Аннотация

Исследуются свойства итерационных процедур поиска равновесия на аграрном рынке для систем с произвольным количеством обобщенных производителей, центров производства и продуктов с учетом экспортно-импортных операций. На примере демонстрируются особенности работы такого алгоритма.

Итерационные процедуры поиска равновесия на аграрном рынке с учетом экспортно-импортных операций

Г.А. Агасандян

В качестве хозяйственных субъектов агрокомплекса в работе рассматриваются производство, транспортировка и потребление аграрной продукции, представленной продуктами нескольких видов. Проблемами хранения и переработки продукции мы здесь пренебрегаем. При исследовании равновесных состояний в рассматриваемом агрокомплексе принимаются упрощающие предположения, касающиеся структуры производителей и потребителей продукции (см. [1]). Так, предполагается, что все множество производителей разбивается на конечное число так называемых обобщенных производителей (ОП). Каждый обобщенный производитель состоит из бесконечного множества конкурирующих между собой и идентичных друг другу элементарных (бесконечно малых) производителей. Пространственной протяженностью ОП пренебрегаем. Однако каждый производитель свободен в выборе распределения находящейся в его ведении общей площади по различным культурам. Далее, предполагается, что потребление происходит в населенных пунктах (городах или регионах), также не имеющих пространственной протяженности и называющихся центрами потребления (ЦП).

Возможны два варианта описания этих центров (мало различающиеся друг от друга по методам изучения). Потребление в этих центрах можно сразу характеризовать некоторыми функциями спроса на уровне оптовых закупок, своей для каждого центра, либо задавать функции спроса на уровне розничных продаж, но дополнительно вводить торговых посредников со своими интересами (монопольных или конкурентных). В любом случае схема нахождения равновесных ситуаций не меняется, так как, в конечном счете, все сводится к заданию (или вычислению) функций спроса на уровне оптовых поставок. Ниже дается описание ЦП в случае монопольного для каждого ЦП торгового посредника, хотя в численном примере для простоты сразу задаются функции спроса на уровне оптовых закупок.

Формально система описывается множествами $I = \{1,2,...,n\}$ – обобщенных производителей, $J = \{1,2,...,m\}$– центров потребления и $K = \{1,2,...,l\}$– видов продукции. Общая площадь i-го ОП равна s_i, $i \in I$, его удельные издержки производства считаются не зависящими от объемов производства и равны e_i^k, $i \in I$, $k \in K$, а продуктивность характеризуется урожайностями α_i^k, $i \in I$, $k \in K$, возделываемых им культур, так что если s_i^k – площадь, отводимая i-м ОП под k-ю культуру, то он с этой площади собирает урожай $a_i^k = \alpha_i^k s_i^k$. Транспортные расходы задаются издержками r_{ij}^k доставки единицы продукции k-го вида от i-го ОП j-му ЦП, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. Предполагается, что каждый хозяйственный субъект имеет в качестве цели максимизацию своей прибыли. Поведение каждого субъекта легко определяется при заданном поведении всех прочих субъектов. Однако в условиях отсутствия такой информации, методом исследования совместного поведения участников рынка служит поиск равновесных по Нэшу ситуаций (см. [2]).

В соответствии с введенными обозначениями свойства равновесного состояния совместно с интересами участников рынка будут записываться в виде

$$u_i = \sum_{k\in K} p_i^k X_{i\bullet}^k - \sum_{k\in K} e_i^k X_{i\bullet}^k, \qquad i \in I,$$

$$w_j = h_j\left(X_{\bullet j}^1, X_{\bullet j}^2 ..., X_{\bullet j}^l\right) - \sum_{k\in K}\left(q_j^k + b_j^k\right)X_{\bullet j}^k, \qquad j \in J,$$

$$p_i^k = q_j^k - r_{ij}^k, \quad \text{если } x_{ij}^k > 0,$$

$$p_i^k \ge q_j^k - r_{ij}^k, \quad \text{если } x_{ij}^k = 0,$$

$$X_{i\bullet}^k = \sum_{j\in J} x_{ij}^k, \qquad X_{\bullet j}^k = \sum_{i\in I} x_{ij}^k,$$

$$\sum_{k\in K} X_{i\bullet}^k / \alpha_i^k = s_i,$$

$$i \in I, \; j \in J, \; k \in K.$$

Здесь u_i – прибыль производителя, w_j – прибыль потребителя, p_i^k – отпускные цены i–го производителя на k-ю культуру, q_j^k - цены на уровне j–го центра потребления на k-ю культуру, x_{ij}^k– объем k-й культуры, проданный i-м производителем j-му центру потребления, $X_{i\bullet}^k$– суммарный объем реализации i-м производителем k-й культуры, $X_{\bullet j}^k$– суммарный объем потребления j-м ЦП k-й культуры, а $h_j\left(X_{\bullet j}^1, X_{\bullet j}^2 ..., X_{\bullet j}^l\right)$ – выручка от реализации продукции в j-м центре потребления, являющаяся вогнутой и растущей функцией по всем своим аргументам и для всех ЦП.

В этих соотношениях находят отражение некоторые легко устанавливаемые свойства равновесного состояния, а именно: цены q_j^k не зависят от $i \in I$, цены p_i^k не зависят от $j \in J$, земельные ресурсы всех ОП используются полностью, а объемы реализации продукции для каждого ОП и каждой культуры совпадают с объемами его производства. Кроме того, если в равновесии i-й производитель останавливает свой выбор на производстве подмножества K' из множества всех культур, то должно также выполняться соотношение

$$\alpha_i^{k'}\left(p_i^{k'} - e_i^{k'}\right) = \text{const}, \qquad k' \in K'$$

(т.е. произведение в левой части формулы не зависит от вида выращиваемой i-м ОП культуры). Последнее соотношение означает, что в равновесии все элементарные производители, составляющие i-й ОП, должны получать одинаковую прибыль с единицы площади, не зависимо от того, какую культуру они собираются выращивать.

Алгоритм поиска равновесного состояния состоит из последовательности шагов, которые нумеруются числами натурального ряда ν = 1, 2,… . Вначале задается нулевое приближение для набора цен p_i^k, а также для распределения площадей s_i под культуры, т.е. для величин площадей s_i^k, так что $\sum_{k\in K} s_i^k = s_i$. Алгоритм организует определенный пересчет этих характеристик системы.

Допустим, что к началу ν-го шага алгоритма уже сформированы некоторые значения цен p_i^k и величин площадей s_i^k. Тогда ν-й шаг алгоритма заключается в следующем. В соответствии с распределением площадей s_i^k, $i \in I$, $k \in K$, получаемым к началу шага, и урожайностям культур вычисляются объемы A_i^k, $i \in I$, $k \in K$, производства всех культур всеми ОП. Принимаем также, что $x_{ij}^k = X_{i\bullet}^k = X_{\bullet j}^k = 0$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. Далее, последовательно по $j \in J$ в произвольном фиксированном порядке организуется просмотр всех ЦП и определяются оптимальные для каждого из них объемы закупок всех видов культур и соответствующих таким закупкам поставщиков по ценам, сформировавшимся к началу текущего шага алгоритма, т.е. сначала продукция данного вида закупается у производителя, чья цена в сумме с транспортными издержками оказывается для данного ЦП минимальной, затем у производителя, чья цена в сумме с транспортными издержками оказывается второй по величине и т.д.

К началу просмотра j-го ЦП должны быть известны все значения $x_{ij'}^k$, а также $X_{i\bullet}^k$ и $X_{\bullet j'}^k$, для всех $i \in I$, $k \in K$, $j' \in J$, $j' < j$. Текущее значение переменной $X_{i\bullet}^k$ означает, сколько продукции k-го вида закуплено у i-го ОП первыми j-1-м ЦП. Оно может в дальнейшем измениться при просмотре последующих ЦП. Теперь j-й ЦП получает доступ к «прилавку» и определяет оптимальную для себя политику закупок. При этом если i-й компонентой решения этой задачи служит величина $\tilde{x}_{ij}^k$, то в качестве фактически закупаемого количества продукта на рассматриваемом шаге алгоритма принимается величина

$$x_{ij}^k = \min\left(x_{ij}^{k'} + \mu_1 / \nu, A_1^k - X_{i\bullet}^k, \tilde{x}_{ij}^k\right),$$

где $x_{ij}^{k'}$ – объем закупок на предыдущем $\nu - 1$-м шаге алгоритма, а $\mu_1 > 0$ – параметр настройки алгоритма. Затем производится пересчет величин $X_{i\bullet}^k$. Определяются также и текущие значения множеств U^k, $k \in K$, как подмножеств I, состоящих из тех ОП, которые в результате данного просмотра полностью реализуют свою продукцию k-го вида. На этом просмотр j-го ЦП завершается и начинается просмотр $j+1$-го ЦП.

Рассмотренный ν-й шаг алгоритма завершается после просмотра всех ЦП. По окончании этого шага производится пересчет цен p_i^k и площадей s_i^k. Если $i \in U^k$, то цена p_i^k заменяется на $p_i^k + \mu_2 / \nu$, а если $i \notin U^k$, то на $p_i^k - \mu_2 / \nu$. Константа μ_2 также является параметром настройки алгоритма. В правиле изменения величин площадей используются новые значения закупочных цен. Если

$$k_i = \arg\max_{k \in K} \alpha_i^k \left(p_i^k - e_i^k\right),$$

то $s_i^{k_i}$ заменяется на $\left(s_i - s_i^{k_i}\nu\right)/(\nu + 1)$, а если $k \neq k_i$, то s_i^k заменяется на $s_i^k \nu/(\nu + 1)$. После этого начинает выполняться $\nu + 1$-й шаг алгоритма и т. д.

Рассмотренная задача допускает расширение на случай наличия в системе экспортно-импортных операций. При этом предполагается, что цены на уровне иностранных производителей и потребителей продукции аграрного сектора экономики фиксированы, а возможности их производства и потребления не ограничены: они в состоянии покрыть любые потребности внутренних производителей и потребителей, если, разумеется, последних устроят цены.

Нахождение равновесного состояния системы при наличии экспортно-импортных операций требует определенной модификации предложенного выше алгоритма. Так, в соответствии с предположениями относительно свойств внешних производителей и потребителей аграрной продукции при организации просмотра по всем внутренним ЦП учитываются цены всех производителей, включая и внешних, а при просмотре внешних потребителей внешние производители в расчет не принимаются. По окончании просмотра всех потребителей пересчета отпускных цен внешних производителей, равно как и площадей, отведенных ими под разные культуры, не производится.

Модификации подвержена и политика выбора новых объемов закупок внешними потребителями в ситуации, когда фиксированная мировая цена на уровне внешнего потребителя оказывается выше текущей цены, получающейся при поставке продукции от какого-либо внутреннего производителя. В силу предположенной специфики функции спроса такого потребителя, ему следовало бы полностью отказаться от предложения такого производителя. Однако такой отказ приведет к снижению цены производителя на следующем шаге и этот производитель на рынке внешнего потребителя станет конкурентоспособным, и так будет повторяться постоянно. Чтобы подобных колебаний не возникало, вместо полного отказа от закупок внешними потребителями в формуле пересчета объемов предусматривается их постепенное снижение с шагом, не превышающим μ_1 / v.

Численный пример. Рассмотрим агрегированную систему, в которой производится и потребляется всего два вида продукции с участием 4 обобщенных производителей и 3 центров потребления, из которых 1 производитель и 1 потребитель являются внешними; им приписываются номера $i = 1$ и $j = 1$ соответственно. Функции спроса внутренних ЦП на уровне оптовых закупок на входе в ЦП задаются в виде (предполагается, что они между собой по j и k независимы)

$$f_j^k\left(x_j^k\right) = \frac{c_j^k}{0.1 + x_j^k}, \quad j = 2{,}3, \quad k = 1{,}2,$$

где коэффициенты определяются матрицей

$$\left\| c_j^k \right\| = \begin{bmatrix} 5.0 & 8.0 \\ 4.0 & 6.0 \end{bmatrix}.$$

Для внешнего ЦП вместо таких функций задаются мировые цены $\bar{q}_1^k : \bar{q}_1^1 = 4.00$, $\bar{q}_1^2 = 7.00$. Производители определяются следующим образом. Их суммарные площади равны по 1 (для внешнего производителя значение площади не существенно), мировые цены $p_1^1 = 2.00$, $p_1^2 = 1.00$, а продуктивность по различным культурам задается матрицей

$$\left\| \alpha_i^k \right\| = \begin{bmatrix} - & - \\ 3.00 & 1.00 \\ 4.00 & 2.00 \\ 4.00 & 3.00 \end{bmatrix}.$$

Прочерк в данной и далее вводимых матрицах означает, что соответствующий элемент матрицы не играет никакой роли в задаче и может вообще не задаваться. Чисто для иллюстративных целей издержки производства для всех производителей и всех культур принимаются равными 0.1, а транспортные расходы считаются не зависящими от вида продукции и задаются следующей матрицей размера 4×3:

$$\left\| r_{ij}^{k} \right\| = \begin{bmatrix} - & 2.00 & 3.00 \\ 3.00 & 1.00 & 2.00 \\ 4.00 & 2.00 & 1.00 \\ 4.00 & 2.00 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad k = 1{,}2 .$$

Параметрами настройки алгоритма служили $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 1$. Алгоритм позволяет находить равновесное состояние системы методом последовательных приближений.. Оценивались следующие характеристики: предельное распределение площадей, предельные цены производителей (исключая внешнего производителя), предельные потоки продукции, суммарные потоки продукции от производителей и суммарные потоки потребленной центрами потребления продукции. Моделирование дало следующие результаты (после 10000 итераций):

$$\left\| s_{i}^{k} \right\| = \begin{bmatrix} - & - \\ 0.66 & 0.34 \\ 0.37 & 0.63 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}, \qquad \left\| p_{i}^{k} \right\| = \begin{bmatrix} 1.00* & 2.00* \\ 1.40 & 4.00 \\ 1.55 & 3.00 \\ 1.55 & 3.00 \end{bmatrix};$$

$$\left\| x_{ij}^{1} \right\| = \begin{bmatrix} - & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.98 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.46 \\ 0.00 & 0.00 & 0.01 \end{bmatrix}, \qquad \left\| x_{ij}^{2} \right\| = \begin{bmatrix} - & 1.90 & 0.00 \\ 0.33 & 0.00 & 0.00 \\ 0.60 & 0.00 & 0.67 \\ 2.27 & 0.00 & 0.72 \end{bmatrix},$$

$$\left\| X_{i\bullet}^{k} \right\| = \begin{bmatrix} 0.00* & 1.90* \\ 1.98 & 0.34 \\ 1.46 & 1.27 \\ 0.01 & 2.99 \end{bmatrix}, \qquad \left\| X_{\bullet j}^{k} \right\| = \begin{bmatrix} 0.00* & 3.20* \\ 1.98 & 1.90 \\ 1.47 & 1.40 \end{bmatrix}$$

(помеченные звездочкой элементы матрицы $\left\| p_{i}^{k} \right\|$ задаются с самого начала и не изменяются на протяжении работы алгоритма, матрицы $\left\| X_{i\bullet}^{k} \right\|$ - суммируют потоки продуктов лишь по всем внутренним потребителям, а $\left\| X_{\bullet j}^{k} \right\|$ – лишь по внутренним производителям).

Литература

1. Агасандян Г.А. Равновесия в системах производства, хранения и реализации сельхозпродукции. М.: ВЦ АН СССР, 1991, 37с.
2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 200с.