Опубликовано на нашем сайте: 27 февраля 2003 г.а

# Финансовый анализ эффективности инвестиций в опционы и в их комбинации

**Недосекин А.О.,** *финансовый инженер, к.т.н.*

**Компания** *Артифишел Лайф Рус (Санкт-Петербург)*

**Введение**

Рынок производных ценных бумаг обязан своим возникновением и развитием появлению интересов, непосредственно сопряженных с обладанием ценными бумагами и иными денежными активами. Агенты рынка стремятся максимизировать свою прибыль или минимизировать риск. В тот момент, когда у двух таких агентов возникают противоположные интересы или обратные рыночные предпочтения, возникает предмет специального соглашения между этими двумя агентами.

Например, инвестор, стремящийся понизить свои курсовые риски, приобретает *право продать свои бумаги в будущем по фиксированной цене(put опцион)*. Подспудно такой инвестор закладывается на возможность падения цен (страхуется, *хеджируется*). При этом говорится, что инвестор занял *длинную позицию*. Наоборот, агент, уступающий опцион, рассчитывает на то, что цена не упадет ниже определенного критического уровня. Он полагает, что в процессе исполнения контракта покупатель опциона просто потеряет деньги, а он, наоборот, наживется. Говорят, что, уступая опцион, продавец встает в *короткую позицию* по этой бумаге.

Есть и еще вариант: этот агент дополнительно приобретает put опцион («*покрывается»)* с большей ценой исполнения (*страйком*). Тогда, при значительном падении курсовой цены, агент-продавец извлечет доход в виде «*спрэда медведя*» (курсовой разницы между страйками двух опционов). Но, разумеется, если падения курсов не происходит, в этом случае оба агента проигрываают.

Или еще пример. Некий агент приобретает *право приобрести бумаги по фиксированной цене в будущем (call опцион).* Такой агент рассчитывает на то, что бумага вырастет значительно выше страйка call опциона, и в доход ему попадет вся разница между курсовой ценой и страйком (за вычетом, разумеется, цены самого опциона). Другой агент, уступающий call опцион, разумеется, рассчитывает на то, что подобного курсового роста не произойдет. Если же он не вполне уверен в своем суждении, он может покрыться call опционом с меньшим страйком. Тогда, в случае существенного курсового роста агент-продавец поймает *«спрэд быка»* -

разницу между двумя страйками. В случае падения цен оба агента потеряют деньги.

Итак, возникает множество противоположных интересов, связанных с обладанием фондовыми активами (*производных интересов*). Столкновение этих интересов осуществляется на рынке. Организованным местом такого рода торговли является опционная биржа. Классическим примером биржи такого рода является CBOE – Chicago Board Options Exchange **[1].**

Существует множество источников, где рассматривается существо опционов и операций над ними. В **[2]** и **[3]** приводится приличный перечень монографий, откуда бы я выделил **[4]** как хороший учебник, на содержимое которого я буду ссыдаться далее по ходу изложения.

Что сегодня известно об эффективности вложений в опционы? Многое. Хорошо известна классическая формула оценки справедливой цены опциона, предложенная нобелевскими лауреатами Блэком и Шоулзом **[5],** она повсеместно используется в опционных калькуляторах. Отдельно отмечу пару работ, посвященных управлению риском вложений в опционы и в портфели на опционах **[6,7]**.

Из анализа библиографии возникает странное чувство, что все задачи в области анализа эффективности использования опционов, что ставятся и решаются исследователями, - ***обратные*** по отношению к ***прямой***, которая не ставится и не решается. Чем это можно объяснить? Вероятно, сильным воздействием на развитие теории результата, полученного Блэком и Шоулзом. Все прочие изыскания как бы идут в фарватере этого результата, он доминирует над ходом научной мысли в этой области знаний.

Что я понимаю под прямой и обратной задачами? Рассмотрим на примере.

Берем любой опционный онлайн-калькулятор, к примеру, **[8]**. Известны: исходная цена бумаги, дивидендный доход в процентах, безрисковая процентная ставка, страйк, срок опционного контракта или срок до его исполнения. Далее есть варианты расчета. Если известна волатильность подлежащего актива, можно посчитать теоретическую цену опциона, и наоборот, если известна фактическая цена опциона, можно оценить соответствующую волатильность актива. Среди исходных данных мы не найдем расчетную доходность актива, потому что, согласно результатов Блэка и Шоулза, теоретическая цена опциона не зависит от расчетной доходности подлежащего актива. Также все известные опционные калькуляторы позволяют оценить значения производных параметров, называемых в финансовой теории опционов *греческими буквами*. Существо этих параметров объясняется в **[4]** и непосредственно в **[8].**

Итак, мы можем оценить, насколько сильно теоретическая цена опциона отличается от фактической и тем самым сделать косвенную оценку эффективности использования опционов. Превосходно. Но может ли такая оценка быть количественной? Что, если я приобретаю не один опцион, а выстраиваю опционную комбинацию? Каков инвестиционный эффект от покрытия опционом подлежащего актива?

Чиобы ответить на перечисленные вопросы, нужно как бы отстраниться от всего достигнутого в опционной теории и посмотреть на проблему ***совсем с другой стороны*** – а именно так, так, как на нее смотрит классический инвестор. А он задается простым вопросом:

- *если я покупаю по **известной** цене один опцион или некоторую опционную комбинацию, на какой эффект с точки зрения доходности и риска своих вложений я могу рассчитывать?*

Вот именно эту-то задачу я и называю **прямой**. И тогда, если я разработал метод оценки доходности и риска вложений в опционы, я смогу дать ответ на поставленный вопрос и на все остальные, с ним связанные. Умея рассчитывать доходность и риск одного или группы опционов, я смогу перейти к оценке того же для опционных портфелей. Собственно, этому-то и посвящена настоящая работа.

## 1. Формальная постановка задачи и модельные допущения

Введем следующие обозначения, которые будем употреблять в дальнейшем:

*Входные данные (дано):*

T – расчетное время (срок жизни портфеля или время до исполнения опционного контракта);
$S_0$ – стартовая цена подлежащего опционам актива;
$z_c$ – цена приобретения опциона call;
$z_p$ – цена приобретения опциона put;
$x_c$ - цена исполнения опциона call;
$x_p$ - цена исполнения опциона put;
$S_T$ – финальная цена подлежащего опционам актива в момент T (случайная величина);
$r_T$ – текущая доходность подлежащего актива, измеренная в момент времени T по отношению к стартовому моменту времени 0 (случайная величина);
$\overline{r_T}$ - среднеожидаемая доходность подлежащего актива;
$\sigma_r$ – среднеквадратическое отклонение (СКО) доходности подлежащего актива;

*Выходные данные (найти):*

$I_T$ – доход (убыток) по опциону (комбинации), случайная величина;
$R_T$ – текущая доходность опциона (комбинации), измеренная в момент времени T по отношению к стартовому моменту времени 0 (случайная величина);
$\overline{R_T}$ - среднеожидаемая доходность опциона (комбинации);

$\sigma_R$ – СКО доходности опциона (комбинации);
$Q_T$ – риск опциона (комбинации).

Далее по тексту работы все введенные обозначения будут комментироваться в ходе их использования.

Также мы дополнительно оговариваем следующее:

1. Мы не рассматриваем возможность дивидендных выплат (чтобы не усложнять модель).
2. Здесь и далее мы будем моделировать опционы только *американского типа*, т.е. такие, которые могут быть исполнены в любой момент времени на протяжении всего срока действия опциона. Это необходимо, чтобы не требовать синхронизации срока жизни портфеля на подлежащих опционам активах и сроков соответствующих опционных контрактов.

Еще один важный момент. Общепринятым модельным допущением к процессу ценового поведения акций является то, что процесс изменения котировки является винеровским случайным процессом **[4,5]**, и формула Блэка-Шоулза тоже берет это предположение за исходное. Все, что я думаю по поводу применения вероятностных моделей к анализу ценового поведения акций, я подробно изложил в **[9].** В этом же смысле высказывается и автор работы **[10].** Существуют определенные ограничения на использование вероятностей в экономической статистике. Но, поскольку этот инструмент учета неопределенности является традиционным и общеупотребительным, я хочу оформить свои результаты в вероятностной постановке, при простейших модельных допущениях с использованием аппарата статистических вероятностей.
А затем, по мере накопления опыта моделирования, мы будем усложнять модельные допущения и одновременно переходить от статистических вероятностей к вероятностным распределениям с нечеткими параметрами, используя при этом результаты теории нечетких множеств, по образцу того, как это делается в **[9].**

Но это дело будущего, а сейчас посмотрим на винеровский ценовой процесс с постоянными параметрами $\mu$ (коэффициент сноса, по смыслу – предельная курсовая доходность) и $\sigma$ (коэффикциент диффузии, по смыслу – стандартное уклонение от среднего значения предельной доходности). Аналитическое описание винеровского процесса **[4,11]:**

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma z(t), \qquad (1)$$

где z(t) – *стандартный винеровский процесс* (броуновское движение, случайное блуждание) с коэффициентом сноса 0 и коэффициентом диффузии 1.

Если принять, что начальное состояние процесса известно и равно $S_0$, то мы можем, исходя из (1), построить вероятностное распределение цены $S_T$ в момент T.

Эта величина, согласно свойств винеровского процесса как процесса с независимыми приращениями, имеет *нормальное распределение* со следующими параметрами:

- среднее значение:

$$s_T = S_0 e^{\mu T}; \tag{2}$$

- среднеквадратичное отклонение (СКО) величины $\ln S_T/S_0$:

$$\sigma_S = \sigma T. \tag{3}$$

В принципе, для моих последующих построений вид вероятностного распределения цены подлежащего актива несущественен. Но здесь и далее, для определенности, мы остановимся на нормальном распределении. Его плотность обозначим как

$$\varphi_S(x) = \frac{d\Pr(S \le x)}{dx}. \tag{4}$$

Примерный вид плотности нормального распределения вида (4) представлен на рис. 1.

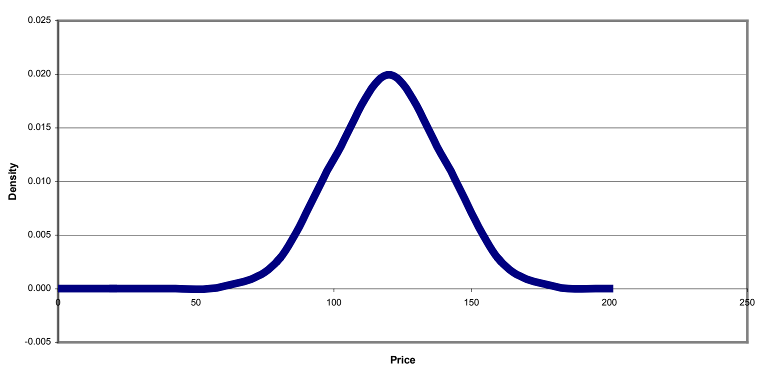


**Рис. 1**

Теперь, сделав все базовые допущения к математической модели, мы можем переходить непосредственно к процессу вероятностного моделирования опционов и их комбинаций.

## 2. Вероятностная модель опциона call

Приобретая опцион call, инвестор рассчитывает получить премию как разницу между финальной ценой подлежащего актива $S_T$ и ценой исполнения опциона $x_c$. Если эта разница перекрывает цену приобретения опциона $z_c$, то владелец опциона получает прибыль. В противном случае имеют место убытки.

Случайная величина дохода по опциону связана со случайной величиной финальной цены подлежащего актива соотношением **[4]**

$$I_T = \max(S_T - x_c, 0) - z_c. \qquad (5)$$

В правой части (5) все параметры являются известными и постоянными величинами, за исключением $S_T$, которая является случайной величиной с плотностью распределения (4).

А текущую доходность по опциону call мы определим формулой

$$R_T = \frac{I_T}{z_c \times T}. \qquad (6)$$

*Замечание*. Представление (2), когда стартовая и финальная цены актива связаны экспоненциальным множителем, является неудобным для моделирования. Аналогичные неудобства вызывает представление доходности на основе степенной зависимости. Именно поэтому мы оперируем категорией *текущей* доходности как линейной функции дохода и финальной цены. Предполагая нормальность распределения финальной цены актива (что соответствует винеровскому описанию ценового процесса), мы автоматически таким образом приходим к нормальному распределению текущей доходности. Построенная линейная связь текущей доходности и цены является полезной особенностью, которая потом может быть удачно использована в ходе вероятностного моделирования.

Определим плотность $\varphi_I(y)$ распределения дохода $I_T$ по опциону как функции случайной величины $S_T$. Воспользуемся известной формулой. Если исходная случайная величина X имеет плотность распределения $\varphi_X(x)$, а случайная величина Y связана с X функционально как Y=Y(X), и при этом существует обратная функция X=X(Y), тогда плотность распределения случайной величины Y имеет вид **[11]**

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(X(y)) \times \left| \frac{dX}{dY} \right|_{Y=y}. \qquad (7)$$

В нашем случае, исходя из (5),

$$S_T = \begin{cases} \text{не определена}, I_T < -z_c \\ \text{многозначна}, I_T = -z_c \\ I_T + x_c + z_c, I_T > -z_c \end{cases}, \qquad (8)$$

$$dS_T/dI_T = 1,\ I_T > -z_c. \qquad (9)$$

Мы видим, что в точке $I_T = -z_c$ плотность $\varphi_I(y)$ приобретает вид дельта-функции. Необходимо определить множитель при дельта-функции. Это можно сделать косвенным образом. На участке, где функция $S_T(I_T)$ дифференцируема, в силу (7)-(9) выполняется

$$\varphi_I(y) = \varphi_S(y + x_c + z_c),\ I_T > -z_c. \qquad (10)$$

В силу нормирующего условия справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_I(y)dy = \int_{-\infty}^{-z_c+0} \varphi_I(y)dy + \int_{-z_c+0}^{\infty} \varphi_I(y)dy = 1, \qquad (11)$$

откуда, в силу (10), искомый множитель K есть

$$\begin{aligned} K &= \int_{-\infty}^{-z_c+0} \varphi_I(y)dy = 1 - \int_{-z_c+0}^{\infty} \varphi_S(y + x_c + z_c)dy \\ &= 1 - \int_{+0}^{\infty} \varphi_S(t + x_c)dt = 1 - \int_{x_c}^{\infty} \varphi_S(v)dv = \int_{-\infty}^{x_c} \varphi_S(v)dv \end{aligned} \qquad (12)$$

Множитель K есть, таким образом, не что иное как вероятность события $S_T < x_c$. При наступлении такого события говорят, что опцион call оказался *не в деньгах*. Это событие – условие отказа от исполнения call-опциона и прямые убытки в форме затрат на приобретение опциона.

Наконец, итоговое выражение для $\varphi_I(y)$

$$\varphi_I(y) = \begin{cases} 0, y < -z_c \\ K \times \delta(y + z_c), y = -z_c \\ \varphi_S(y + x_c + z_c), y > -z_c \end{cases}, \qquad (13)$$

где

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \qquad (14)$$

На рис. 2 представлен примерный вид плотности вида (13).

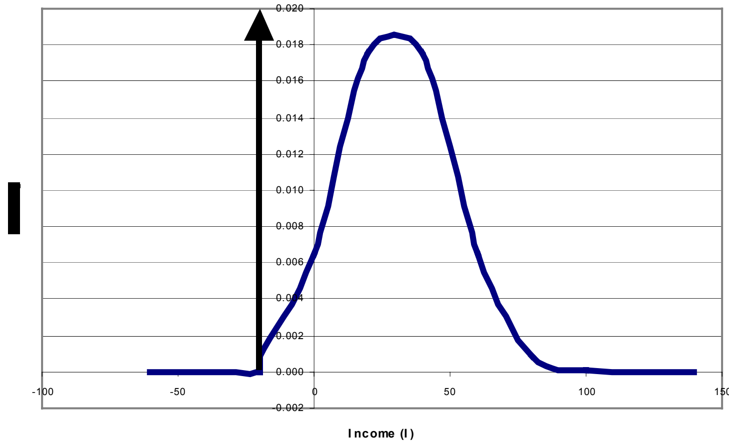


**Рис. 2**

Видно, что мы перешли от нормального распределения цен к усеченному нормальному распределению доходов. Но это не классическое усеченное распределение, а распределение, функция которого претерпевает разрыв первого рода в точке с бесконечной плотностью.

Теперь нетрудно перейти к распределению доходности $\varphi_R(v)$, пользуясь (6), (7) и (13):

$$\varphi_R(v) = \begin{cases} 0, \ v < -1/T \\ K \times \delta(v + \frac{1}{T}), \ v = -1/T \\ z_c T\, \varphi_S(v \times z_c \times T + x_c + z_c), \ v > -1/T \end{cases} . \qquad (15)$$

Плотности вида (13) и (15) – **бимодальные** функции.

Теперь оценим риск инвестиций в call опцион. Очень подробно виды опционных рисков изложены в [**12**]. В литературе по инвестициям в ценные бумаги очень часто под риском вложений в бумагу понимается ее *волатильность* (колеблемость относительно среднего значения). Имеется мнение, с которым я солидарен, что волатильность не может отражать инвестиционного риска в силу того, что болезненность убытков для инвестора несопоставима с удовлетворенностью прибылью. Поэтому отклонения котировок от ожидаемых значений в большую и в меньшую сторону неравноценны.

Обзор состояния теории оценки финансовых рисков представлен в **[13].**

Мне думается, что правильное понимание риска инвестиций сопряжено с категорией *неприемлемой доходности*, когда она по результатам финальной оценки оказывается ниже предельного значения, например, уровня инфляции в 4% годовых для нынешних условий США. Это значение близко к текущей доходности государственных облигаций, и тогда ясно, что обладая сопоставимой с облигациями доходностью, опционный инструмент значительно опережает последние по уровню риска прямых убытков (отрицательной доходности).

Поэтому риск инвестиций в опцион call может быть определен как *вероятность неприемлемой доходности* по формуле

$$Q_T = \int_{-\infty}^{4\%=0.04} \varphi_R(v)dv, \tag{16}$$

где $\varphi_R(v)$ определяется по (15).

Среднеожидаемая доходность вложений в опцион определяется стандартно, как первый начальный момент распределения:

$$\overline{R}_T = \int_{-\infty}^{\infty} v\varphi_R(v)dv. \tag{17}$$

Среднеквадратическое отклонение доходности call опциона от среднего значения также определяется стандартно, как второй центральный момент распределения

$$\sigma_T = \int_{-\infty}^{\infty} (v - \overline{R}_T)^2 \varphi_R(v)dv. \tag{18}$$

Рассмотрим важные асимптотические следствия полученных вероятностных форм. Для этого установим связь между доходностями call опциона и подлежащего актива, с учетом (5) и (6):

$$\begin{aligned} R_T &= \max(\frac{S_T - x_c}{z_c T}, 0) - \frac{1}{T} = \max(\frac{S_0(1 + r_T T) - x_c - z_c}{z_c T}, -\frac{1}{T}) = \\ &= \begin{cases} \alpha, S_T < x_c \text{ - опцион не в деньгах,} \\ \beta + \gamma r_T, S_T \geq x_c \text{ - опцион в деньгах} \end{cases}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{T}, \beta = \frac{S_0 - x_c - z_c}{z_c T}, \gamma = \frac{S_0}{z_c}. \tag{20}$$

Видим, что доходность опциона call и подлежащего актива связаны кусочно-линейным соотношением, причем на участке прямой пропорциональности это происходит с коэффициентом γ, который собственно, и характеризует фактор финансового рычага *(левериджа).* Участок прямой пропорциональности соответствует той ситуации, когда опцион оказывается в деньгах. Поэтому, с приближением вероятности K вида (12) к нулю, выполняются следующие соотношения

$$\lim_{K\to 0}\overline{R_T} = \beta + \gamma\overline{r_T},$$
$$\lim_{K\to 0}\sigma_R = \gamma\sigma_r \qquad (21)$$

То есть между соответствующими параметрами подлежащего актива на участке, когда опцион оказывается в деньгах, возникает линейная связь посредством левериджа. С ростом среднеожидаемой доходности актива растет и средняя доходность call опциона, а с ростом волатильности актива растет также и волатильность опциона.

Итак, мы получили вероятностные формы для описания доходности и риска по вложениям в опцион call. Действуя аналогичным образом, мы можем получать подобные формы для опционов другой природы, а также для их комбинаций друг с другом и с подлежащими активами.

## 3. Вероятностная модель опциона put

Приобретая опцион put, инвестор рассчитывает получить премию как разницу между ценой исполнения опциона $x_p$ и финальной ценой подлежащего актива $S_T$. Если эта разница перекрывает цену приобретения опциона $z_p$, то владелец опциона получает прибыль. В противном случае имеют место убытки.

Надо сказать, что приобретение опциона put без покрытия подлежащим активом не является традиционной стратегий. Классический инвестор все же психологически ориентируется на курсовой рост приобретаемых активов. С этой точки зрения стратегия классического инвестора – это стратегия «быка». А покупка put опциона без покрытия – эта «медвежья» игра.

Обычная логика использования опциона put – это логика отсечения убытков с фиксацией нижнего предела доходности, который не зависит от того, насколько глубоко провалился по цене подлежащий актив. Но для нас не имеет значения, какой стратегии придерживается инвестор. Мы понимаем, что опцион put является потенциальным средством извлечения доходов, и нам эту доходность хотелось бы вероятностно описать.

Проведем рассуждения по аналогии с предыдущим разделом работы. Случайная величина дохода по опциону связана со случайной величиной финальной цены подлежащего актива соотношением **[4]**

$$I_T = \max(x_p - S_T, 0) - z_p. \qquad (22)$$

А текущая доходность по опциону put определяется формулой

$$R_T = \frac{I_T}{z_p \times T}. \qquad (23)$$

Используем все соображения о получении плотностей распределения, выработанные в предыдущем разделе работы.

В нашем случае, исходя из (22)

$$S_T = \begin{cases} \text{не определена}, I_T < -z_p \\ \text{многозначна}, I_T = -z_p \\ x_p - I_T - z_p, -z_p < I_T < x_p - z_p \\ \text{не определена}, I_T > x_p - z_p \end{cases}, \qquad (24)$$

$$|dS_T/dI_T| = 1,\ I_T > -z_p. \qquad (25)$$

Интересно отметить, что в случае опциона call цена подлежащего актива и доход по опциону связаны возрастающей зависимостью, а в нашем случае - **убывающей**. То есть чем хуже чувствует себя актив, тем лучше держателю непокрытого опциона (если, конечно, инвестор заодно не владеет и самим подлежащим активом).

Множитель K при дельта-функции в точке $I_T = -z_p$ есть

$$K = \int_{x_p}^{\infty} \varphi_S(v)dv - \qquad (26)$$

вероятность события $S_T > x_p$. Опцион оказывается не в деньгах, что есть условие отказа от исполнения put опциона и прямые убытки в форме затрат на приобретение этого опциона.

Итоговое выражение для плотности распределения $\varphi_I(y)$ случайной величины дохода по опциону put имеет вид

$$\varphi_I(y) = \begin{cases} 0, y < -z_p \\ K \times \delta(-y - z_p), y = -z_p \\ \varphi_S(x_p - y - z_p), -z_p < y < x_p - z_p \\ 0, y \ge x_p - z_p \end{cases}. \qquad (27)$$

Плотность вида (27) – это усеченный с двух сторон нормальный закон плюс дельта-функция на границе усечения. С этой точки зрения качественный вид зависимости (27) повторяет вид того же для опциона call в силу симметрии нормального распределения. При произвольном распределении финальной цены результаты были бы другими.

Теперь нетрудно перейти к распределению доходности $\varphi_R(v)$, пользуясь (22), (23) и (27):

$$\varphi_R(v) = \begin{cases} 0, v < -1/T \\ K \times \delta(-v - \frac{1}{T}), v = -1/T \\ z_p T\, \varphi_S(-v \times z_p \times T + x_p - z_p), -1/T < v < \frac{x_p - z_p}{z_p T}. \\ 0, v \ge \frac{x_p - z_p}{z_p T} \end{cases} \tag{28}$$

Разумеется, отмечаем бимодальность (27) и (28).

Поэтому риск инвестиций в опцион put может быть определен по формуле

$$Q_T = \int_{-\infty}^{4\%=0.04} \varphi_R(v)dv = K + F_R(0.04) - F_R(-\frac{1}{T}), \tag{29}$$

где

$$F_R(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_R(v)dv, \tag{30}$$

а $\varphi_R(v)$ определяется по (28).

Среднеожидаемая доходность вложений в опцион и СКО определяются по (17) и (18) соответственно.

Рассмотрим асимптотические следствия по аналогии с call опционом. Для этого установим связь между доходностями put опциона и подлежащего актива, с учетом (22) и (23):

$$R_T = \max(\frac{x_p - S_T}{z_p T}, 0) - \frac{1}{T} = \max(\frac{x_p - S_0(1 + r_T T) - z_p}{z_p T}, -\frac{1}{T}) = \\ = \begin{cases} \alpha, S_T > x_p \text{ - опцион не в деньгах,} \\ \beta + \gamma r_T, S_T \le x_p \text{ - опцион в деньгах} \end{cases}, \tag{31}$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{T}, \beta = \frac{x_p - S_0 - z_p}{z_p T}, \gamma = -\frac{S_0}{z_p}. \qquad (32)$$

Видим, что доходность опциона put и подлежащего актива связаны кусочно-линейным соотношением, причем на участке прямой пропорциональности это происходит с коэффициентом γ, который собственно, и характеризует фактор финансового рычага *(левериджа).* Участок прямой пропорциональности соответствует той ситуации, когда опцион оказывается в деньгах. Поэтому, с приближением вероятности K вида (26) к нулю, выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} &\lim_{K \to 0} \overline{R_T} = \beta + \gamma \overline{r_T}, \\ &\lim_{K \to 0} \sigma_R = \gamma \sigma_R \end{aligned} \qquad (33)$$

То есть между соответствующими параметрами подлежащего актива на участке, когда опцион оказывается в деньгах, возникает линейная связь посредством левериджа. С ростом средней доходности актива средняя доходность put опциона *падает*, а с ростом волатильности актива волатильность опциона также растет.

## 4. Расчетные примеры оценки доходности и риска опционов

***Пример 1 (call)***

В начале года инвестор приобретает за $z_c = 10$ ед. цены опцион call на подлежащий актив со стартовой ценой $S_0 = 100$ ед. Цена исполнения опциона $x_c = 100$ ед., опцион американский, срочностью 1 год. Поскольку цена исполнения совпадает со стартовой ценой, то покупаемый опцион является опционом в деньгах.

Инвестор ориентируется на следующие параметры доходности и риска подлежащего актива: текущая доходность r = 30% годовых, СКО случайной величины текущей доходности $\sigma_r = 20\%$ годовых. В пересчете на финальную цену $S_T$ это означает, что через время T = 0.5 лет подлежащий актив будет иметь нормальное распределение $S_T$ с параметрами $s_T = 115$ ед. и $\sigma_S = 10$ ед.

Требуется определить доходность и риск опциона в момент времени T = 0.5 года.

***Решение***

Все полученные соотношения реализованы в компьютерной программе. Расчет по формулам (16) - (18) дает $Q_T = 0.335$, $\overline{R}_T = 105.8\%$ годовых и $\sigma_S = 188.5\%$ годовых. Одновременно отметим: поскольку вероятность того, что опцион не в деньгах, мала (0.066), то полученные значения моментов близки к своим асимптотическим приближениям (21) $\overline{R}_T = 100\%$ и $\sigma_S = 200\%$ годовых соответственно.

Результаты наглядно показывают то, что опцион – это одновременно высокорисковый и высокодоходный инструмент. Высокая доходность достигается за счет левериджа: не вкладывая деньги в подлежащий актив, инвестор тем не менее получит по нему возможный доход и не будет участвовать в убытках. Другое дело, что обычно инвестор балансирует на грани прибылей и убытков, ибо все ищут выигрыша, и никто не станет работать себе в убыток. Поэтому для call-опционов *в деньгах* **разница между среднеожидаемой ценой подлежащего актива и ценой приобретения опциона обычно колеблется вокруг цены исполнения**. Это означает, что вложения в непокрытые опционы с точки зрения риска сопоставимы с игрой в орлянку. Для put опциона в деньгах сопоставимыми являются цена исполнения, с одной стороны, и сумма цены опциона и ожидаемой цены подлежащего актива – с другой стороны.

***Пример 2 (call)***

Исследуем рынок полугодовых call-опционов компании IBM. Это можно сделать, воспользовавшись материалами по текущим котировкам опционов на сервере MSN **[14].**

Дата исполнения этих опционов – 20 апреля 2001 года.
Исследуем вопрос, какие из обращающихся на рынке call-опционы нам предпочтительнее покупать. Для этого нам нужно задаться прогнозными параметрами распределения доходности подлежащего актива, близкими к реальным. Это будет как бы тот ранжир, которым будут вымеряться опционы выделенной группы.

Взглянем на вектор исторических данных IBM за прошедший квартал (рис.3). Процесс существенно нестационарен, поэтому стандартной линейной регрессией пользоваться нельзя. Глядя на график, зададимся умеренной оценкой доходности порядка 30% годовых и СКО доходности в 30% годовых. Эти параметры и примем за базовые.

Стартовая цена подлежащего актива на дату покупки опциона – 114.25$ (по состоянию на 10 октября 2000 года) . Соответственно, через полгода мы должны иметь финальное распределение цены подлежащего актива с параметрами: среднеее – 131$, СКО – 17$.


**Рис. 3** *Ссылка: **[14]***

В таблицу 1 сведены значения доходностей и рисков по каждой группе опционов.

Таблица 1

| **#** | **Symbol** | **Strike price,$** | **Option Price,$** | **Risk** | **Return, sh/ y** | **Ret/Risk** | **Rank** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | IBMDP | 80 | 35.0 | 0.215 | 0.933 | 4.3 | **2** |
| 2 | IBMDQ | 85 | 37.6 | 0.363 | 0.468 | 1.3 | |
| 3 | IBMDR | 90 | 29.2 | 0.279 | 0.822 | 3.0 | 3 |
| 4 | IBMDS | 95 | 22.8 | 0.244 | 1.059 | 4.5 | **1** |
| 5 | IBMDT | 100 | 21.5 | 0.314 | 0.817 | 2.6 | 4 |
| 6 | IBMDA | 105 | 18.9 | 0.361 | 0.658 | 1.8 | |
| 7 | IBMDB | 110 | 17.3 | 0.435 | 0.393 | 0.9 | |
| 8 | IBMDC | 115 | 13.5 | 0.456 | 0.246 | 0.5 | |

Из таблицы 1 видно, что безусловными фаворитами являются опционы №№ 1 и 4. Все прочие опционы обладают несопоставимыми характеристиками, они явно *переоценены*.

***Пример 3 (put)***

Проведем аналогичное исследование put опционов в соответствии с данными примера 2. Результаты расчетов сведены в таблицу 2.

Таблица 2

| # | Symbol | Strike price,$ | Option Price,$ | Risk | Return, sh/ y |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | IBMPF | 130 | 22.3 | 0.93 | -0.381 |
| 2 | IBMPG | 135 | 26.9 | 0.929 | -0.512 |
| 3 | IBMPH | 140 | 32.2 | 0.934 | -0.638 |
| 4 | IBMPI | 145 | 24.1 | 0.763 | -0.273 |
| 5 | IBMPJ | 150 | 27.5 | 0.738 | -0.281 |
| 6 | IBMPK | 155 | 34.6 | 0.785 | -0.428 |
| 7 | IBMPL | 160 | 48.1 | 0.91 | -0.701 |

Видно, что при наших инвестиционных ожиданиях put опционы являются совершенно непригодными для инвестирования инструментами. Видимо, рынок ждет глубокого падения акций IBM и, соответственно, запрашивает высокие опционные премии за риск.

*Замечание*. Во время подготовки этой работы произошел ближневосточный кризис, и большинство акций упали в цене. Так что оценка рынка трейдерами была обоснованной.

***Пример 4 (put)***

Решим обратную задачу: каких параметров акций IBM через полгода ждет рынок,чтобы инвестирование в put опционы представлялось этому рынку справедливым делом с точки зрения критериев доходности и риска. Возьмем для рассмотрения опцион IBMPC ценой 13.1$ и ценой исполнения 115$ и будем варьировать величинами ожидаемой доходности и риска подлежащего актива. Результаты расчетов сведены в таблицу 3.

Таблица 3

| # | IBM STD, sh/y | IBM return, sh/y | Option risk | Option return, sh/ y |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | -0.1 | 0.908 | -0.957 |
| 2 | | -0.2 | 0.630 | -0.136 |
| 3 | | **-0.3** | **0.252** | **0.730** |
| 4 | 0.2 | -0.1 | 0.747 | -0.711 |
| 5 | | -0.2 | 0.566 | -0.053 |
| 6 | | **-0.3** | **0.369** | **0.632** |
| 7 | 0.3 | -0.1 | 0.671 | -0.528 |
| 8 | | -0.2 | 0.544 | -0.064 |
| 9 | | **-0.3** | **0.412** | **0.375** |

Видно, что **рынок настроен на тактическое снижение цены подлежащего актива** в темпе порядка (-30%) годовых. Только в этом диапазоне мы имеем приемлемые риски и высокие степени доходности инвестиций в опционы – такие, чтобы упомянутый риск оправдать.

Замечание. Так и вышло – пока писалась данная работа, рынок IBM «прогнулся» на 25% за октябрь 2000 года **[14].**

## 5. Вероятностная модель сборки «опцион put + подлежащий актив»

Мы подошли к тому пункту, когда в рассмотрение берутся уже не отдельные опционы, а **портфели,** содержащие как ряд опционов (*опционные комбинации*), так и подлежащие активы наряду с опционами (*сборки*).

Назовем *сборкой* портфельную комбинацию из подлежащего актива и put опциона на этот актив. Как мы уже указывали, докупка put опциона по справедливой цене деформирует исходное ценовое распределение подлежащего актива, устанавливая нижнюю границу доходности сборки, по обыкновению, в области отрицательных значений.

Специфика момента состоит в том, что инвестор, докупая put опцион к подлежащему активу, тем самым снижает доходность своих вложений в случае достижения положительных значений доходности подлежащего актива, но при этом отсекает убытки. В результате использование put опционов позволяет снизить волатильность вложений. А снижение волатильности дает сборке возможность поучаствовать в формировании эффективной границы портфельного облака.

Однако эффект от внедрения опционов может быть самым различным, в том числе и противоположным ожидаемому. Поэтому надо исследовать вероятностную природу сборки и строить соответствующие аналитические формы.

Нетрудно заметить, что случайная величина дохода по сборке связана со случайной величиной финальной цены подлежащего актива соотношением

$$I_T = \max(x_p, S_T) - z_p - S_0. \tag{34}$$

В соотношении (34) вычитаемые – это прямые затраты на приобретение сборки, а то, откуда идет вычитание, - это предельная финальная цена сборки, которая в случае попадания опциона «в деньги» равна цене его исполнения.

Текущая доходность по сборке определяется обычным образом

$$R_T = \frac{I_T}{(S_0 + z_p) \times T}. \tag{35}$$

Найдем функцию, обратную к (34). Это

$$S_T = \begin{cases} \text{не определена}, I_T < x_p - S_0 - z_p \\ \text{многозначна}, I_T = x_p - S_0 - z_p \\ S_0 + I_T + z_p, I_T > x_p - S_0 - z_p \end{cases}, \tag{36}$$

$$|dS_T/dI_T| = 1,\ I_T > x_p - S_0 - z_p. \tag{37}$$

Множитель K при дельта-функции в точке $I_T = x_p - S_0 - z_p$ есть

$$K = \int_{-\infty}^{x_p} \varphi_S(v)dv - \tag{38}$$

вероятность события $S_T < x_p$, когда опцион оказывается в деньгах, и его применяют, чтобы отсечь убытки.

Итоговое выражение для плотности распределения $\varphi_I(y)$ случайной величины дохода по сборке имеет вид

$$\varphi_I(y) = \begin{cases} 0, y < x_p - S_0 - z_p \\ K \times \delta(0), y = x_p - S_0 - z_p \\ \varphi_S(S_0 + y + z_p), y > x_p - S_0 - z_p \end{cases}. \tag{39}$$

Распределение доходности $\varphi_R(v)$

$$\varphi_R(v) = \begin{cases} 0, v < v_0 \\ K \times \delta(0), v = v_0 \\ (S_0 + z_p)T\, \varphi_S(v\,(S_0 + z_p)T + S_0 + z_p), v > v_0 \end{cases}. \tag{40}$$

где

$$v_0 = \frac{x_p - S_0 - z_p}{(S_0 + z_p) \times T} \quad - \tag{41}$$

граничный нижний уровень доходности сборки «put + актив», который известен заранее при ее покупке.

Риск инвестиций в сборку может быть определен по формуле

$$Q_T = \int_{-\infty}^{4\%=0.04} \varphi_R(v)dv = F_R(0.04) - F_R(v_0), \tag{42}$$

где

$$F_R(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_R(v)dv\,, \tag{43}$$

а $\varphi_R(v)$ определяется по (34) - (35).

Среднеожидаемая доходность вложений в опцион и СКО определяются по (17) и (18) соответственно.

## 6. Расчетные примеры оценки доходности и риска сборки «put+актив»

***Пример 5 (сборка)***

Вернемся к данным примеров 3-4 и исследуем предельный нижний уровень доходности сборки с put опционами. Результаты расчетов сведены в таблицу 4.

Таблица 4

| # | Symbol | Strike price,$ | Option Price,$ | Lowest return rate, sh/y |
|---|---|---|---|---|
| 1 | IBMPC | 115 | 13.1 | -0.195 |
| 2 | IBMPD | 120 | 16.2 | -0.160 |
| 3 | IBMPE | 125 | 18.2 | -0.113 |
| 4 | IBMPF | 130 | 22.3 | -0.095 |
| 5 | IBMPG | 135 | 26.9 | -0.086 |
| 6 | IBMPH | 140 | 32.2 | -0.087 |

Видно, что с ростом цены исполнения, вообще говоря, растет и нижний предел доходности, если цены опционов близки к справедливым. Правда, по показателю предела доходности нельзя ничего сказать о том, как поведет себя среднеожидаемая доходность сборки, и что происходит с дисперсией.

***Пример 6 (сборка)***

Исследуем вероятностное поведение сборки с опционом IBMPC с ценой исполнения 115$ и ценой опциона 13.125$. На графике рис. 4 показано соотношение доходности подлежащего актива и сборки на его основе при различных значениях средней доходности и СКО исходного распределения. Видно, что эффект от приобретения опциона возникает лишь при отрицательных значениях ожидаемой доходности, и чем выше волатильность подлежащего актива, тем быстрее по мере снижения доходности наступает выигрыш.

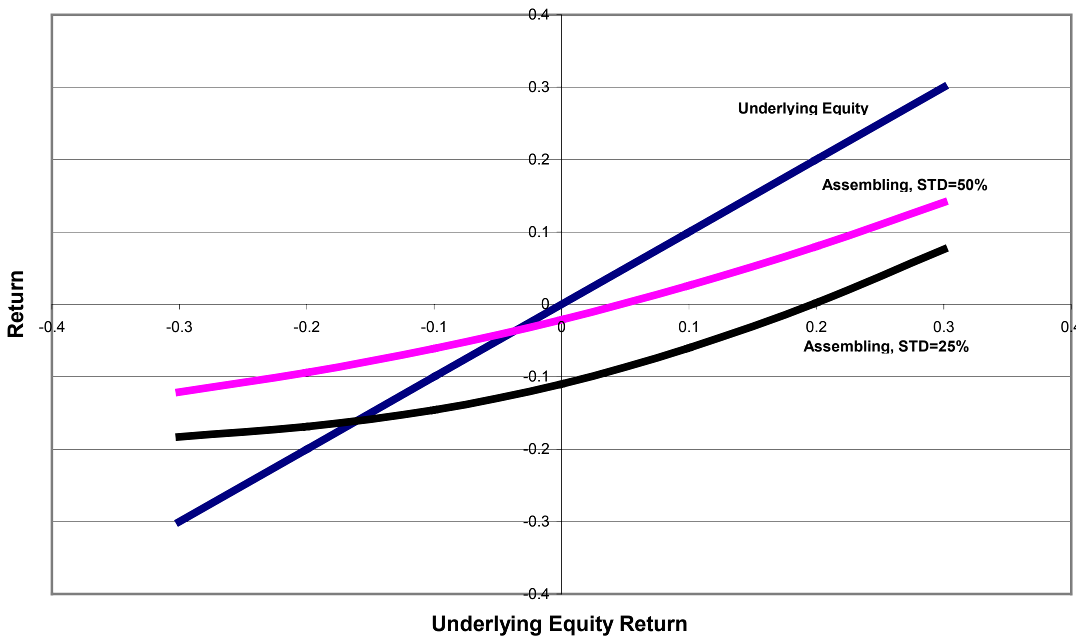


**Рис. 4**

Таким образом, put опционы никак нельзя отнести к средствам стратегического инвестирования. Скорее, это временная мера для страхования от убытков по подлежащему активу, которые инвестор не хочет нести в случае непредвиденной необходимости ликвидировать портфель. Инвестор рассчитывает подержать актив в портфеле, переживая трудные времена – и при этом не допускать непредвиденных потерь. Таким образом, put опцион является еще и средством повышения *ликвидности* фондового портфеля.

## 7. Вероятностные модели комбинаций опционов

Набив руку на моделировании отдельных опционов, переходим к моделированию опционных комбинаций. Выбор той или иной комбинации зависит, в первую очередь, от ожиданий инвестора относительно подлежащего актива, а, во вторых, от инвестиционных предпочтений означенного инвестора. Посмотрим, как осуществляется выбор опционной стратегии на сайте [**15**].

Опционный гид [**15**] представляет собой опросник вида таблицы 5.

Таблица 5

| **Первый вопрос** | **Варианты ответа на вопрос 1** | **Второй вопрос** | **Рекомендуемая комбинация в зависимости от ответа на вопрос 2** |
|---|---|---|---|
| Каков Ваш взгляд на интересующий актив или индекс? | 1. «Бычий»: ожидаемый рост цены | Весьма «бычий» | Buy call |
| | | Умеренно «бычий» + **строгая** уверенность в том, что падения не будет | Sell put |
| | | Умеренно «бычий» + **некоторая** уверенность в том, что падения не будет | Bull spread |
| | | «Медвежий» на несколько недель и «бычий» на следующие несколько месяцев | Diagonal spread |
| | 2. «Медвежий»: ожидаемое падение цены | Весьма «медвежий» | Buy put |
| | | **Строгая** уверенность в том, что роста не будет | Sell call |
| | | Умеренно «медвежий»+ **некоторая** уверенность в том, что роста не будет | Bear spread |
| | | «Бычий»на несколько недель и «медвежий» на следующие несколько месяцев | Diagonal spread |
| | | «Медвежий» при наличии подлежащего актива в портфеле | Put hedge |
| | 3. «Нейтральный»: ожидаемое отсутствие сильных изменений | Ожидание, что цены будут колебаться в очень узком диапазоне | Sell straddle |
| | | Ожидание, что цены будут колебаться в умеренном диапазоне | Sell strangle |
| | | **Некоторая** уверенность в том, что цены не будут сильно колебаться | Long butterfly |
| | | Краткосрочная «слабость» + долгосрочное «ралли» | Calendar spread |
| | | Ожидание нейтральности + актив в портфеле | Covered call |
| | 4. «Волатильный»: ожидаемые сильные изменения цены | Цены будут весьма колеблемы | Buy straddle |
| | | **Уверенность**, что цены будут колебаться | Buy strangle |
| | | **Некоторая** уверенность в том, что цены будут колебаться | Short butterfly |

Завершая статью, мы рассмотрим пару примеров опционных стратегий из таблицы 5. При этом отметим, что комбинации buy call, buy put и put hedge (сборка) проанализированы нами выше.

### 7.1 Тип Buy straddle («стеллаж»)

«Стеллаж» - это комбинация из двух опционов (put и call), выписанных на один и тот же подлежащий актив и на одну и ту же дату исполнения.

Специфика «стеллажа» в том, что за период действия опционных контрактов один из двух опционов обязательно оказывается в деньгах, а другой - обязательно нет. Возникает возможность маневра: при хорошей разнице между курсом бумаги и ценой исполнения сначала исполнить один опцион, а затем, при изменении курсовой тенденции - по возможности, и второй. Но мы не рассматриваем эту возможность, а принимаем решение об исполнении ***одного из*** опционов в заведомо известный момент времени. Тем самым мы определяем нижнюю границу доходности комбинации - и верхнюю - риска.

Определим вероятностные характеристики этой комбинации. Согласно (5) и (22), соотношение для дохода по комбинации имеет вид **[4]**

$$I_T = \begin{cases} x_{cp} - S_T - z_p - z_c, & S_T \le x_{cp} \\ S_T - x_{cp} - z_p - z_c, & S_T \ge x_{cp} \end{cases}, \qquad (44)$$

где $x_{cp} = x_c = x_p$ - цена исполнения обоих опционов.

Функция $S_T(I_T)$, как легко видеть, на интервале $[-z_c-z_p, x_{cp}-z_c-z_p]$ является *двузначной*. Это означает, что ожидаемый курс $S_T$ распределяется по двум ветвям обратной функции с той вероятностью, с которой соответствующий данной ветви опцион оказывается в деньгах.

Указанные рассуждения приводят нас к следующему соотношению для плотности распределения доходности комбинации типа “straddle”:

$$\varphi_I(y) = \begin{cases} 0, \ y < -z_c - z_p \\ \varphi_S(y + z_c + z_p + x_{cp}) + \varphi_S(-y - z_c - z_p + x_{cp}), \\ \qquad -z_c - z_p \le y \le x_{cp} - z_c - z_p \\ \varphi_S(y + z_c + z_p + x_{cp}), \ y > x_{cp} - z_c - z_p \end{cases} \qquad (45)$$

Отсюда легко перейти к соотношению для доходности и получить выражения для интересующих нас моментов. Мы этого делать не будем. Для нас плотность величины дохода есть тот исходный показатель, на основании которого мы можем получить все остальные, он стопроцентно репрезентативен.

***Пример 7 (straddle).***

Пусть цена подлежащего актива 100$, а ожидаемые параметры: доходность – 10% годовых, СКО – 25% годовых. Приобретем комбинацию straddle на полгода со страйком 105$, т.е. совместим страйк с ожидаемой ценой актива на дату исполнения опционов. Цена put – 3$, цена call – 5$. Оценить эффективность комбинации.

***Решение***

Ожидаемая доходность комбинации – 49.3% годовых при риске 0.49. Одновременно отметим, что риски каждого из опционов по отдельности выше по значению, однако за счет отрицательной корреляции доходностей опционов риск комбинации в целом ниже.

### 7.2 **Тип Buy strangle (“удавка”)**

Это – комбинация двух опционов put и call на один подлежащий актив и одну дату исполнения, но с разными страйками. Между страйками образуется зона, когда оба опциона оказываются не в деньгах. Инвестор предполагает, что на дату исполнения цены убегут влево или вправо от межстрайковой зоны, но в ней заведомо не останутся. В частном случае, когда оба страйка совпадают по цене, мы имеем предыдущую комбинацию – стеллаж.

Соотношение для дохода по такой комбинации имеет вид **[4]**

$$I_T = \begin{cases} x_p - S_T - z_p - z_c, & 0 < S_T \le x_p \\ -z_p - z_c, & x_p \le S_T \le x_c \\ S_T - x_c - z_p - z_c, & S_T \ge x_c \end{cases}, \qquad (46)$$

где $x_c > x_p$ - цены исполнения обоих опционов.

Обозначим вероятность $K_{12}$ – того, что не в деньгах ни один из опционов. Тогда, по аналогии с уже записанным, соотношение для плотности распределения доходности комбинации

$$\varphi_I(y) = \begin{cases} 0,\ y < -z_c - z_p \\ K_{12}\delta(0),\ y = -z_c - z_p \\ \varphi_S(y + z_c + z_p + x_c) + \varphi_S(-y - z_c - z_p + x_p), \\ \qquad -z_c - z_p < y \le x_p - z_c - z_p \\ \varphi_S(y + z_c + z_p + x_c),\ y > x_p - z_c - z_p \end{cases}, \tag{47}$$

***Пример 8 (strangle).***

Для подлежащего актива на условиях примера 7 выстроим комбинацию опционов во страйками 105 и 110 долл для put и call опционов соответственно. Цены опционов – те же. Определить эффективность комбинации.

***Решение***

Ожидаемая доходность комбинации (-3)% годовых при риске 0.6. Видим, что при смещении страйка одного из опционов даже на 5 пунктов эффективность комбинации резко падает.

**Заключение**

Мы получили простейшие аналитические соотношения для опционов и комбинаций на их основе, руководствуясь обычными вероятностными схемами. Мы можем существенно расширить список комбинаций, которые поддаются аналитическому описанию, так как нашли метод построения такого рода описаний.

Безо всяких особых математических изысканий, на уровне элементарного здравого смысла видно, что если теоретическая цена опциона и не зависит от ожидаемой доходности подлежащего актива, а определяется, в частности, текущей его ценой, то сама по себе доходность вложений в опцион связана с доходностью подлежащего актива **теснейшим образом.** Ожидаемое направление рынка, как мы показали на расчетах, прямо сказывается на фактической цене опциона. Если планируется падающий рынок, подрастают цены на put опционы и тем же темпом падают цены на опционы call. Иначе и быть не может, ведь рынок опционов – это рынок ожиданий, как и рынок подлежащих активов, как и фондовый рынок в целом.

Заметим также, что в нашей модели отсутствует ставка безрискового финансирования, присутствующая в классической модели. Это обусловлено тем, что все модельные расчеты мы проводим в *номинальных* ценах. Если бы было необходимо от номинальных цен перейти к *реальным*, учтя чистую современную ценность наших инвестиций, тогда было бы необходимо скорректировать номинальные цены по завершении инвестиционного периода на *коэффициент* *дисконтирования*, который может быть привязан к безрисковой ставке доходности инвестиций в данной стране, например, в той же Америке, что собственно, и делается в модели Блэка-Шоулза.

Пафос работы в том, что на базе изложенных в ней результатов может быть построен опционный калькулятор с широкой функциональностью, который будет анализировать не только опционы, но и опционные комбинации, а также сборки опционов с подлежащими активами. Здесь есть несомненная новизна и, как мне представляется, даже товарная привлекательность.

Однако преждевременно говорить о возможности оптимизации *смешанных портфелей* – таких, которые наряду с обычными активами (акциями, паями взаимных фондов и т.п.) содержат опционы. Для этого необходимо провести некоторые дополнительные теоретические изыскания, связанные с построением результирующих распределений и ковариационной матрицы компонент смешанного портфеля. Это дело, хотелось бы надеяться, не очень отдаленного будущего.

Опять же видим существенную неоднородность ценовых случайных процессов, когда постоянные параметры процессов перестают быть таковыми. Посмотрите еще раз на рисунок 3 – разве можно «*это*» моделировать винеровскими процессами? Возьмите полный интеграл от (1) – и вы получите процесс с *экспоненциальным трендом* (2), относительно которого способом броуновского движения флуктуирует цена. *Монотонность* тренда – естественное следствие описания винеровского процесса. Когда же мы видим, что тренд «гуляет» чуть ли не синусоидально, о винеровских процессах речи быть не может.

Поэтому перед честными исследователями рынка возникает диллема: или избегать вероятностей при опционном моделировании (тогда труды нобелевских лауреатов Блэка и Шоулза пошли прахом) – или, ища компромисса, сочетать вероятностные описания с описаниями нечетко-множественными, подобно тому, как это делается в **[9].** Такой компромисс мне представляется более разумным и эффективным способом борьбы с неопределенностью, царящей на рынке ценных бумаг.

*Выражаю свою глубокую признательность сотрудникам и руководству компании «Артифишел Лайф Рус», и в особенности:*

- *кандидату физико-математических наук бизнес-лидеру Алисе Сомовой, участвовавшей в обсуждении результатов настоящей работы;*
- *кандидату физико-математических наук Олегу Балашову, сделавшему многое для популяризации опционов на фирме;*
- *бизнес-лидеру Сергею Сосновскому - за неоценимую помощь в подборе библиографии;*
- *Валентине Волковой и Елене Ильиной – за качественный перевод работы на английский язык.*

**Литература**


1. http://www.cboe.com/exchange/cboehistory.htm
2. http://www.cboe.com/education/biblio.htm
3. http://bradley.bradley.edu/~arr/bsm/bib.html
4. Hull, John C. Options, Futures and Other Derivative Securities . Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1998.
5. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Labilities // Journal of Political Economy, 81-3, 1973, pp 637-654
6. Avellaneda M., Levy A., Paras A. Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities //*Applied Mathematical Finance*, 2, 1995, pp 73-78.
7. Avellaneda M., Levy A., Paras A. Managing the Volftility Risk of portfolios of Derivative Securities: the Lagrangian Unsertain Volatility Model // *Applied Mathematical Finance*, 3, 1996, pp 21-52.
8. http://www.numa.com/derivs/ref/calculat/option/calc-opa.htm
9. Недосекин А.О. Применение теории нечетких множеств к задачам управления финансами // Аудит и финансовый анализ, №2, 2000.
10. Shimko, D. Bounds of Probability // *Risk*, 6, 1993, April, pp 33-37.
11. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., Эдиториал УРСС, 1999.
12. https://secure.mrstock.com/new_account/occ10.html - ch10
13. Grable J., Lytton R.H. Financial risk tolerance revisited: the development of a risk assesment instrument // *Financial Services Rewiew* , 8, 1999, pp 163-181. – In: http://www.elsevier.com/cgi-bin/cas/tree/store/finser/cas_sub/browse/browse.cgi?year=1999&volume=8&issue=3&aid=40
14. http://moneycentral.msn.com/investor/options/default.asp?Symbol=IBM&Month=4&Year=2001
15. http://www.numa.com/derivs/ref/os-guide/os-00.htm