Опубликовано на нашем сайте: 4 марта 2003 г.

Чухланцев Д. О.

Графоматричная постановка задачи оптимизации задолженностей предприятий при проведении клиринговых расчетов

Известны дебиторская и кредиторская задолженности каждого из предприятий, участвующих в клиринговых расчетах.

Описание переменных:

a_{ij} , $i,j = 1,2,\ldots,n$ – долг j-го предприятия i-му предприятию в денежном выражении (j-е предприятие имеет кредиторскую задолженность по отношению к i-му предприятию; i-е предприятие имеет дебиторскую задолженность по отношению к j-му предприятию). Все задолженности выражаются в денежных единицах (например, в рублях);

A – матрица кредитов предприятий;

A^T – матрица задолженностей предприятий (транспонированная матрица A).

Требуется минимизировать суммарную дебиторскую (кредиторскую) задолженность предприятий.

На основании a_{ij} составляется матрица кредитов предприятий с определением итоговых значений дебиторской, кредиторской задолженностей для каждого предприятия.

Матрица кредитов предприятий

A =

Предприятия должники ► Предприятия кредиторы ▼	1	2	. . .	j	. . .	n	Суммарные кредиты предприятий
1	$a_{11}=0$	a_{12}	. . .	a_{1j}	. . .	a_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$
2	a_{21}	$a_{22}=0$	. . .	a_{2j}	. . .	a_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
i	a_{i1}	a_{i2}	. . .	a_{ij}	. . .	a_{in}	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	a_{n1}	a_{n2}	. . .	a_{nj}	. . .	$a_{nn}=0$	$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}$

Суммарные задолженности предприятий	$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}$	. . .	$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$	. . .	$\sum_{i=1}^{n} a_{in}$	$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

При этом, в силу коммутативного и ассоциативного законов сложения конечного числа слагаемых

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} a_{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{i} = \alpha$$

т.е. сумма суммарных задолженностей всех предприятий β равна сумме суммарных кредитов этих предприятий α.

На основании матрицы кредитов предприятий определяются нетто-дебиторская и нетто-кредиторская задолженности предприятий. Данные задолженности оформляются в виде матрицы баланса кредитов и задолженностей предприятий.

Баланс кредитов и задолженностей предприятий

№ предприятия	Нетто дебиторская задолженность	Нетто кредиторская задолженность
1	$\alpha_1 - \beta_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{Ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{i1}$	$\beta_1 - \alpha_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} - \sum_{j=1}^{n} a_{Ij}$
2	$\alpha_2 - \beta_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} - \sum_{i=1}^{n} a_{i2}$	$\beta_2 - \alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}$
. . .	. . .	. . .
n	$\alpha_n - \beta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} - \sum_{i=1}^{n} a_{in}$	$\beta_n - \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in} - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}$
Итог	$\alpha - \beta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0$	$\beta - \alpha = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$

В случае если нетто-дебиторская задолженность i-го предприятия больше нуля: $\alpha_i - \beta_i > 0$ и, следовательно нетто-кредиторская задолженность меньше нуля: $\beta_i - \alpha_i < 0$, то i-е предприятие является нетто-кредитором.

В противном случае, то есть когда нетто-дебиторская задолженность i-го предприятия отрицательна: α_i - β_i <0, и, следовательно нетто-кредиторская задолженность положительна: β_i - α_i > 0, то предприятие является нетто-дебитором.

Допускается случай равенства дебиторской и кредиторской задолженностей i-го предприятия, то есть одновременное равенство нулю нетто-дебиторской и нетто-кредиторской задолженностей предприятия.

Матрица баланса кредитов предприятий является ограничением задачи минимизации суммарной дебиторской (кредиторской) задолженности предприятий. Нетто-дебиторская (нетто-кредиторская) задолженность предприятий должна оставаться постоянной на каждом шаге оптимизации.

На основании матрицы кредитов предприятий строится размеченный граф. Разметка a_{ij} над стрелкой $i \rightarrow j$ (из i-го предприятия в j-е) означает кредит i-го предприятия j-му (или что то же: долг j-го предприятия i-му).

Первым шагом минимизации суммарной дебиторской (кредиторской) задолженности является аннулирование хотя бы одной из взаимных задолженностей между предприятиями каждой пары.

Для этого строится матрица задолженностей предприятий – транспонированная матрица A^T.

Матрица задолженностей предприятий

$A^T =$

Предприятия кредиторы ▶ / Предприятия должники ▼	1	2	. . .	i	. . .	n	Суммарные задолженности предприятий
1	$a_{11}=0$	a_{21}	. . .	a_{i1}	. . .	a_{n1}	$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}$
2	a_{12}	$a_{22}=0$	. . .	a_{i2}	. . .	a_{n2}	$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
j	a_{1j}	a_{2j}	. . .	a_{ij}	. . .	a_{nj}	$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	a_{1n}	a_{2n}	. . .	a_{jn}	. . .	$a_{nn}=0$	$\sum_{i=1}^{n} a_{in}$

$\sum^{n} \sum^{n} a_{ij}$

Суммарные кредиты предприятий	$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$	. . .	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$	. . .	$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}$	

Далее строится матрица $B = (A - A^T)$, соответствующая тому, что две стрелки из $i \to j$ и из $j \to i$ с разметками a_{ij} и a_{ji} соответственно заменяются одной (если $a_{ij} \neq a_{ji}$; в противном случае обе стрелки исчезнут).

Матрица $B = (A - A^T)$

Предприятия должники ▶ / Предприятия кредиторы ▼	1	2	. . .	j	…	n	Суммарные кредиты
1	$a_{11}- a_{11} = 0$	$a_{12}- a_{21}$	. . .	$a_{1j}- a_{j1}$	…	$a_{1n}- a_{n1}$	$\left[\sum_{j=1}^{n} (a_{1j} - a_{j1})\right]$
2	$a_{21}- a_{12}$	$a_{22}- a_{22} = 0$	. . .	$a_{2j}- a_{j2}$	…	$a_{2n}- a_{n2}$	$\left[\sum_{j=1}^{n} (a_{2j} - a_{j2})\right]$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	…	. . .	. . .
i	$a_{i1}- a_{1i}$	$a_{i2}- a_{2i}$	. . .	$a_{ij}- a_{ji}$	…	$a_{in}- a_{ni}$	$\left[\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - a_{ji})\right]$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	…	. . .	. . .
n	$a_{n1}- a_{1n}$	$a_{n2}- a_{2n}$	. . .	$a_{nj}- a_{jn}$	…	$a_{nn}- a_{nn} = 0$	$\left[\sum_{j=1}^{n} (a_{nj} - a_{jn})\right]$
Суммарные задолженности	$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_{i1} - a_{1i})\right]$	$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_{i2} - a_{2i})\right]$	. . .	$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - a_{ji})\right]$	…	$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_{in} - a_{ni})\right]$	**0**

Матрица $B = (A - A^T)$ соответствует тому, что две стрелки из $i \to j$ и из $j \to i$ с разметками a_{ij} и a_{ji} соответственно заменяются одной (если $a_{ij} \neq a_{ji}$):

$i \to j$, если $a_{ij}- a_{ji} = b_{ij} > 0$;

$j \to i$, если $a_{ij}- a_{ji} = b_{ij} < 0$

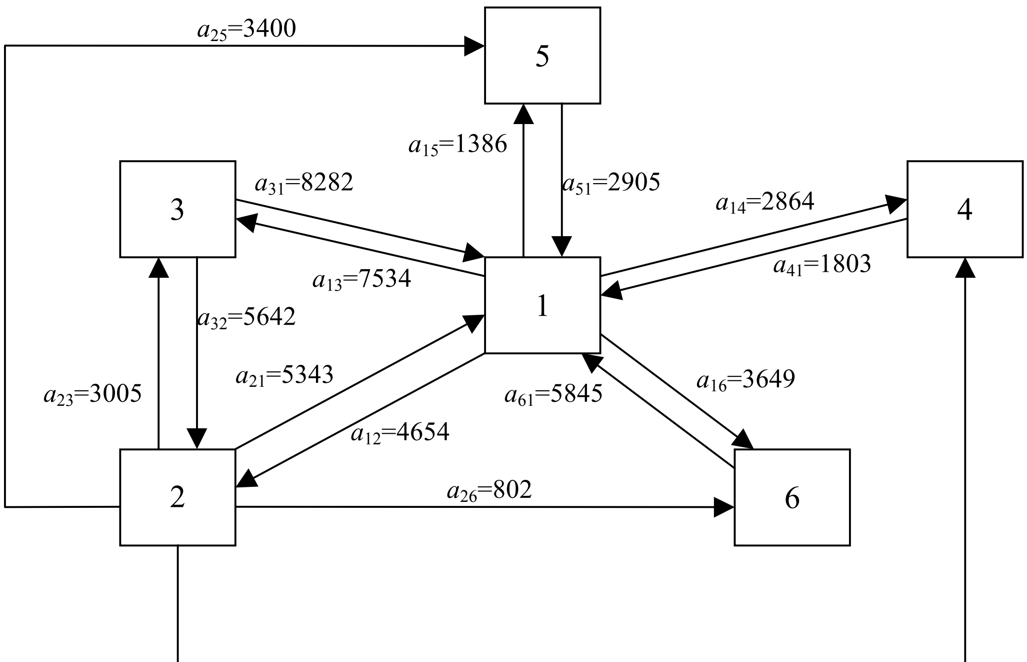
в противном случае, если $a_{ij} = a_{ji}$, обе стрелки исчезнут

В качестве примера рассмотрим уровни дебиторской и кредиторской задолженностей шести предприятий друг другу (в тыс. рублей).

Матрица кредитов предприятий (в тыс. рублей)

Предприятия должники ► / Предприятия кредиторы ▼	1	2	3	4	5	6	Суммарные кредиты предприятий
1	0	4 654	7 534	2 864	1 386	3 649	**20 087**
2	5 343	0	3 005	2 500	3 400	802	**15 050**
3	8 282	5 642	0	0	0	0	**13 924**
4	1 803	0	0	0	0	0	**1 803**
5	2 905	0	0	0	0	0	**2 905**
6	5 845	0	0	0	0	0	**5 845**
Суммарные задолженности предприятий	**24 178**	**10 296**	**10 539**	**5 364**	**4 786**	**4 451**	**59 614**

На основании матрицы кредитов предприятий строится размеченный граф. Разметка a_{ij} над стрелкой $i \rightarrow j$ означает кредит i-го предприятия j-му, или соответственно долг j-го предприятия i-му.



a_{24}=2500

Баланс кредитов и задолженностей предприятий (в тыс. рублей)

№ предприятия	Нетто дебиторская задолженность	Нетто кредиторская задолженность
1	**- 4 091**	**4 091**
2	**4 754**	**- 4 754**
3	**3 385**	**- 3 385**
4	**- 3 561**	**3 561**
5	**- 1 881**	**1 881**
6	**1 394**	**-1 394**

Матрица задолженностей предприятий (в тыс. рублей)

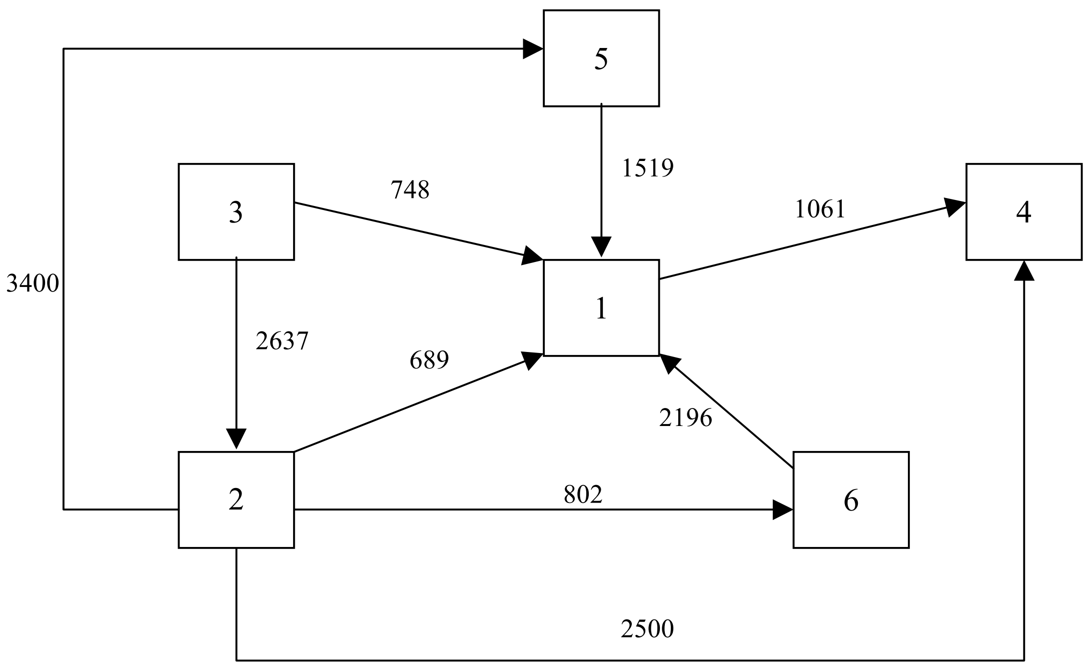
Предприятия кредиторы ► Предприятия должники ▼	1	2	3	4	5	6	Суммарные задолженности предприятий
1	0	5 343	8 282	1 803	2 905	5 845	**24 178**
2	4 654	0	5 642	0	0	0	**10 296**
3	7 534	3 005	0	0	0	0	**10 539**
4	2 864	2 500	0	0	0	0	**5 364**
5	1 386	3 400	0	0	0	0	**4 786**
6	3 649	802	0	0	0	0	**4 451**
Суммарные кредиты предприятий	**20 087**	**15 050**	**13 924**	**1 803**	**2 905**	**5 845**	**59 614**

Матрица $B = (A - A^T)$

Предприятия должники ► / Предприятия кредиторы ▼	1	2	3	4	5	6	Суммарные кредиты предприятий
1	0	-689	-748	1 061	-1 519	-2 196	**-4 091**
2	689	0	-2 637	2 500	3 400	802	**4 754**
3	748	2 637	0	0	0	0	**3 385**
4	-1 061	-2 500	0	0	0	0	**-3 561**
5	1 519	-3 400	0	0	0	0	**-1 881**
6	2 196	-802	0	0	0	0	**1 394**
Суммарные задолженности предприятий	**4 091**	**-4 754**	**-3 385**	**3 561**	**1 881**	**-1 394**	**0**

На основании данной матрицы строится следующий размеченный граф.

Размеченный граф с численными значениями разметок (в тыс. рублей).



Список литературы

1. Абалкин Л. Неплатежи: «зри в корень» // Экономика и жизнь. 1998 № 42.
2. Аналитическое агентство «Интер-Рейт» Искусство выжить без денег // Экономика и жизнь. 1998 № 42.
3. Белолипецкий В. Платежный кризис: природа, последствия, пути выхода // Финансы. 1996 № 11.
4. Образцов М. Клиринг и расчеты на рынке ценных бумаг Российской Федерации // Деньги и кредит. 1998 № 5.
5. Рогова О. Влияние платежно-расчетной системы на экономику // Экономист. 1998 №8.
6. Тропаревская Л. Предприятие в кризисе неплатежей // Финансы. 1995 №2.
7. Шмелев Н. Неплатежи – проблема номер один российской экономики // Вопросы экономики. 1997 № 4.

Статья опубликована в сборнике научных статей «Актуальные проблемы математического моделирования в финансово-экономической области» Финансовой академии при Правительстве РФ в 2001 г.