Г.Г. Димитриади. **Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай линейного роста // Аспирант и соискатель. 2002, № 5. С. 24-33.**

Детерминированный подход к описанию финансовых пирамид с учетом вложений в рекламу: случай линейного роста

Г. Г. Димитриади (george-d@yandex.ru)

Развивается подход к описанию финансовых пирамид, предложенный С. В. Дубовским. Рассмотрена и решена задача максимизации выручки Организатора в момент окончания финансовой пирамиды по цене-параметру продажи обязательств Организатора и вложениям в рекламу-параметру в случае линейного роста финансовой пирамиды.

В литературе существует несколько подходов к математическому описанию финансовых пирамид.

Основным предположением, лежащим в основе первого подхода, является предположение о рациональном поведении всех участников рынка. Вопрос, на который отвечают авторы работы [1], можно кратко сформулировать так: как могут возникнуть и какие формы могут принимать финансовые пирамиды (bubbles)? При этом под финансовыми пирамидами авторы понимают изменение цен, простым образом необъясняемое с помощью имеющейся информации и имеющее вид резкого повышения цен с последующим крахом. Авторы [1] получают, что и в предположении всеобщей рациональности возможны финансовые пирамиды. Они могут принимать вполне определенную форму экспоненциального роста отклонения цен активов от их базисной цены (NPV денежных потоков, связанных с актовом) и т.д. В [1] имеются примеры финансовых пирамид, приводятся тесты для их статистического нахождения и примеры успешного применения этих тестов.

Второй подход можно назвать игровым. Рассмотрим его основную идею. В качестве вкладчиков финансовой пирамиды может выступать все экономически активное население страны или его часть. Желанием Организатора является привлечение как можно большего их числа, т.к. при этом он максимизирует свою прибыль. В рамках данного подхода Организатор и население рассматриваются как участники одной игры Понци с разными (неантагонистическими) интересами. Возможным выбором Организатора (фирмы Понци) на каждом шаге является либо выполнение всех своих обязательств, для которых наступил срок выполнения, и продолжение существования пирамиды, либо отказ от их выполнения и «уход в тень от обманутых вкладчиков» (крах финансовой пирамиды). В это же время каждый представитель населения на каждом шаге решает, принимать ли участие в финансовой пирамиде, или нет. Время жизни пирамиды в рассматриваемом подходе зависит от характера изменения числа ее вкладчиков с течением времени, и ее крах заранее предрешен при исчерпании всего населения.

Этот подход положен в основу работы [2]. Авторы делят население на две группы: мудрствующих и наивных индивидов, для которых используются различные критерии поведения (ограниченные критерии рациональности). Основной вывод, полученный в [2], состоит в том, что единственным равновесным состоянием в рассматриваемой игре является отсутствие финансовой пирамиды.

В третьем подходе, предложенном С. В. Дубовским [3, 4], предполагается, что обязательства Организатора в рамках финансовой пирамиды погашаются им только за счет собранных средств без привлечения сторонних средств и что крах финансовой пирамиды обусловлен свойствами самой пирамиды: у Организатора финансовой пирамиды в некоторый момент времени может оказаться недостаточно средств для выполнения собственных обязательств.

Настоящая статья лежит в рамках последнего подхода. Основные уравнения модели и постановка задачи оптимизации принадлежат С. В. Дубовскому [3, 4]. Основной целью данной работы является решение задачи максимизации выручки Организатора финансовой пирамиды по цене-параметру продажи его обязательств и вложениям в рекламу-параметру в случае линейного роста финансовой пирамиды.

Модель финансовой пирамиды. Соответствующая идеям С. В. Дубовского [3, 4] модель финансовой пирамиды, рассматриваемая в данной работе, была подробно обсуждена в [5, 6]. Поэтому здесь напомним только основные идеи.

Под финансовой пирамидой будет пониматься финансовая схема такая, что: Организатор финансовой пирамиды в течение некоторого периода времени продает собственные обязательства (ценные бумаги), по которым он обязуется выплатить их предъявителю определенную сумму в будущем. Будем предполагать, что Организатор выполняет *все* свои обязательства вплоть до некоторого момента, называемого крахом финансовой пирамиды.

Будем считать, что Организатор выполняет свои обязательства перед вкладчиками только за счет выручки от продажи ценных бумаг в рамках финансовой пирамиды, т.е. не привлекая средств со стороны.

Важной особенностью рассматриваемой модели, отличающей ее от других, является то, что крах финансовой пирамиды обусловлен не исчерпанием числа вкладчиков или иными подобными причинами, а тем обстоятельством, что у Организатора в какой-то момент времени может оказаться недостаточно средств (собранных ранее) для выполнения своих обязательств.

Будем считать, что финансовая пирамида начинается в момент времени $t=0$, $V(t)$ – доход Организатора финансовой пирамиды, $g(t)$ – объем распроданных в момент времени t ценных бумаг по номиналу, $\varphi>0$ – фиксированный срок, через который наступает момент выполнения обязательств Организатора, отсчитываемый от момента их продажи, $c_g \in [0;1]$ – цена, выраженная в долях от номинала, по которой происходят продажи ценных бумаг, $s \in [0,1]$ – доля от текущей выручки $c_g g(t)$, затрачиваемая Организатором на рекламу финансовой пирамиды. Основное уравнение модели выглядит как:

$$\frac{dV}{dt}=\begin{cases} c_g(1-s)g(t), t<\varphi \\ c_g(1-s)g(t)-g(t-\varphi), t\geq\varphi \end{cases}, \; V(0)=0,$$

Отметим, что рассматриваемая в данной статье модель записана в непрерывном времени. Значит, все приводимые формулы и числовые значения следует рассматривать как приближенные.

Задача максимизации. Предположим, что, создавая пирамиду, Организатор имеет целью максимизацию собственной выручки. Более точно: целью Организатора финансовой пирамиды является максимизация своей выручки, т.е. величины $V(T)$, в момент окончания (краха) T финансовой пирамиды. Считаем, что после этого момента Организатор больше не выполняет свои обязательства.

Время краха финансовой пирамиды будем предполагать ограниченным сверху достаточно большой величиной $T_1 > \varphi$: $T \le T_1$. Параметрами, которые можно варьировать для решения задачи оптимизации, являются цена продажи ценных бумаг Организатором c_g и доля вложений в рекламу s.

Формулы $\frac{dV}{dt} = c_g(1-s)g(t) - g(t-\varphi)$, $g(0)=0$ при $t \in [-\varphi, 0)$ и $g(t) = g_o e^{\gamma s}\Phi(c_g) f(t)$ при $t \ge 0$ задают зависимость выручки Организатора финансовой пирамиды от времени. Здесь использовано представлении функции $g(t)$ в виде произведения трех функций: функции эффективности рекламы $e^{\gamma s}$, зависящей от доли вложений в рекламу, функции спроса $\Phi(c_g)$, зависящей от цены, и заданной функции роста $f(t)$ [6]. g_0 – постоянная (коэффициент пропорциональности для выбранных единиц).

Обсуждение функции спроса имело место в [6]. Здесь сразу положим $\Phi(c) = \frac{(1-c)^n}{c^m}$, $n > 1$, $0 < m < 1$. В качестве функции роста $f(t)$ используем простейшую линейную функцию $f(t) = t$.

Итого сформулируем задачу как:

$$\begin{cases} V(T) \to \max\limits_{s, c_g} \\ V(0) = 0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = c_g\left(1-s\right)g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o e^{\gamma s}\dfrac{(1-c_g)^n}{c_g^m}t, t \ge 0 \\ n > 1, 0 < m < 1, \gamma > 0 \\ c_g = const \in [0,1] \\ s = const \in [0,1] \end{cases}$$

<u>Решение задачи.</u> В Приложениях 1 и 2 приводятся решения двух вспомогательных задач.

$$0 \le t < \varphi: \ \frac{dV(t)}{dt} = g_0 e^{\gamma s}\left(1-s\right)(1-c_g)^n c_g^{1-m} t \ge 0 .$$

$$t \ge \varphi: \ \frac{dV(t)}{dt} = g_0 e^{\gamma s}\left(1-s\right)(1-c_g)^n c_g^{1-m} t - g_0 e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}(t-\varphi) =$$

$$= g_0 e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[\varphi - \left(1-c_g\left(1-s\right)\right)t\right].$$

Отметим, что $c_g = 1$ и $s = 1$ не дают максимум.

При $c_g\left(1-s\right) \ne 1$ $T = \dfrac{\varphi}{1-c_g\left(1-s\right)}$ – время, максимизирующее функцию $V(t)$ при фиксированных значениях параметров c_g и s.

$$V(t) = c_g\left(1-s\right)\int_0^t g(\xi)d\xi - \int_0^{t-\varphi} g(\xi)d\xi = g_0 e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[c_g\left(1-s\right)\frac{t^2}{2} - \frac{(t-\varphi)^2}{2}\right] =$$

$$= g_0 e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[-(1-c_g\left(1-s\right))\frac{t^2}{2} + \varphi t - \frac{\varphi^2}{2}\right].$$

$$V(T) = g_0 e^{\gamma s}(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[-\frac{\varphi^2}{2(1-c_g\left(1-s\right))} + \frac{\varphi^2}{1-c_g\left(1-s\right)} - \frac{\varphi^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{g_0\varphi^2}{2}\frac{e^{\gamma s}\left(1-s\right)(1-c_g)^n c_g^{1-m}}{1-c_g\left(1-s\right)} \to \max_{\substack{c_g\in[0,1] \\ s\in[0,1]}} .$$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче:

$$\frac{e^{\gamma s}\left(1-s\right)(1-c_g)^n c_g^{1-m}}{1-c_g\left(1-s\right)} \to \max_{\substack{c_g\in[0,1] \\ s\in[0,1]}} .$$

Максимизируем полученное выражение сначала по s при фиксированном c_g. Отметим, что $c_g = 0$ не является решением. В этом случае задача перепишется как:

$$\frac{e^{\gamma s}\left(1-s\right)}{\dfrac{1}{c_g} - \left(1-s\right)} \to \max_{\substack{s\in[0,1] \\ c_g = fix\in(0,1]}}$$

Сделав замену $u = 1-s$, перепишем задачу эквивалентно:

$$\frac{e^{-\gamma u}u}{\dfrac{1}{c_g} - u} \to \max_{\substack{u\in[0,1] \\ c_g = fix\in(0,1]}}$$

Согласно Приложению 1 (при $\gamma = \gamma > 0$, $k = {}^{1}\!/\!{}_{c_g} \geq 1$) решение этой задачи имеет вид:

а) при значениях параметров из множества $\left\{\frac{1}{2} \leq c_g \leq 1, 0 < \gamma \leq 4c_g\right\} \cup \left\{0 < c_g \leq \frac{1}{2}, 0 < \gamma \leq \frac{1}{1-c_g}\right\}$ $s^* = 0$;

б) при значениях параметров из множества $\left\{0 < c_g \leq 1, \gamma \geq \frac{1}{1-c_g}\right\}$

$s^* = 1 - \dfrac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma c_g}}{2\gamma c_g}$;

в) при значениях параметров из множества $\left\{\frac{1}{2} \leq c_g \leq 1, 4c_g \leq \gamma \leq \frac{1}{1-c_g}\right\}$: если

$e^{-\gamma + \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma c_g}}{2c_g}} \geq \dfrac{1-c_g}{4\gamma c_g^2}\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma c_g}\right)^2$, то $s^* = 0$, иначе $-s^* = 1 - \dfrac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma c_g}}{2\gamma c_g}$.

1) Рассмотрим случай $s^* = 0$. Максимизируемое выражение в этом случае сводится к:

$$\frac{(1-c_g)^n c_g^{1-m}}{1-c_g} = (1-c_g)^{n-1} c_g^{1-m} \to \max_{c_g \in [0,1]} .$$

Решение этой задачи дает (см., например, [6, Приложение 1]):

$$c_g^* = \frac{1-m}{n-m}.$$

Таким образом, если параметр роста γ «недостаточно большой», то максимум дает случай без рекламы: $s^* = 0$.

Для того, чтобы этот случай имел место, необходимо, чтобы γ принадлежала множеству (см. пункты а и б выше):

$$\left\{\frac{1}{2} \leq \frac{1-m}{n-m} \leq 1, 0 < \gamma \leq 4\frac{1-m}{n-m}\right\} \cup \left\{0 < \frac{1-m}{n-m} \leq \frac{1}{2}, 0 < \gamma \leq \frac{n-m}{n-1}\right\} \cup$$

$$\left\{\frac{1}{2} \leq \frac{1-m}{n-m} \leq 1, 4\frac{1-m}{n-m} \leq \gamma \leq \frac{n-m}{n-1}, e^{-\gamma + \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma\frac{1-m}{n-m}}}{2\frac{1-m}{n-m}}} \geq \frac{(n-1)(n-m)}{4\gamma(1-m)^2}\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma\frac{1-m}{n-m}}\right)^2\right\}.$$

2) Рассмотрим случай $s^* = 1 - \dfrac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma c_g}}{2\gamma c_g}$.

Теперь максимизируем полученное выражение $\dfrac{e^{\gamma s}(1-s)(1-c_g)^n c_g^{1-m}}{1-c_g(1-s)}$ по c_g при фиксированном s. Отметим, что $s=1$ не является решением. Тогда:

$$\frac{(1-c_g)^n c_g^{1-m}}{\dfrac{1}{(1-s)} - c_g} \to \max_{\substack{c_g \in [0,1] \\ s = fix \in [0,1)}} .$$

Решение этой задачи согласно Приложению 2 ($a = 1-m$, $b = n$, $k = \dfrac{1}{1-s}$) имеет вид:

$$c^* = \frac{ak + bk + a - 1 - \sqrt{(ak+bk+a-1)^2 - 4ak(a+b-1)}}{2(b+a-1)}, \text{ где } k = \frac{1}{1-s} > 1,$$

или $1 - s = \dfrac{1}{c_g}\dfrac{(a+b)c_g - a}{(a+b-1)c_g + (1-a)}$. Учтя, что $1 - s = \dfrac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma c_g}}{2\gamma c_g}$, получим:

$$\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\gamma c_g}}{2\gamma c_g} = \frac{1}{c_g}\frac{(a+b)c_g - a}{(a+b-1)c_g + (1-a)},$$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\gamma}c_g} = 2\frac{(a+b)c_g - a}{(a+b-1)c_g + (1-a)}.$$

Перепишем полученное уравнение в исходных параметрах n, m ($a = 1-m$, $b = n$):

$$1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\gamma}c_g} = 2\frac{(n-m+1)c_g - (1-m)}{(n-m)c_g + m}.$$

Это уравнение сводится к кубическому, с коэффициентами, зависящими от параметров, поэтому его решение в аналитическом виде не представляется возможным. Решим его численно для «типичных» значений параметров.

Положим $m = 0.5$, в качестве n возьмем значения 2, 5, 10, а в качестве γ значения 0.5, 1, 2, 5, 10. Полученные значения c_g^* и s^* сведены в Таблицу 1.

Таблица 1.

	$n=2$		$n=5$		$n=10$	
	c_g^*	s^*	c_g^*	s^*	c_g^*	s^*
$\gamma=0.5$	0, 333	0	0, 111	0	0, 053	0
$\gamma=1$	0, 333	0	0, 111	0	0, 053	0
$\gamma=2$	0, 252	0, 413	0, 100	0, 472	0, 050	0, 487
$\gamma=5$	0, 215	0, 791	0, 094	0, 796	0, 049	0, 798
$\gamma=10$	0, 207	0, 898	0, 092	0, 899	0, 048	0, 900

Ячейки, где $s^*=0$, соответствуют пункту 1, для них выполняется условие из конца пункта 1. Остальные ячейки отвечают пункту 2, и для них выполняются условия из пунктов а) – в) выше для случая $s^*\neq 0$ с соответствующими c_g^* и s^*.

Ответ: В предположении, что T_1 «достаточно велико», т.е. $T_1 \geq \dfrac{\varphi}{1-c_g^*\left(1-s^*\right)}$, получим: если параметр γ принадлежит множеству, заданному параметрически в зависимости от параметров m и n:

$$\left\{\frac{1}{2}\leq\frac{1-m}{n-m}\leq 1, 0<\gamma\leq 4\frac{1-m}{n-m}\right\}\cup\left\{0<\frac{1-m}{n-m}\leq\frac{1}{2}, 0<\gamma\leq\frac{n-m}{n-1}\right\}\cup$$

$$\left\{\frac{1}{2}\leq\frac{1-m}{n-m}\leq 1, 4\frac{1-m}{n-m}\leq\gamma\leq\frac{n-m}{n-1}, e^{-\gamma+\frac{\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\gamma\frac{1-m}{n-m}}}{2\frac{1-m}{n-m}}}\geq\frac{(n-1)(n-m)}{4\gamma(1-m)^2}\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\gamma\frac{1-m}{n-m}}\right)^2\right\},$$

то $s^*=0$, $c_g^*=\dfrac{1-m}{n-m}$.

В противоположном случае c_g^* находится как решение уравнения

$$1-\sqrt{1-\frac{4}{\gamma}c_g}=2\frac{(n-m+1)c_g-(1-m)}{(n-m)c_g+m},$$

а s^* рассчитывается как $s^*=1-\dfrac{\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\gamma c_g}}{2\gamma c_g}$.

Полученные численные значения для различных наборов параметров сведены в Таблицу 1.

Заключение. В данной статье описывается модель финансовой пирамиды, лежащая в рамках предложенного С. В. Дубовским подхода. Основными предположениями, положенными в основу модели, являются следующие:

1) обязательства Организатора в рамках финансовой пирамиды погашаются им только за счет собранных средств без привлечения сторонних средств;

2) крах финансовой пирамиды обусловлен свойствами самой пирамиды: у Организатора финансовой в некоторый момент времени может оказаться недостаточно средств для выполнения собственных обязательств.

В статье развивается подход к описанию финансовых пирамид, предложенный С. В. Дубовским, а именно рассмотрена и решена задача максимизации выручки Организатора в момент окончания финансовой пирамиды по цене-параметру продажи обязательств Организатора и вложениям в рекламу-параметру при линейном характере роста финансовой пирамиды. Основные результаты в виде аналитических формул и частично в виде результатов численных экспериментов приведены выше. Можно отметить, что оказалось, что если параметр эффективности рекламы γ «слишком мал», то с точки зрения поставленной задачи максимизации выгоднее обойтись без рекламы.

Рассматриваемую модель можно приблизить к реальности, если, например, использовать не только линейную функцию роста, или разрешить менять значения цены и доли вложений в рекламу с течением времени.

Приложение 1

В этом Приложении приводится решение вспомогательной задачи.

Задача.

$$f(u) = e^{-\gamma u}\frac{u}{k-u}, \ \gamma > 0, \ k \ge 1.$$

$$f(u) \to \max_{u\in[0,1]}$$

Решение.

$$\frac{u}{k-u}=-\frac{k-u}{k-u}+\frac{k}{k-u}=\frac{k}{k-u}-1$$

$$f'(u)=-\gamma e^{-\gamma u}\frac{u}{k-u}+e^{-\gamma u}\frac{k}{(k-u)^2}=\frac{e^{-\gamma u}}{(k-u)^2}\left[-\gamma u(k-u)+k\right]=$$

$$=\frac{e^{-\gamma u}}{(k-u)^2}\left[\gamma u^2-\gamma ku+k\right].$$

Обозначим $f_1(u)=\gamma u^2-\gamma ku+k$. $f_1(c)$ – парабола с положительным старшим коэффициентом $\gamma>0$. Вычислим ее дискриминант:

$$D=\gamma^2k^2-4\gamma k=\gamma k(\gamma k-4)$$

а) $\gamma k\le 4$. В этом случае $f_1(u)\ge 0\ \ \forall u\in[0,1]$. Следовательно, u, дающее максимум, есть $u^*=1$.

б) $\gamma k>4$. В этом случае функция $f_1(u)$ имеет 2 корня:

$u_1=\dfrac{\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}$ и $u_2=\dfrac{\gamma k+\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}$, причем $0<u_1<\dfrac{k}{2}<u_2$.

Искомое значение u^* зависит от того, попадают ли корни u_1 и u_2 (один или оба) на отрезок $[0,1]$ или нет.

б1) Случай $u_1\ge 1$.

$$\frac{\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}\ge 1,\ \gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}\ge 2\gamma,\ \gamma k-2\gamma\ge\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}.$$

Если $k<2$, то неравенство неверно. При $k\ge 2$ возведем его в квадрат:

$$\gamma^2k^2+4\gamma^2-4\gamma^2k\ge\gamma^2k^2-4\gamma k,\ \gamma-\gamma k\ge -k,\ \gamma\le\frac{k}{k-1}=1+\frac{1}{k-1}.$$

Итак, $u_1\ge 1$ при $\left\{k\ge 2,\dfrac{4}{k}<\gamma\le\dfrac{k}{k-1}\right\}$. (Легко проверить, что $\dfrac{4}{k}\le\dfrac{k}{k-1}\ \ \forall k>1$.)

На этом множестве $u_2>u_1\ge 1\Rightarrow f'(u)\ge 0$ на $[0,1]$, а значит, $u^*=1$.

б2) Случай $u_1\le 1$. Как следует из разбора предыдущего случая, этот случай имеет место при $\left\{k\ge 2,\gamma\ge\dfrac{k}{k-1}\right\}\cup\left\{1\le k\le 2,\gamma>\dfrac{4}{k}\right\}$.

Необходимо исследовать расположение корня u_2 относительно точки 1.

б21) Случай $u_2\ge 1$.

$$\frac{\gamma k+\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}\ge 1,\ \gamma k+\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}\ge 2\gamma\ ,\ 2\gamma-\gamma k\le\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}\ .$$

Если $k>2$, то неравенство верно. При $k\le 2$ возведем его в квадрат:

$$\gamma^2k^2+4\gamma^2-4\gamma^2k\le\gamma^2k^2-4\gamma k\ ,\ \gamma-\gamma k\le -k\ ,\ \gamma\ge\frac{k}{k-1}\ .$$

Итак, случай $u_2\ge 1$ имеет место на множестве

$$\left\{k\ge 2,\gamma\ge\frac{k}{k-1}\right\}\cup\left\{1\le k\le 2,\gamma\ge\frac{k}{k-1}\right\}=\left\{k\ge 1,\gamma\ge\frac{k}{k-1}\right\}.$$

Теперь из рассмотрения знаков производной $f'(u)$ ($f'(u)>0$ при $u\in[0,u_1)$, $f'(u_1)=0$, $f'(u)<0$ при $u\in(u_1,1]$) понятно, что максимум функции $f(u)$ на отрезке $u\in[0,1]$ достигается при

$$u^*=u_1=\frac{\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}\ .$$

б21) Случай $u_2\le 1$. Этот случай имеет место на множестве $\left\{1\le k\le 2,\frac{4}{k}\le\gamma\le\frac{k}{k-1}\right\}$.

Рассмотрим знаки производной $f'(u)$. Производная положительна на полуинтервалах $[0,u_1)$ и $(u_2,1]$ и отрицательна между корнями, т.е. на (u_1,u_2). Значит, в точке $u=u_1$ имеется локальный максимум.

Для нахождения максимума функции $f(u)$ на отрезке $[0,1]$ необходимо сравнить ее значения в точках $u=u_1$ и $u=1$: если $f(u_1)\ge f(1)$, то $u^*=u_1$, иначе $u^*=1$. Перепишем неравенство $f(1)\ge f(u_1)$:

$$\frac{e^{-\gamma}}{k-1}\ge e^{-\gamma\frac{\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}}\frac{\dfrac{\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}}{k-\dfrac{\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}},$$

$$\frac{e^{-\gamma}}{k-1}\ge e^{-\gamma\frac{\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2\gamma}}\frac{\left(\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}\right)^2}{4\gamma k},$$

$$e^{-\gamma+\frac{\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}}{2}}\ge\frac{(k-1)}{4\gamma k}\left(\gamma k-\sqrt{\gamma^2k^2-4\gamma k}\right)^2.$$

Можно проверить, что в частных случаях $\gamma = \frac{4}{k}$ и $\gamma = \frac{k}{k-1}$ $u^* = 1$ и $u^* = u_1$ соответственно, что совпадает со значениями из граничащих областей.

Ответ: а) при значениях параметров из множества $\left\{1 \le k \le 2, 0 < \gamma \le \frac{4}{k}\right\} \cup \left\{k \ge 2, 0 < \gamma \le \frac{k}{k-1}\right\}$ $u^* = 1$;

б) при значениях параметров из множества $\left\{k \ge 1, \gamma \ge \frac{k}{k-1}\right\}$ $u^* = \frac{\gamma k - \sqrt{\gamma^2 k^2 - 4\gamma k}}{2\gamma}$;

в) при значениях параметров из множества $\left\{1 \le k \le 2, \frac{4}{k} \le \gamma \le \frac{k}{k-1}\right\}$: если $e^{-\gamma + \frac{\gamma k - \sqrt{\gamma^2 k^2 - 4\gamma k}}{2}} \ge \frac{(k-1)}{4\gamma k}\left(\gamma k - \sqrt{\gamma^2 k^2 - 4\gamma k}\right)^2$, то $u^* = 1$, иначе – $u^* = \frac{\gamma k - \sqrt{\gamma^2 k^2 - 4\gamma k}}{2\gamma}$.

Приложение 2

В этом Приложении приводится решение вспомогательной задачи.

Задача.

$$f(c) = \frac{c^a (1-c)^b}{k-c}, \; 0 < a < 1, \; b > 1, \; k > 1.$$

$$f(c) \to \max_{c \in [0,1]}$$

Решение.

$$f'(c) = \frac{ac^{a-1}(1-c)^b}{k-c} - \frac{bc^a(1-c)^{b-1}}{k-c} + \frac{c^a(1-c)^b}{(k-c)^2} =$$

$$= \frac{c^{a-1}(1-c)^{b-1}}{(k-c)^2}\left[a(1-c)(k-c) - bc(k-c) + c(1-c)\right] =$$

$$= \frac{c^{a-1}(1-c)^{b-1}}{(k-c)^2}\left[ak - ac - akc + ac^2 - bkc + bc^2 + c - c^2\right] =$$

$$= \frac{c^{a-1}(1-c)^{b-1}}{(k-c)^2}\left[c^2(a+b-1) + c(-a - ak - bk + 1) + ak\right].$$

Обозначим $f_1(c) = c^2(a+b-1) + c(-a - ak - bk + 1) + ak$.

$f_1(c)$ – парабола с ветвями, направленными вверх ($0 < a < 1, \; b > 1 \; \Rightarrow \; a + b - 1 < 0$).

$f_1(0) = ak > 0$, $f_1(1) = a + b - 1 + 1 - bk - ak - a + ak = b(1-k) < 0$.

Т.к. $f_1(0)>0$ и $f_1(1)<0$, то из свойств параболы [7] следует, что парабола $f_1(c)$ имеет 2 корня, причем на интервале $(0,1)$ лежит ровно один из них (меньший). Обозначим его как $c_1=\dfrac{ak+bk+a-1-\sqrt{(ak+bk+a-1)^2-4ak(a+b-1)}}{2(b+a-1)}$.

Теперь из рассмотрения знаков производной $f'(c)$ ($f'(c)>0$ при $c\in[0,c_1)$, $f'(c_1)=0$, $f'(c)<0$ при $c\in(c_1,1]$) понятно, что максимум функции $f(c)$ на отрезке $c\in[0,1]$ достигается при $c^*=c_1$.

Итак, $c^*=\dfrac{ak+bk+a-1-\sqrt{(ak+bk+a-1)^2-4ak(a+b-1)}}{2(b+a-1)}$.

Непосредственная проверка дает, что действительно $c_1\in(0,1)$.

При $k\to 1$ $c^*\to\dfrac{a}{a+b-1}$.

<u>Ответ:</u>

$$c^*=\frac{ak+bk+a-1-\sqrt{(ak+bk+a-1)^2-4ak(a+b-1)}}{2(b+a-1)},$$

При $k\to 1$ $c^*\to\dfrac{a}{a+b-1}$.

Список литературы

1. *Blanchard O.-J. and Watson M.* Bubbles, rational expectations and financial markets in *P. Wachtel* Crises in economic and financial structure. – Lexington (MA), 1982.

2. *Белянин А. В., Исупова О. Г.* Финансовые пирамиды в переходной экономике с точки зрения теории игр // Российская программа экономических исследований. Научный доклад № 2000/10 (www.eerc.ru, http://195.28.33.75/).

3. *Дубовский С. В.* Прогнозирование инфляции и обменного курса рубля в российской нестационарной экономике. – М.: Издательство УРСС. – 2001.

4. *Дубовский С. В.* Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков // Экономика и математические методы, 2002, том 38, № 2, с. 84-96.

5. *Димитриади Г. Г.* Математические модели финансовых пирамид // Электронный журнал «Исследовано в России», 83, стр. 929-936, 2002 г. – http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/083.pdf.

6. *Димитриади Г. Г.* Модели финансовых пирамид: детерминированный подход. – М.: Издательство УРСС. – 2002.

7. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. – М.: Издательство МФТИ. – 1997.