

Аннотация

В работе обсуждаются проблемы задания предпочтений инвестора, ориентированного на применение критерия VaR, и выбора инвестором оптимального портфеля на однопериодном рынке в соответствии со своими рисковыми предпочтениями.

Кривые безразличия портфельного инвестора по критерию допустимых потерь (VaR)

Г.А. Агасандян

В работе обсуждаются проблемы выбора инвестором на однопериодном рынке оптимального портфеля в соответствии со своими рисковыми предпочтениями.

Способы описания интересов инвестора

Традиционный в портфельной теории подход к определению оптимального с точки зрения инвестора портфеля ценных бумаг состоит в построении множества минимальной дисперсии и эффективного множества портфелей в координатах "ожидаемый доход – дисперсия" с последующим сопоставлением этого множества с индивидуальными предпочтениями портфельного инвестора. Подобные предпочтения инвестора обычно формулируются в терминах его кривых безразличия, определяемых в тех же координатах. Портфель, соответствующий точке касания эффективного множества с какой-либо кривой безразличия рассматриваемого инвестора, и является для него оптимальным.

В последнее время отмечается последовательный отход от этого метода в пользу критерия допустимых потерь (его еще называют критерием VaR – value at risk). Считается, что этот критерий точнее отражает рисковые предпочтения инвестора. При его использовании риск оценивается не дисперсией случайного дохода, а максимальным уровнем допустимых потерь от инвестиции. Поскольку превышение этого уровня крайне нежелательно, а вовсе избежать их невозможно, на такие потери отводится небольшая вероятность, например 0.01 или 0.05. Различие инвесторов в этом случае моделируется тем, что каждый из них устанавливает для себя свою планку потерь, на которые он готов идти с выбранной вероятностью. Наиболее простой и естественный способ определения оптимального для инвестора портфеля состоит в фиксации выбранного инвестором уровня потерь с последующей максимизацией среднего дохода при условии, что вероятность превышения выбранного уровня потерь будет не больше заданной малой вероятности.

Нам представляется, однако, более оправданным считать, что такой единственный для инвестора уровень не может адекватно отражать его предпочтения. Скорее всего, инвестор этот уровень должен сопоставлять со средней величиной потенциального дохода, – чем он больше, тем на большие потери он готов идти. (Это, кстати, соответствует основному постулату финансовой математики, согласно которому любое повышение риска должно быть вознаграждено.) Конечно, при этом степень готовности к потерям может зависеть от индивидуальных особенностей инвестора. Иными словами, наша цель – построить формальную схему, схожую с традиционными подходами, используемыми для описания предпочтений инвесторов и основанными на кривых безразличия инвесторов. Однако на этот раз координату "дисперсия" следует заменить координатой "уровень допустимых потерь". При этом вероятность нежелательных потерь будем считать фиксированной и одинаковой для всех инвесторов.

В дальнейшем нам удобнее будет оперировать не уровнем допустимых потерь, а уровнем критического дохода, ниже которого значения дохода для инвестора нежелательны. В соответствие с этим мы будем строить кривые безразличия в координатах "ожидаемый доход – критический доход". К сожалению, точное задание кривых безразличия при любом подходе является трудной задачей. Ее решение следует искать в сфере психологии инвесторов, в которой плохо работают формальные методы. Но эта проблема выходит за рамки настоящей заметки. Рассматриваемый ниже пример носит иллюстративный характер. В нем мы задаем кривые безразличия произвольно. Однако некоторые очевидные правила построения этих кривых следует соблюдать:

- для каждого инвестора уровень критического дохода при возрастании ожидаемого дохода убывает,
- при фиксированном среднем доходе предпочтительней более высокий критический доход,
- для более нерасположенного к риску инвестора кривые безразличия имеют меньший (по абсолютной величине) наклон – за единицу снижения критического дохода более нерасположенный к риску инвестор требует большего вознаграждения в форме повышенного среднего дохода.

Кривая критических доходов портфеля

Рассматривается проблема инвестирования на рынке с двумя ценными бумагами 1 и 2 для однопериодного инвестиционного горизонта. Из них можно образовать портфель p , вложив долю x инвестиционной суммы в бумагу 1 и долю $1 - x$ – в бумагу 2. Далее каждый портфель отождествляется с долей x вложения в бумагу 1. Относительный доход (т.е. $1 + y$, где y – доходность) по i -й бумаге обозначим r_i , $i=1, 2$. Относительный доход портфеля x составляет $r_x = xr_1 + (1 - x)r_2$. Для простоты будем предполагать, что пара случайных величин (r_1, r_2) подчиняется совместному нормальному закону распределения с параметрами (m_1, m_2) – математическими ожиданиями доходов, (s_1^2, s_2^2) – дисперсиями доходов и ρ – коэффициентом корреляции¹. Для определенности будем считать $m_1 > m_2$. Тогда интерес может представлять лишь случай $s_1 > s_2 (> 0)$. Легко проверяются соотношения (m_x и s_x^2 означают среднее и дисперсию портфеля соответственно):

$$m_x = x m_1 + (1 - x) m_2,$$

$$s_x^2 = x^2 s_1^2 + (1 - x)^2 s_2^2 + 2x(1 - x)\rho s_1 s_2.$$

Зададимся уровнем значимости γ , означающим малую вероятность, с которой допускаются нежелательные для инвесторов потери. Этот уровень значимости будем считать фиксированным и единым для всех инвесторов. Сам критический доход, отвечающий этому уровню значимости, зависит, вообще говоря, от выбранного портфеля x . Обозначим его $Z(x)$. Формально, $Z(x)$ для любого x определяется как наибольшее число, удовлетворяющее соотношению

$$\Pr\{r_x < Z(x)\} \leq \gamma.$$

Предположение о совместной нормальности распределения вероятности доходов по обеим бумагам позволяет утверждать, что любой портфель имеет также нормальное распределение. Это дает простое правило определения критического дохода Z для инвестора, выбравшего портфель x . Обозначим через z γ -квантиль стандартной нормальной случайной величины (т.е. со средним 0 и дисперсией 1). Тогда имеет место равенство

$$Z(x) = m_x + z s_x.$$

Выбирая портфель x и уровень $Z(x)$ в качестве критического дохода, инвестор может гарантировать, что вероятность снижения его дохода ниже критического не превысит γ . Отметим, что все рассуждения остаются в силе, если и не предполагать совместной нормальности доходов бумаг. Однако в этом случае сам параметр z может зависеть от x (но, как правило, эта зависимость слабая).

¹ Нормальное распределение доходов предполагает возможность отрицательных значений доходов. Однако это не должно влиять на последующие выводы, тем более что вероятность таких значений в рассматриваемом примере весьма мала.

У инвестора имеется возможность выбора из множества портфелей x , $0 \leq x \leq 1$ (при допустимости коротких продаж x мог бы быть любым вещественным числом, но их здесь не рассматриваем). На каком из них ему следует остановиться? На рисунке представлен график функции критического дохода $Z(x)$ наиболее типичного вида, представляющий собой вогнутую кривую. График построен для случая $m_1 = 1.2$, $m_2 = 1.1$, $s_1 = 0.20$, $s_2 = 0.15$, $\rho = -0.2$, $z = -3.0$ (что соответствует $\gamma \approx 0.01$). На оси абсцисс откладывается средний доход портфеля, на оси ординат – критический доход. Очевидно, что левая восходящая ветвь графика не должна представлять интереса для рационального инвестора: при одинаковых критических доходах лучше выбирать портфель с большим средним доходом².

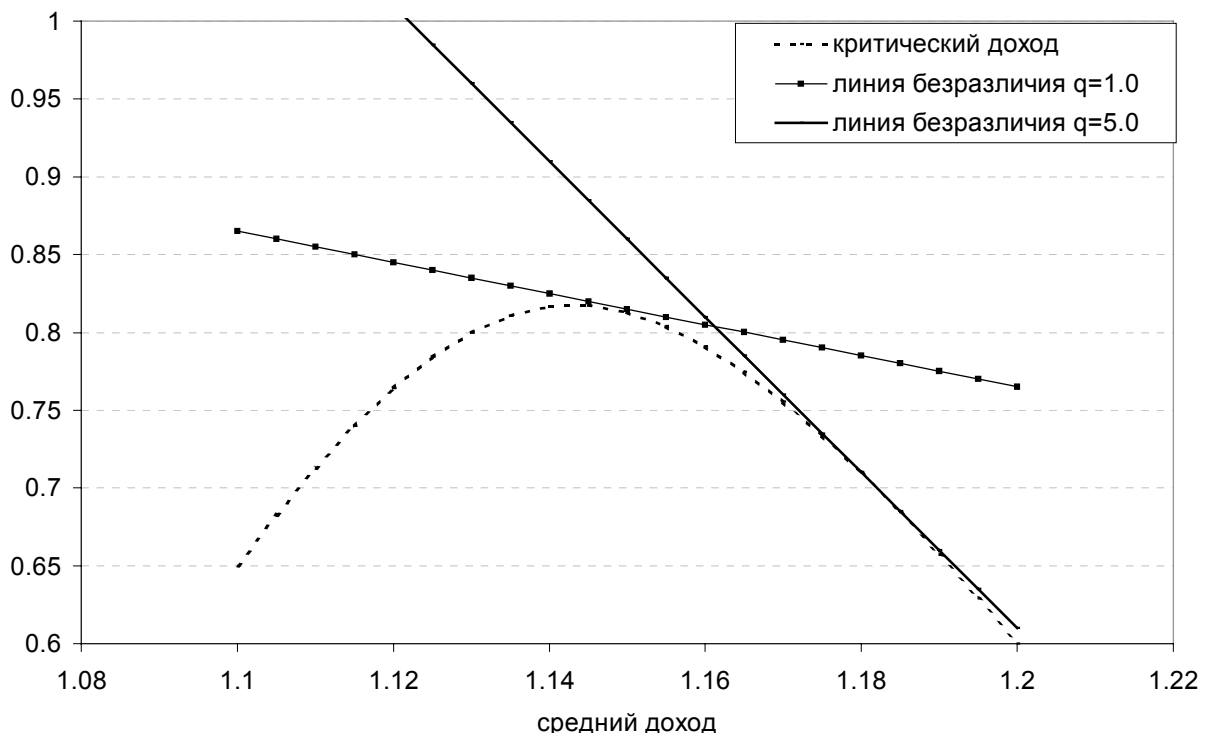


Рис. Графики кривой критического дохода и касательных к нему линий безразличия для двух инвесторов

В некотором смысле ситуация средни той, что выделяет эффективное множество портфелей из множества портфелей минимальной дисперсии в традиционной портфельной теории. В нашем случае роль эффективного множества портфелей играет правая нисходящая ветвь графика. Эта ветвь графика оставляет инвестору свободу выбора, и очевидных решений здесь нет. Из каждой пары точек на этой ветви в одной лучше (больше) средний доход, а в другой – критический доход. За повышение среднего дохода приходится расплачиваться понижением критического дохода, т.е. повышением возможных потерь.

² При некоторых не совсем реальных условиях функция $Z(x)$ возрастает для всех x , что делает однозначным выбор портфеля $x = 1$ всеми рациональными инвесторами. Такое поведение критического дохода имеет место в нашем примере, например, в случае $z > -0.5$ (т.е. при значительной вероятности нежелательных потерь), а также в случае малых значений дисперсии доходов по обеим ценным бумагам.

Определение оптимального портфеля

Для определения оптимального для некоторого инвестора портфеля необходимо смоделировать его предпочтения. Как мы уже отмечали, один из способов решения задачи состоит в том, что инвестором фиксируется некоторый пороговый уровень дохода r° (не зависящий от портфеля x), ниже которого фактический доход принимает значения с вероятностью, не превышающей γ . Далее решается задача максимизации среднего дохода:

$$\max_x m_x \quad \text{при условии} \quad \Pr\{r_x < r^\circ\} \leq \gamma.$$

Решение этой задачи для нашего примера можно проследить на рисунке. Пусть инвестор определяет для себя критический уровень дохода $r^\circ = 0.75$. Если провести горизонтальную линию на уровне 0.75, то она пересечет график функции $Z(x)$ в точках $m_x = 1.117$ ($x = 0.17$) и $m_x = 1.171$ ($x = 0.71$). Отрезок $[1.117, 1.171]$ на оси абсцисс дает множество допустимых портфелей (т.е. обеспечивающих выполнение условия $\Pr\{r_x < 0.75\} \leq \gamma$). При этом правый конец отрезка определяет оптимальный для инвестора портфель $x = 0.71$. Отметим, что портфелей, обеспечивающих цели инвестора, не существует, если критический доход будет установлен на уровне, превышающем 0.82.

Как мы уже говорили, в такой постановке задачи имеются определенные недостатки. Дело в том, что считать критический уровень дохода r° не зависящим от x , вообще говоря, неоправданно. Задача определения оптимального для инвестора портфеля приобретает более реальное звучание, если рассмотреть кривые безразличия.

Заметим, что требованиям, предъявляемым к кривым безразличия рационального инвестора и сформулированным выше, очевидно, удовлетворяют прямые линии с отрицательным наклоном. Для простоты мы их и будем использовать. При этом более нерасположенному к риску инвестору будут отвечать линии с меньшим (по абсолютной величине) наклоном, т.е. более пологие: по сравнению с менее нерасположенным инвестором за единичное увеличение потенциальных потерь такой инвестор требует большей компенсации в виде возросшего среднего дохода.

Будем считать, что семейство функций безразличия инвестора состоит из параллельных между собой прямых. Тогда оптимальный для данного инвестора портфель определяется как абсцисса точки графика, в которой происходит касание функции $Z(x)$ одной из прямых данного семейства. Абсолютное значение наклона этих прямых обозначим q . На рисунке дается решение задачи определения оптимального портфеля для инвесторов, характеризующихся кривыми безразличия с $q = 1.0$ и $q = 5.0$. Под такими наклонами проведены касательные к кривой $Z(x)$ функции безразличия двух разных инвесторов – соответственно более и менее нерасположенного к риску. Для инвестора с $q = 1.0$ касание происходит в точке $(1.145, 0.85)$. Это значит, что оптимальным для такого инвестора служит портфель с долей $x = 0.45$ первой бумаги. При этом критический доход равен 0.85^3 .

Для более крутой линии безразличия – прямой линии с наклоном $q = 5.0$ – точка ее касания с кривой $Z(x)$ дает оптимальный портфель, соответствующий доле $x = 0.60$ первой бумаги и критическому доходу 0.79. Эти параметры характеризуют решение задачи для более терпимого к риску инвестора.

Если наклон превысит 6.0 (по абсолютной величине), то на отрезке $[1.1, 1.2]$ касания не наступит, и оптимальный для инвестора портфель будет состоять лишь из наиболее доходной бумаги, т.е. $x = 1.00$.

³ Фактически удобнее искать не точку касания двух линий, а максимум функции $Z(x) + qx$.