\lambda T_1}-1\right)}{\lambda}e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[c_g(1-s)-\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{\left(e^{\lambda T_1}-1\right)}\right].$$

Значит, в рассматриваемом случае исходная задача сводится к задаче

$$e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[c_g(1-s)-\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{\left(e^{\lambda T_1}-1\right)}\right]\to\max_{\substack{s\in[0,1]\\ c_g\in[0,1]}}.$$

Максимизируем сначала по s при фиксированном c_g. Отметим, что $c_g=0$ решением поставленной задачи не является. Тогда задача перепишется как:

$$e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[(1-s)-\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{c_g\left(e^{\lambda T_1}-1\right)}\right]\to\max_{\substack{s\in[0,1]\\ c_g=fix\in(0,1]}}.$$

Сделаем замену $u=1-s$ и обозначим $k=\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{\left(e^{\lambda T_1}-1\right)}\in(0,1)$. Тогда получим:

$$e^{-\gamma u}\left(u-\frac{k}{c_g}\right)\to\max_{u\in[0,1]}.$$

Решение этой задачи имеет вид $u^*=\min\left\{1,\frac{k}{c_g}+\frac{1}{\gamma}\right\}$ или $s^*=\max\left\{0,1-\frac{k}{c_g}-\frac{1}{\gamma}\right\}$ соответственно.

а) $s^*=0$ ($\frac{k}{c_g}+\frac{1}{\gamma}>1$). В этом случае рассматриваемая задача максимизации превращается в:

$$(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[c_g-\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{\left(e^{\lambda T_1}-1\right)}\right]\to\max_{c_g\in[0,1]}.$$

Согласно [6, Приложение 2] решение этой задачи имеет вид ($a = m$, $b = n$, $k = \dfrac{e^{\lambda T_1} e^{-\lambda\varphi} - 1}{\left(e^{\lambda T_1} - 1\right)}$. $k \in (0,1)$, т.к. $T_1 \in (\varphi, +\infty)$):

$$c_g^* = \frac{(1-m) + (n-m)k + \sqrt{(-m - mk + nk + 1)^2 + 4mk(n-m+1)}}{2(n-m+1)}.$$

Для того, чтобы этот случай имел место, необходимо выполнение условия $\dfrac{k}{c_g} + \dfrac{1}{\gamma} > 1$, $\dfrac{2(n-m+1)k}{\left[(1-m) + (n-m)k + \sqrt{(-m - mk + nk + 1)^2 + 4mk(n-m+1)}\right]} + \dfrac{1}{\gamma} > 1$.

б) $s^* = 1 - \dfrac{k}{c_g} - \dfrac{1}{\gamma}$, $\dfrac{k}{c_g} + \dfrac{1}{\gamma} \le 1$.

Максимизируем по c_g при фиксированном s:

$$(1-c_g)^n c_g^{-m} \left[c_g - \frac{k}{(1-s)} \right] \to \max_{\substack{c_g \in [0,1] \\ s = fix \in [0,1]}}.$$

Отметим, что $\dfrac{k}{(1-s)} \le 1$, иначе задача лишается смысла. Согласно [6, Приложение 2] решение этой задачи имеет вид ($a = m$, $b = n$, $p = \dfrac{k}{(1-s)}$):

$$c_g^* = \frac{(1-m) + (n-m)p + \sqrt{(-m - mp + np + 1)^2 + 4mp(n-m+1)}}{2(n-m+1)} \text{ или}$$

$$\frac{1-s}{k} = \frac{1}{p} = \frac{(n-m)c_g + m}{c_g\left[(n-m+1)c_g - (1-m)\right]}.$$

Но $1 - s = \dfrac{k}{c_g} + \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{k\gamma + c_g}{\gamma c_g}$. В итоге получим уравнение:

$$\frac{(n-m)c_g + m}{c_g\left[(n-m+1)c_g - (1-m)\right]} = \frac{k\gamma + c_g}{\gamma c_g},$$

$$k\gamma \frac{(n-m)c_g + m}{(n-m+1)c_g - (1-m)} = k\gamma + c_g.$$

После несложных преобразований получим:

$$(n-m+1)c_g^2 + (k\gamma - 1 + m)c_g - k\gamma = 0.$$

Обозначим $f_1(c_g)=(n-m+1)c_g^2+(k\gamma-1+m)c_g-k\gamma$. $f_1(c_g)$ – парабола с положительным старшим коэффициентом, причем $f_1(0)=-k\gamma<0$, а $f_1(1)=n>0$. Из свойств параболы [8] в этом случае следует, что на интервале $(0,1)$ лежит больший корень параболы c_2 и других корней на $(0,1)$ нет. Итак,

$$c_g^*=\frac{1-m-k\gamma+\sqrt{(1-m-k\gamma)^2+4k\gamma(n-m+1)}}{2(n-m+1)}.$$

Отметим, что этот случай имеет место только при выполнении условия $\frac{k}{c_g}+\frac{1}{\gamma}\le 1$, $\frac{2(n-m+1)k}{\left[1-m-k\gamma+\sqrt{(1-m-k\gamma)^2+4k\gamma(n-m+1)}\right]}+\frac{1}{\gamma}\le 1$.

Легко проверить выполнение условия $c_g^*(1-s^*)>e^{-\lambda\varphi}$ для случаев 2а) и 2б) при достаточно больших T_1 (т.к. $k\to e^{-\lambda\varphi}$ при $T_1\to+\infty$).

<u>Ответ</u>: Обозначим $k=\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{e^{\lambda T_1}-1}\in(0,1)$.

1) Если $\frac{1-m}{n+1-m}\min\left\{1,\frac{1}{\gamma}\right\}\le e^{-\lambda\varphi}$, то $c_g^*=\frac{1-m}{n+1-m}$ и $s^*=\max\left\{0,1-\frac{1}{\gamma}\right\}$.

2) Иначе ответ имеет вид:

а) Если верно, что $\frac{2(n-m+1)k}{\left[(1-m)+(n-m)k+\sqrt{(-m-mk+nk+1)^2+4mk(n-m+1)}\right]}+\frac{1}{\gamma}>1$, то

$$c_g^*=\frac{(1-m)+(n-m)k+\sqrt{(-m-mk+nk+1)^2+4mk(n-m+1)}}{2(n-m+1)},\ s^*=0.$$

б) Иначе $c_g^*=\frac{1-m-k\gamma+\sqrt{(1-m-k\gamma)^2+4k\gamma(n-m+1)}}{2(n-m+1)}$,

$$s^*=1-\frac{1}{\gamma}-\frac{2k(n-m+1)}{\left[1-m-k\gamma+\sqrt{(1-m-k\gamma)^2+4k\gamma(n-m+1)}\right]}.$$

Заключение. В данной статье описывается модель финансовой пирамиды, лежащая в рамках предложенного С. В. Дубовским подхода. Основными предположениями, положенными в основу модели, являются следующие:

1) обязательства Организатора в рамках финансовой пирамиды погашаются им только за счет собранных средств без привлечения сторонних средств;

2) крах финансовой пирамиды обусловлен свойствами самой пирамиды: у Организатора финансовой в некоторый момент времени может оказаться недостаточно средств для выполнения собственных обязательств.

В статье развивается подход к описанию финансовых пирамид, предложенный С. В. Дубовским, а именно рассмотрена и решена задача максимизации выручки Организатора в момент окончания финансовой пирамиды по цене-параметру продажи обязательств Организатора и вложениям в рекламу-параметру при экспоненциальном характере роста финансовой пирамиды, что отражает случай «очень быстрого» роста финансовой пирамиды согласно обсуждению из [6]. Основные результаты в виде аналитических формул приведены выше. Можно отметить, что оказалось, что если параметр эффективности рекламы γ «слишком мал», то с точки зрения поставленной задачи максимизации выгоднее обойтись без рекламы.

Рассматриваемую модель можно приблизить к реальности, если, например, разрешить менять значения цены и доли вложений в рекламу с течением времени.

Список литературы

1. *Blanchard O.-J. and Watson M.* Bubbles, rational expectations and financial markets in *P. Wachtel* Crises in economic and financial structure. – Lexington (MA), 1982.

2. *Белянин А. В., Исупова О. Г.* Финансовые пирамиды в переходной экономике с точки зрения теории игр // Российская программа экономических исследований. Научный доклад № 2000/10 (www.eerc.ru, http://195.28.33.75/).

3. *Дубовский С. В.* Прогнозирование инфляции и обменного курса рубля в российской нестационарной экономике. – М.: Издательство УРСС. – 2001.

4. *Дубовский С. В.* Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков // Экономика и математические методы, 2002, том 38, № 2, с. 84-96.

5. *Димитриади Г. Г.* Математические модели финансовых пирамид // Электронный журнал «Исследовано в России», 83, стр. 929-936, 2002 г. – http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/083.pdf.

6. *Димитриади Г. Г.* Модели финансовых пирамид: детерминированный подход. – М.: Издательство УРСС. – 2002.

7. *Димитриади Г. Г.* Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай линейного роста. – В этом же сборнике.

8. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. – М.: Издательство МФТИ. – 1997.