Аннотация

В работе предлагается способ динамического хеджирования опционов, который в отличие от традиционного способа, состоящего в превращении комбинации опционов с акциями в безрисковый актив, оставляет место для риска и приводит к повышению доходности портфеля в зависимости от величины выбранного риска. Такое хеджирование позволяет применить методику ценообразования опционов к рынку, на котором не существует безрискового актива, а его роль выполняет низкорисковый и низкодоходный актив. Доказывается, что стоимость опциона в новых условиях также удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных параболического типа, в котором роль параметра, отвечающего безрисковой ставке, играет некоторая комбинация параметров данной задачи. Приводятся формулы определения стоимости опционов колл и пут, модификация теоремы паритета опционов, а также изучается зависимость стоимости опционов от параметров задачи.

ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНОВ В ОТСУТСТВИЕ БЕЗРИСКОВЫХ АКТИВОВ

Г.А. АГАСАНДЯН

В работе предпринимается попытка отказаться от жесткого требования наличия на рынке безрискового актива, с помощью которого в обычной модели Блэка-Шоулза из принципа недопустимости арбитража выводится стоимость опциона. В основе модификации модели Блэка-Шоулза лежит идея частичного динамического хеджирования опционов, которое в отличие от традиционного способа хеджирования, состоящего в превращении комбинации опционов с акциями в безрисковый актив, оставляет место для риска и приводит к повышению доходности портфеля в зависимости от величины выбранного риска. Оказывается, что стоимость опциона в новых условиях также удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных параболического типа, в котором роль параметра, отвечающего безрисковой ставке, играет некоторая комбинация параметров данной задачи. Для полноты и последовательности изложения вначале дается объяснение традиционного метода ценообразования как в дискретном (биноминальная модель), так и в непрерывном случае (собственно модель Блэка-Шоулза).

1. Биномиальная модель ценообразования опционов

Рассматривается опцион (для определенности в трех первых разделах будем считать его коллом) на акцию определенного типа, движение цены которой протекает в дискретном времени, носит случайный характер и подчиняется закону обобщенного случайного блуждания. Это значит, что траектории цены порождают ветвящийся процесс, обладающий следующими свойствами. В каждой вершине дерева, характеризующейся моментом времени n и ценой S, возможны два исхода: в момент $n+1$ цена может принимать либо значение Su с вероятностью P_u, либо значение Sd с вероятностью P_d. Этот процесс предполагается однородным по времени, т.е. параметры u, d, P_u и P_d с течением времени не меняются. Основное предположение, позволяющее определить стоимость опциона, заключается в том, что на рынке, состоящем из акций заданного типа, безрискового актива и опциона на эту акцию, не должно возникать возможностей для арбитража, понимаемого в строгом смысле, т.е. безрискового и осуществляемого без начальной инвестиции. Этих данных и предположений уже достаточно, чтобы можно было определить стоимость опциона. Сначала ограничимся случаем однопериодного опциона и рассмотрим численный пример.

Пусть параметры процесса принимают значения $u = 1.1$, $d = 0.9$, $P_u = 0.7$, $P_d = 0.3$, безрисковый относительный доход (т.е. 1 плюс доходность за период) $f = 1.03$, цена исполнения опциона $E = 100$ и цена акции на начало периода $S = 100$. Тогда в конце периода стоимость опциона C' однозначно определена ценой акции на конец периода S'. Причем из определения колла следует равенство $C' = \max(S' - E, 0)$, дающее представление для платежной функции опциона на момент его исполнения. Воспользуемся этим и построим портфель, состоящий из одной акции и короткой позиции объемом 2 по опциону. Этот объем, который, вообще говоря, может меняться в зависимости от цены акции и момента времени, мы далее будем обозначать через k (в данном случае $k = 2$). Коэффициент k имеет смысл коэффициента хеджирования акции опционами. В рассматриваемом случае все расчеты просты. В начале периода стоимость портфеля равна $100 - 2C$, где C – стоимость опциона на начало периода. Если цена акции за период возрастает, то $S' = Su = 110$, а $C' = C_u = 10$. Поэтому опционная компонента портфеля равна $-2C' = -20$ и стоимость портфеля в целом $S' - 2C' = 90$. Если цена акции за период убывает, то $S' = Sd = 90$, а $C' = C_d = 0$. На этот раз опционная компонента портфеля равна $-2C' = 0$, а стоимость портфеля в целом $S' - 2C' = 90$. Следовательно, стоимость выбранного нами портфеля не зависит от направления движения цены акции. Учитывая еще, что в начале периода стоимость портфеля равна $100 - 2C$, то из условия невозможности арбитража имеем равенство

$$(100 - 2C)f = 90,$$

следовательно

$$C = (100 - 87.38)/2 = 6.31.$$

В примере мы использовали такой коэффициент хеджирования, что портфель оказался безрисковым. Регулярная процедура подбора нужного коэффициента хеджирования строится следующим образом. Для коэффициента хеджирования должно выполняться соотношение

$$Su - kC_u = Sd - kC_d,$$

откуда находится выражение для k:

$$k = (Su - Sd)/(C_u - C_d).$$

Зная этот коэффициент, можно определить и стоимость опциона в начале периода, а именно, снова должно выполняться равенство $(S - kC)f = Su - kC_u$, из которого подстановкой коэффициента k находится C:

$$C = \frac{1}{k}\left(S - \frac{(Su - kC_u)}{f}\right) = \frac{pC_u + qC_d}{f},$$

где

$$p = \frac{f-d}{u-d}, \qquad q = \frac{u-f}{u-d}. \tag{1}$$

Очевидно, что p и q удовлетворяют соотношению $pu + qd = f$ и, потому, выполняется тождество $pu/f + qd/f = 1$. Следовательно, выполняется также тождество, дающее представление для цены акции

$$S = \frac{pSu + qSd}{f}.$$

Важно отметить, что все найденные характеристики портфеля совершенно не зависят от вероятностей движения цены акции вверх и вниз. Каким бы странным ни казалось это свойство, оно целиком обязано весьма жесткому требованию невозможности строго безрискового арбитража.

Перейдем к случаю двухпериодного опциона и, соответственно, портфеля. Обратимся к тому же примеру и будем считать, что параметры процесса принимают те же значения, что и ранее, только распространим движение цены акции на два периода. Цена акции в конце первого периода (S') снова принимает два значения 110 и 90, а в конце второго периода (S'') три – 121, 99 и 81 (Suu, $Sud = Sdu$ и Sdd соответственно). Тогда в конце второго периода стоимость опциона C'' однозначно определяется ценой акции S'', а именно $C_{uu} = 21$, $C_{ud} = C_{du} = C_{dd} = 0$. Двигаясь от конца процесса к началу, воспользуемся результатами для однопериодного случая с тем же портфелем $S - 2C$ для второго интервала. Учитывая, что в нашем примере $p = 0.65$, $q = 0.35$, имеем на конец первого периода

$$C_u = (pC_{uu} + qC_{ud})/f = 13.25,$$

$$C_d = (pC_{du} + qC_{dd})/f = 0.$$

Подставляя эти значения в полученные ранее формулы для первого периода, получаем:

$$C = (pC_u + qC_d)/\mathrm{f} = 8.36.$$

Общие формулы для двухпериодного случая выглядят так:

$$C = (p^2 C_{uu} + 2pqC_{ud} + q^2 C_{dd})/f^2,$$
$$S = (p^2 Suu + 2pqSud + q^2 Sdd)/f^2.$$

Полученные соотношения нетрудно распространить на ветвящийся процесс движения цены акции с произвольным количеством периодов. Для числа периодов n имеет место представление стоимости опциона

$$C = \frac{1}{f^n}\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} C_{u^i d^{n-i}} ,$$

а также тождество для цены акции

$$S = \frac{1}{f^n}\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} Su^i d^{n-i} .$$

Преобразуем формулу стоимости опциона, учитывая вид его платежной функции и тождество для S и полагая $\theta = pu/f$:

$$C = \frac{1}{f^n}\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} \max\left(Su^i d^{n-i} - E, 0\right) =$$
$$= S\sum_{i=m}^{n} C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i} - Ef^{-n}\sum_{i=m}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} =$$
$$= SBi(n, m; \theta) - Ef^{-n} Bi(n, m; p) .$$

Здесь Bi является функцией биномиального распределения и означает вероятность того, что количество успехов в последовательности n независимых между собой испытаний Бернулли, в каждом из которых вероятность успеха принимает значение, равное третьему аргументу, т.е. θ и p соответственно, будет больше или равно параметру m определяемому равенством

$$m = \arg\min_i \left\{Su^i d^{n-i} > E\right\}.$$

Нетрудно видеть, что параметр m определяется соотношением

$$m = \frac{[\ln(E/S) - n\ln d]}{\ln(u/d)} ,$$

где $[a]$ означает целую часть числа a.

Известно, что при больших n биномиальное распределение аппроксимируется нормальным. Более точно, для получения нужных формул необходимо сначала центрировать, а затем и нормировать случайное число успехов в n экспериментах Бернулли. Далее, для каждой из двух вероятностей успеха θ и p границу m количества успехов необходимо преобразовать в новые границы D_1 и D_2 уже для стандартизованных случайных величин соответственно по формулам

$$m = n\theta - D_1\sqrt{n\theta(1-\theta)}\ ,$$

$$m = np - D_2\sqrt{np(1-p)}\ .$$

Тогда можно утверждать, что при стремлении n к бесконечности будет иметь место асимптотическое представление

$$C = SN(D_1) - Ef^{n}N(D_2),$$

где $N(y)$ является кумулятивной функцией распределения вероятности для стандартной нормальной случайной величины, т.е. определяется формулой

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\,.$$

Наша ближайшая цель – связать параметры нашей дискретной последовательности с характеристиками случайного процесса в непрерывном времени, получающегося из исходной последовательности в результате предельного перехода, при этом естественной моделью для непрерывного процесса будет служить геометрическое броуновское движение, подчиняющееся дифференциальному стохастическому уравнению Ито (см. [1]):

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dw_t\,.$$

Таким образом, речь идет о переходе от параметров n, $\underline{u}$, d, P_u, P_d и f дискретного процесса к параметрам непрерывного процесса, таким как T – оставшееся до истечения опциона время, μ – коэффициент переноса винеровского процесса, σ^2 – коэффициент диффузии и r – темп роста стоимости безрискового актива, отвечающий непрерывному начислению процентов на проценты (заменяет обычную процентную ставку в непрерывной модели рынка). Однако заметим, что, как следует из биномиальной модели, параметры P_u и P_d не оказывают на результаты никакого влияния и их можно не учитывать. На результаты оказывают влияние лишь “фиктивные” вероятности p и q, определяемые возможными изменениями цены на акцию, а не вероятностями этих изменений. Не будет иметь значения также и коэффициент μ фактического переноса обобщенного винеровского процесса, задаваемого выписанным стохастическим уравнением. Надо будет лишь задать аналог “фиктивного” переноса, определяемого “фиктивными” вероятностями p и q (1). Имея это замечание в виду, осуществим переход от дискретной схемы к непрерывной традиционным способом (см., например, [2]). Положим $n = T/\Delta\tau$, $u = 1 + \Delta x$, $d = 1/(1 + \Delta x)$, $f = 1 + r\Delta\tau$, $(\Delta x)^2 = \sigma^2\Delta\tau$, $p = ½ +\alpha\Delta x/(2\sigma^2)$. Выбор параметров u и d обусловлен тем, что собственно винеровским процессом фактически является не S_t, а $\ln S_t$, и поэтому должно быть $\ln u = -\ln d$. Параметр α играет роль именно того “фиктивного” коэффициента переноса, о котором мы говорили выше, а σ^2 является коэффициентом диффузии процесса. Выразим все интересующие нас переменные через Δx, ограничиваясь малыми второго порядка. Получим

$$p = \frac{f-d}{u-d} = \frac{1 + r\Delta\tau - \dfrac{1}{1+\Delta x}}{1 + \Delta x - \dfrac{1}{1+\Delta x}} = \frac{\Delta x + \left(\dfrac{r}{\sigma^2} - 1\right)(\Delta x)^2}{2\Delta x - (\Delta x)^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)$$

Таким образом, сравнивая полученное выражение с представлением p через α, находим «фиктивный» коэффициент переноса процесса (фактически, процесса $\ln S_t$, а не S_t)

$$\alpha = r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Аналогично

$$\theta = \frac{pu}{f} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\frac{1+\Delta x}{1+r\Delta\tau} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)\Delta x\right).$$

Далее имеем

$$D_2 = \frac{np - m}{\sqrt{npq}} = \frac{np - \left[\ln\frac{E}{S} - n\ln d\right] \Big/ \ln\frac{u}{d}}{\sqrt{npq}} =$$

$$= \frac{\frac{T}{\Delta\tau}\frac{1}{2}\left(1 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta x\right) 2\left(\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2}\right) - \frac{T}{\Delta\tau}\left(\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2}\right) - \ln\frac{E}{S}}{2\left(\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2}\right)\sqrt{\frac{T}{4\Delta\tau}}} = \quad (2)$$

$$= \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T(\Delta x)^2}{\sigma^2\Delta\tau}}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Аналогично может быть получено выражение для D_1

$$D_1 = \frac{n\theta - m}{\sqrt{npq}} = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (3)$$

Также

$$f^{-n} = (1 + r\Delta\tau)^{-\frac{T}{\Delta\tau}} = \exp(-rT).$$

Поэтому окончательно имеем

$$C = SN(D_1) - \exp(-rT)N(D_2). \qquad (4)$$

Таким образом, формулы (2), (3) и (4) дают решение задачи определения стоимости опциона в непрерывном случае для произвольного момента времени T и цены базовой акции S.

2. Модель Блэка-Шоулза

Соотношения (2), (3) и (4), определяющие стоимость опциона, могут быть получены и непосредственно из непрерывной модели Блэка-Шоулза, без применения дискретной схемы. Делается это следующим образом. На рынке, на котором рассматривается опцион, разумеется, присутствует и акция, лежащая в его основе. Модель движения цены данной акции задается в форме стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dw_t, \qquad (5)$$

где w_t – стандартный винеровский процесс, параметр μ означает коэффициент переноса, а σ^2 – коэффициент диффузии стохастического процесса $\ln S_t$. Знак σ здесь не имеет значения, но для определенности будем считать, что $\sigma > 0$. Кроме того, на рынке имеется в наличии безрисковый актив, динамика цены которого описывается обыкновенным (детерминированным) дифференциальным уравнением:

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt.$$

Рассмотрим портфель $S_p = C + x(S)S$, состоящий из одного опциона и $x(S)$ акций. В этом портфеле переменный коэффициент $x(S)$ играет роль коэффициента хеджирования опциона акциями. Сформулируем предположения, которым подчиняется рассматриваемый идеальный рынок: 1) нет налогов и операционных издержек, 2) нет дивидендов, 3) допустима короткая продажа акций, 4) имеется возможность ссужать и заимствовать денежные средства по безрисковой ставке r, 5) состав портфеля можно мгновенно корректировать, 6) рассматривается опцион европейского типа.

Очевидно, что стоимость портфеля S_p не должна зависеть от цены акции S. Это значит, что $\frac{\partial S_p}{\partial S} = 0$ и потому $\frac{\partial C}{\partial S} + x = 0$. Отсюда находится выражение для коэффициента хеджирования x, и мы получаем представление портфеля в виде

$$S_p(t) = C(S,t) - \frac{\partial C}{\partial S} S(t).$$

Определим дифференциал доходности dY_p за время dt полученного портфеля двумя способами. С одной стороны, имеем

$$dY_p = \frac{dS_p}{S_p} = \frac{dC + xdS}{C + xS} = \frac{dC - \frac{\partial C}{\partial S} dS}{C - \frac{\partial C}{\partial S} S}.$$

Дифференциал стоимости опциона можно записать следующим образом (при этом используются свойства стохастических дифференциалов и представление (5)):

$$dC(S,t) = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} \mu S dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dw_t =$$
$$= \frac{\partial C}{\partial S} dS + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt.$$

Поэтому

$$dY_p = \frac{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}}{C - \frac{\partial C}{\partial S} S} dt.$$

С другой стороны, портфель является безрисковым, и требование невозможности арбитража означает, что должно быть

$$dY_p = rdt \tag{6}$$

Следовательно, приравнивая правые части выписанных соотношений, получаем, что стоимость опциона должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных

$$L(C) = \frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0\,, \tag{7}$$

при этом из очевидных соображений должно выполняться конечное условие при $t = 0$ (этот момент рассматривается как момент истечения срока опциона):

$$C(S, 0) = \max(0, S - E).$$

Таким образом, теперь нам предстоит решить сформулированную задачу параболического типа с заданными конечными условиями. Интегрирование проведем следующим образом. Сначала последовательно осуществим две замены переменных: $S = \exp(u)$ и $C = D\exp(rt)$. В результате первой замены производные трансформируются:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial u}\exp(-u)\,,$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\exp(-2u) + \frac{\partial C}{\partial u}\exp(-2u)\,,$$

и коэффициенты при производных в уравнении (7) оказываются не зависящими от переменных задачи:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} - rC = 0\,.$$

В результате второй замены уравнение претерпевает дальнейшие упрощения:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial D}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial u^2} = 0\,. \tag{8}$$

Далее переменные u и t выразим через новые переменные v и τ по формулам: $u = v - \alpha\tau$, $t = -\tau$, где $\alpha = r - \sigma^2/2$. Частные производные функции D по новым переменным получаются с помощью якобиана предложенного преобразования. Имеем

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{\partial D}{\partial u}, \qquad \frac{\partial D}{\partial \tau} = -\alpha \frac{\partial D}{\partial u} - \frac{\partial D}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 D}{\partial u^2}.$$

Поэтому уравнение (8) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial v^2}.$$

Также трансформируется и конечное условие (теперь оно становится начальным при $\tau = 0$)

$$D(v, 0) = \max(0, \exp(v) - E).$$

Мы преобразовали задачу с дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа к стандартному виду. Ее решение задается в виде известного интеграла, а именно:

$$D(v,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(\exp(x) - E, 0) \exp\left(-\frac{(v-x)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dx.$$

Представим этот интеграл в виде разности двух интегралов

$$D(v,\tau) = I_1 - I_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln E}^{+\infty} \exp(x) \exp\left(-\frac{(v-x)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dx - \frac{E}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln E}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(v-x)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dx.$$

Рассмотрим оба слагаемые в выражении для искомой функции по отдельности. Сначала обратимся ко второму и осуществим в интеграле замену $y = (x-v)/(\sigma\tau^{1/2})$. Получим

$$I_2 = \frac{E}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\ln E - v}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = EN(D_2),$$

где $N(y)$ – кумулятивная функция распределения вероятности стандартной нормальной случайной величины (со средним 0 и дисперсией 1), а

$$D_2 = \frac{v - \ln E}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Перейдем к первому слагаемому. Его можно представить в виде

$$I_2 = \frac{E}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int\limits_{\ln E}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(v - x - \sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \exp\left(v + \frac{\sigma^2\tau}{2}\right) dx.$$

Осуществим в интеграле замену $y = (x – v – \sigma^2\tau)/(\sigma\tau^{1/2})$. Получим

$$I_2 = \frac{E}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(v + \frac{\sigma^2\tau}{2}\right) \int\limits_{\frac{\ln E - v - \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{+\infty} \sigma\sqrt{\tau} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dx = E \exp\left(v + \frac{\sigma^2\tau}{2}\right) N(D_1)$$

где

$$D_1 = \frac{v - \ln E + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Следовательно

$$D(v, \tau) = \exp\left(v + \frac{\sigma^2\tau}{2}\right) N(D_1) - EN(D_2).$$

Нам остается в этой формуле провести обратные замены переменных, а именно, v заменить величиной $u + (r - \sigma^2/2)\tau$, а u – функцией $\ln S$, и мы получим, что

$$D_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right), \tag{9}$$

$$D_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S}{E} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right) \tag{10}$$

и

$$C(S,\tau) = \exp(-r\tau)D(v,\tau) = SN(D_1) - E\exp(-r\tau)N(D_2)\,. \tag{11}$$

Интегрирование завершено.

3. Частичное хеджирование

Снова рассматриваются опционы на акцию. Движение цены S_t базовой акции удовлетворяет стохастическому уравнению Ито (5):

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dw_t\,,$$

где μ – коэффициент переноса, а σ^2 – коэффициент диффузии стохастического процесса $\ln S_t$, $\sigma > 0$. Стоимость опциона $C(S, t)$ определяется как решение дифференциального уравнения в частных производных

$$L(C) = \frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0$$

при конечном условии

$$C(S,0) = \max(0, S - E)\,.$$

Здесь будет уместно вспомнить, что доказательство этого утверждения основывается на том, что строится портфель $C - xS$ означающий хеджирование опционов базовыми акциями, где x – коэффициент хеджирования, выбираемый из тех соображений, чтобы доходность результирующего портфеля была детерминирована и равна r т.е.

$$\frac{dC - xdS}{C - xS} = rdt\,.$$

Нетрудно понять, что это соотношение фактически означает полное хеджирование опционов акциями, при этом коэффициент хеджирования непрерывным образом меняется так, что результирующий портфель оказывается просто безрисковым вложением по ставке r (изменение коэффициента должно сопровождаться и коррекцией вложенных в каждый актив средств, чтобы общая сумма инвестиции росла со ставкой r). Иными словами, стоимость опционов определяется из тех соображений, чтобы на рынке с акциями заданного типа, опционами и безрисковыми вложениями по ставке r не существовало бы возможностей для полностью безрискового арбитража.

Имея это в виду, рассмотрим теперь задачу частичного хеджирования опционов. Отказываясь на этот раз от полного хеджирования опционов, мы, тем самым, оставляем место для риска. При этом, как обычно, мотивация инвестора состоит в повышении доходности своего портфеля за счет увеличения риска. Воспользуемся тем обстоятельством, что произвольность выбора коэффициента x позволяет представить доходность портфеля $C - xS$ в виде (по аналогии с представлением доходности в соответствии с предыдущей формулой)

$$\frac{dC - xdS}{C - xS} = \alpha dt + \beta dw_t\,, \tag{12}$$

где α и β – некоторые константы, определяемые предпочтениями инвестора и имеющими обычный для стохастических уравнений Ито смысл, т.е. α – коэффициент переноса, β^2 – коэффициент диффузии процесса движения доходности портфеля, а w_t – стандартный винеровский процесс, тождественный процессу, определяющему движения цены на акцию в соответствии с формулой (5). Естественно считать, что параметры β и σ подчинены условию $0 \le |\beta| \le \sigma$. Также естественно считать, что $\mu \ge \alpha \ge r$. Хотя свойства процесса в правой части (12) (так же, как и процесса в правой части (5)) не зависят от знака β, как мы увидим ниже, в нашей задаче хеджирования знак β уже имеет значение.

Разрешим соотношение (5) относительно дифференциала dw_t и подставим его выражение в соотношение (12). Получим

$$\frac{dC - xdS}{C - xS} = \frac{\alpha\sigma - \mu\beta}{\sigma} dt + \frac{\beta}{\sigma}\frac{dS}{S}. \qquad (13)$$

Далее воспользуемся представлением дифференциала стоимости опциона как функции цены на акцию и времени, основанным на свойствах стохастических интегралов Ито. А именно, имеет место

$$dC(S,t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S} - x\right)dS. \qquad (14)$$

Подставляя его в равенство (13), получаем

$$\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S} - x\right)dS}{C - xS} = \frac{\alpha\sigma - \mu\beta}{\sigma} dt + \frac{\beta}{\sigma}\frac{dS}{S}. \qquad (15)$$

Приравнивая выражения в обеих частях равенства при обоих дифференциалах – dt и dS, получаем два уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\alpha\sigma - \mu\beta}{\sigma}\left(C - xS\right), \qquad (16)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} - x = \left(C - xS\right)\frac{\beta}{\sigma S}. \qquad (17)$$

Из второго уравнения определим коэффициент хеджирования

$$x = \frac{\sigma\frac{\partial C}{\partial S} - \beta\frac{C}{S}}{\sigma - \beta} \qquad (18)$$

и подставим его в первое. В результате получим дифференциальное уравнение в частных производных, которому должна удовлетворять стоимость опциона

$$\overline{L}(C) = \frac{\partial C}{\partial t} + \varepsilon S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \varepsilon C = 0\,, \qquad (19)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\alpha\sigma - \mu\beta}{\sigma - \beta}\,. \qquad (20)$$

Таким образом, мы обнаруживаем, что стоимость опциона удовлетворяет не только уравнению $L(C) = 0$, но также и уравнению $\overline{L}(C) = 0$, полученному из первого заменой параметра r на ε. Вычитая одно уравнение из другого, приходим к равенству

$$\overline{L}(C) - L(C) = 0\,,$$

из которого следует, что

$$(\varepsilon - r)\left(S \frac{\partial C}{\partial S} - C\right) = 0\,. \qquad (21)$$

В соответствии со свойствами опционов (см., например, [3]) имеем соотношение

$$S \frac{\partial C}{\partial S} - C = SN(D_1) - SN(D_1) + XN(D_2) = XN(D_2) > 0\,,$$

где

$$D_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S}{X} + \frac{\sigma^2\tau}{2}\right), \quad D_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S}{X} - \frac{\sigma^2\tau}{2}\right), \quad X = E\exp(-r\tau)$$

(здесь, как обычно, принято обозначение $\tau = -t$). Поэтому из (21) вытекает равенство $\varepsilon = r$, что вместе с представлением (20) дает соотношение

$$r = \frac{\alpha\sigma - \mu\beta}{\sigma - \beta}.$$

Разрешая это уравнение относительно α, получаем

$$\alpha = r\left(1 - \frac{\beta}{\sigma}\right) + \mu\frac{\beta}{\sigma}.$$

Это соотношение связывает среднюю доходность результирующего портфеля, отраженную в параметре α, с его риском, характеризуемым параметром стандартного отклонения β.

Отметим простые свойства частичного хеджирования:

1. Соотношение $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\mu - r}{\sigma} > 0$ соответствует естественному свойству портфеля, означающему, что с ростом риска увеличивается и доходность портфеля.

2. Несмотря на то, что винеровский процесс является симметричным относительно нуля, хеджирования при одинаковых по абсолютной величине, но разных по знаку значениях β различаются между собой, поскольку у них различны значения параметров α. Легко объяснимо то, что знак β при хеджировании оказывает влияние на результат: образно говоря, при положительных β хеджирование просто снижает амплитуду колебаний стоимости опциона, не меняя их фазы, а при отрицательных β амплитуда колебаний снижается в той же степени, но при этом меняется и фаза колебаний, и именно вследствие этого приходится "перехеджировать" опцион за счет соответствующего повышения коэффициента хеджирования. Из свойства 1 вытекает, что параметр α принимает большие значения при положительных β, чем при отрицательных и равных им по абсолютной величине. Более того, при отрицательных β параметр α принимает значения меньше r, что делает использование отрицательных β не-

оправданным (при $\beta = -\sigma r/(\mu - r)$ параметр переноса α и вовсе обращается в нуль).

3. Из формулы (18) для коэффициента хеджирования x вытекает справедливость представления

$$x = \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\beta}{\sigma - \beta}\left(\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{C}{S}\right).$$

Эта формула может быть переписана, если воспользоваться свойствами опционов

$$x = N(D_1) + \frac{\beta}{\sigma - \beta}\frac{E\exp(-r\tau)}{S}N(D_2). \qquad (19)$$

Учитывая неравенства $\frac{\partial C}{\partial S} > \frac{C}{S}$ (свойство опционов) и $0 \le \beta \le \sigma$, мы получаем соотношение

$$x \ge \frac{\partial C}{\partial S} > \frac{C}{S} > 0,$$

а также, что при $\beta = 0$ коэффициент частичного хеджирования совпадает с дельтой опциона, а при положительных β этот коэффициент строго превышает дельту опциона. При $\beta \to \sigma$ коэффициент частичного хеджирования стремится к бесконечности, что означает стремление доли опционов в портфеле к 0. Иными словами, при $\beta = 0$ мы имеем дело с полным (безрисковым) хеджированием, при этом $\alpha = r$, а при $\beta = \sigma$ хеджирование фактически не применяется.

4. Страхование портфеля

Рассмотрим теперь несколько вариантов хеджирования с использованием опционов, применение которых в портфельной теории является более традиционным.

4.1. Обратимся сначала к задаче хеджирования, называемой в финансовой теории страхованием портфеля. Снова речь идет о рынке ценных бумаг, на котором присутствуют акции одного типа, цена на которые удовлетворяет дифференциальному стохастическому уравнению (5), опционы колл (или пут) на эти акции и безрисковые ценные бумаги со ставкой r. Задача инвестора, вкладывающего определенную сумму денег в этот рынок, состоит в максимизации дохода в некоторый будущий момент времени при условии, что он не будет меньше заданной величины. Такая задача обычно решается следующим образом. Обозначим сумму инвестиции в начальный момент времени $t = 0$ через I_0 (здесь мы используем переменную t, обозначающую прямой ход времени, и будущий момент времени окончания инвестиции будем считать равным T). Наложим ограничение на сумму инвестиции в конечный момент $t = T$ в форме неравенства $I_T \geq E$. Пусть цена акции в момент $t = 0$ равна S_0, а стоимость пута с ценой исполнения E составляет $P(S_0, 0; E)$. Проблема инвестора в отношении выполнения ограничения будет решена, если он приобретет акции на сумму S_0 с одновременной покупкой пута на эти акции с тем же номиналом, так чтобы выполнялось соотношение

$$I_0 = S_0 + P(S_0, 0; E). \tag{23}$$

Действительно, как следует из определения пута, в момент времени $t = T$ капитал инвестора составит

$$I_T = S_T + \max(E - S_T, 0) = \max(E, S_T) \geq E,$$

т.е. ограничение на сумму инвестиции выполняется. Отметим еще, что уравнение (23) относительно S_0 имеет положительное решение при выполнении неравенства

$$I_0 \geq E\exp(-rT), \tag{24}$$

поскольку из теоремы паритета пут/колл следует, что

$$I_0 = S_0 + P(S_0,0;E) = E\exp(-rT) + C(S_0,0;E),$$

и неравенство (24) справедливо, так как должно быть $C \geq 0$.

Сумма инвестиции в момент $t = T$ является случайной величиной, распределение которой определяется распределением случайной величины S_T, которое, в свою очередь, находится в результате решения дифференциального уравнения в частных производных параболического типа. Обозначим плотность вероятности S_T через $p_S(x)$. Тогда математическое ожидание случайной величины I_T составит

$$MI_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(E, x) p_S(x) dx = E \cdot P(S_T \leq E) + \int_{E}^{+\infty} x p_S(x) dx . \qquad (25)$$

Это математическое ожидание можно выразить через кумулятивную функцию распределения вероятностей стандартной нормальной случайной величины. Для этого соотношение (25) удобнее переписать в терминах распределения вероятностей случайной величины $\ln S_T$. Имеем

$$MI_T = E \cdot P(\ln S_T \leq \ln E) + \int_{\ln E}^{+\infty} \exp(x) p_{\ln S}(x) dx . \qquad (26)$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что случайная величина $\ln S_T$. имеет нормальное распределение со средним $\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T$ и дисперсией $\sigma^2 T$. Тогда первое слагаемое в правой части (26) запишется следующим образом:

$$E \cdot P(\ln S_T \leq \ln E) = E \cdot N\left(\frac{\ln E - \ln S_0 - \left(\mu - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right),$$

где

$$N(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\,.$$

Преобразуем теперь второе слагаемое в правой части (26):

$$S_0\int_{\ln E-\ln S_0}^{+\infty}\exp(x)p_\xi(x)dx=$$

$$=\frac{S_0}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\cdot\int_{\ln E-\ln S_0}^{+\infty}\exp(x)\exp\left(-\frac{(x-(\mu-\sigma^2/2)T)^2}{2\sigma^2T}\right)dx=$$

$$=S_0\exp(\mu T)\cdot\int_{\frac{\ln E-\ln S_0-(\mu+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=S_0\exp(\mu T)\cdot\left(1-N\left(\frac{\ln E-\ln S_0-(\mu+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$MI_T=E\cdot N\left(\frac{\ln E-\ln S_0-(\mu-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+ \\ +S_0\exp(\mu T)\cdot\left(1-N\left(\frac{\ln E-\ln S_0-(\mu+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right). \qquad (27)$$

В отсутствии ограничения на сумму инвестиции в момент $t=T$ в последней формуле следует положить $E=0$ и $\ln E=\infty$, и мы получаем

$$MI_T=S_0\exp(\mu T), \qquad (28)$$

что совпадает просто с математическим ожиданием процесса S_t в момент $t=T$.

4.2. Изложенный способ хеджирования не является единственным приемлемым в данной ситуации. Во-первых, ограничение на сумму инвестиции может задаваться не только в последний момент инвестиционного горизонта, но также и на всем протяжении инвестиции. Во-вторых, и в отсутствии такого ограничения можно прибегнуть к переформированию портфеля, если складывающаяся на рынке ситуация к этому подталкивает (хотя такое поведение уже в меньшей степени будет напоминать инвестиционный процесс, а скорее, спекуляцию).

Как еще можно поступить? Проведем из точки E в момент $t = T$ линию $E\exp(-r(T-t))$ ходом назад и определим стратегию управления портфелем следующим образом. Сначала всю инвестиционную сумму вкладываем в акции (это возможно в силу неравенства (24)), а далее ждем либо окончания процесса в момент $t = T$, либо достижения траекторией движения цены акции линии $E\exp(-r(T-t))$ – в зависимости от того, что наступит раньше. Во втором случае траектория поглощается этой границей, а это означает, что весь капитал на момент достижения границы инвестор вкладывает в безрисковые бумаги (для этого он, разумеется, сначала продает все свои акции), после чего портфель до конца инвестиционного горизонта не меняется.

Очевидно, что при таком правиле формирования портфеля неравенство (24) выполняется. Сложнее обстоит дело с определением математического ожидания портфеля в момент $t = T$. Известно (см., например, [1]), что математическое ожидание функционала на траекториях диффузионного процесса вида $u(t,x) = \mathrm{M}_{t,x}\varphi(x_\gamma)$, где φ – функция достаточного общего вида, γ – обозначение границы, t и x – начальный момент и начальное значение процесса соответственно, является решением граничной задачи для параболического дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b(t,x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{29}$$

при граничном условии

$$u(t, x_\gamma) = \varphi(x_\gamma) \tag{30}$$

(здесь $a(t,x)$ – коэффициент переноса, а $b(t,x) > 0$ – коэффициент диффузии процесса).

Нетрудно видеть, что этот теоретический факт можно непосредственно применить к нашей проблеме. Для этого достаточно положить $a(t,x) = \mu$, $b(t,x) = \sigma^2$, а для определения математического ожидания суммы инвестиции в момент $t = T$ функцию $\varphi(x_\gamma)$ следует задать правилом $\varphi(x_\gamma) = S_T$, если траектория движения цены акции не выходит на границу до момента $t = T$, и $\varphi(x_\gamma) = E$, если эта траектория достигает границы ранее этого момента.

При таком граничном условии решение задачи (29), (30) в точке $x = S_0$ на момент $t = 0$ дает искомое математическое ожидание суммы инвестиции. К сожалению, в нашем случае получить удобную аналитическую формулу, дающую решение этой задачи, затруднительно, и для необходимых расчетов следует использовать известные численные методы: метод сеток или метод статистических испытаний Монте-Карло.

4.3. Обратимся теперь к дельта-хеджированию коллов. Имеется в виду, что в момент $t = 0$ против длинной позиции по коллам номинального объема открывается короткая позиция по базовым акциям в объеме, доля которого от номинального количества опционов составляет

$$\Delta = N(D_1)\,, \qquad D_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{E\exp(-rT)} + \frac{\sigma^2 T}{2}\right).$$

В результате такой комбинации длинной позиции по коллу и короткой позиции по акциям получается портфель стоимостью

$$I_0 = C(S_0, 0; E) - \Delta \cdot S_0\,. \tag{31}$$

Напомним, что коэффициент хеджирования $\Delta = N(D_1)$ совпадает с $\frac{\partial C}{\partial S}$ и называется дельтой опциона. Эта процедура хеджирования обычно используется для ничейных коллов. Она отражает стремление трейдеров играть на волатильности, а не на направленном смещении рынка. Отметим, кстати, что в отсутствие ограничений на переформирование портфеля дельта-хеджирование приводит к построению портфеля, эквивалентного безрисковому вложению по ставке r. Мы, однако, будем рассматривать инвестиционный (статический) вариант хеджирования, при котором переформирования портфеля не предполагается.

Определим характеристики такого портфеля в момент окончания инвестиционного процесса $t = T$. Недопустимость переформирования портфеля означает, что величина Δ определяется по начальному значению цены акции S_0 в момент времени $t = 0$ и в процессе движения цены акции и стоимости портфеля этот коэффициент не меняется. В конце инвестиционного горизонта, т.е. в момент $t = T$, сумма инвестиции составит

$$\max(0, S_T - E) - \Delta \cdot S_T = \max(E, S_T) - E - \Delta \cdot S_T\,.$$

Математическое ожидание первого слагаемого в правой части равенства дается формулой (27), второго слагаемого – совпадает с $-E$, а третьего – равно (см. формулу (28))

$$-\Delta \cdot S_0 \exp(\mu T).$$

Поэтому имеем

$$MI_T = E\left(N\left(\frac{\ln E - \ln S_0 - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - 1 \right) + S_0 \exp(\mu T) \times \\ \times \left(1 - \Delta - N\left(\frac{\ln E - \ln S_0 - (\mu + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right). \quad (32)$$

Сравним суммы инвестиции в начале и конце инвестиционного процесса, т.е. формулы (31) и (32), в часто используемом на практике случае с ничейным опционом и малым временем до истечения его срока. Для этого следует положить в этих формулах $S_0 = E$. Кроме того, будем считать, что $\mu = r = 0$, а T – мало. Имеем

$$D_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{E\exp(-rT)} + \frac{\sigma^2 T}{2} \right) = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},$$

$$D_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{E\exp(-rT)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \right) = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2},$$

$$\Delta = N(D_1) \approx \frac{1}{2} + \frac{D_1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{2\pi}},$$

$$N(D_2) \approx \frac{1}{2} + \frac{D_2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{2\pi}},$$

$$C(S_0,0;E)=S_0N(D_1)-EN(D_2)\approx E\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому из формулы (31) следует, что

$$I_0\approx E\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}-E\left(\frac{1}{2}+\frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{2\pi}}\right)=-\frac{E}{2}\left(1-\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Далее, аппроксимируя аналогичным образом равенство (32), также получаем, что

$$MI_T\approx-\frac{E}{2}\left(1-\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\right),$$

т.е.

$$MI_T\approx I_0.$$

Это приближенное равенство означает, что в сформулированных предположениях относительно параметров опциона ожидаемое значение суммы инвестиции совпадает с начальной суммой инвестиции, что и соответствует назначению дельта-хеджирования.

4.4. Теперь рассмотрим частичное дельта-хеджирование, при котором коэффициент хеджирования выбирается в соответствии с формулой (15), связанной с частичным хеджированием коллов. В остальном все остается прежним, как в п.4.3. Имеется в виду, что снова в момент $t=0$ против длинной позиции по коллам номинального объема открывается короткая позиция по базовым акциям, но на этот раз в объеме, равном доле $\widetilde{\Delta}$ от номинала, определяемой формулой (22), т.е.

$$\widetilde{\Delta} = N(D_1) + \frac{\beta}{\sigma - \beta}\frac{E\exp(-rT)}{S_0}N(D_2).$$

Этот коэффициент также не меняется до конца инвестиционного горизонта. Нетрудно видеть, что все формулы п. 4.3. сохраняют силу с заменой параметра Δ на $\widetilde{\Delta}$. Поэтому имеем окончательное представление математического ожидания суммы инвестиции в момент $t = T$ в виде

$$MI_T = E\left(N\left(\frac{\ln E - \ln S_0 - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - 1\right) + S_0\exp\left(\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)\times$$

$$\times\left(1 - \widetilde{\Delta} - N\left(\frac{\ln E - \ln S_0 - \mu T - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right).$$

Поскольку при $\beta > 0$ выполняется $\widetilde{\Delta} > \Delta$, то и ожидаемая сумма инвестиции при частичном дельта-хеджировании превышает (по абсолютной величине) ожидаемую сумму инвестиции при обычном дельта-хеджировании (нужно учесть, что стоимость портфеля при используемом нами способе дельта-хеджирования, т.е. варианте выбора знаков длинной и короткой позиций, получается отрицательной).

5. Ценообразование опционов в отсутствие безрисковых активов

Конструкция, предложенная в п.3. и задаваемая соотношением (9), может быть использована при изучении вопросов оценивания опционов на рынке, свойства которого отличны от принятых ранее. На этот раз вместо безрискового актива будет рассматриваться еще один, наряду с акциями, рисковый актив, движение цены которого также удовлетворяет дифференциальному стохастическому уравнению типа (5), но с иными параметрами, а именно

$$\frac{dB_t}{B_t} = adt + bdw_t', \tag{33}$$

где a – коэффициент переноса, а b^2 – коэффициент диффузии процесса B_t. При этом w_t' – стандартный винеровский процесс, однако он, вообще говоря, может не быть тождествен аналогичному процессу w_t, описывающему движение цены акции по формуле (5). Снова для определенности будем считать, что $b \geq 0$. На параметры процессов накладываются условия

$$0 \leq b \leq \sigma, \qquad 0 \leq a \leq \mu .$$

Возникновение такой модели понятно: поскольку безрисковых активов в реальности не существует, речь идет о попытке замены безрискового актива из классической модели на находящийся под риском (пусть и небольшим) актив. Движение цены такого актива и описывается стохастическим процессом B_t. Естественно считать этот актив низкорисковым (и низкодоходным) и потому параметр β – малой величиной, однако формально это и необязательно.

Отметим еще, что хотя в модели мы допускаем произвольную вероятностную связь процесса w_t' с процессом w_t, возможно, более реальное предположение состоит в их полной коррелированности. Это отвечало бы представлениям о прямом или обратном воздействии случайных возмущающих факторов на все процессы на рынке (в нашей модели их два). В таком случае при полной положительной коррелированности процессов следовало бы полагать $w_t' = w_t$, а при их полной отрицательной коррелированности $w_t' = -w_t$.

Наша задача состоит в определении стоимости коллов и путов на акции в новых рыночных условиях. Воспользуемся методом определения стоимости опционов, применявшимся при определении стоимости опционов по модели Блэка-Шоулза, и проведем в нем необходимые изменения. Вспомним, что в основе метода определения стоимости опциона лежит идея о невозможности арбитража на эффективном рынке, а роль альтернативного портфелю из акций и опционов вложения играет безрисковый актив. Теперь такой портфель следует сравнивать с вложением B_t. На наш взгляд, можно использовать два способа сравнения. Один из них осуществляет сравнение двух процессов (в широком смысле) по коэффициентам переноса и диффузии, а другой – требует сопоставления (в узком смысле) целиком их вероятностных распределений. Второму способу мы уделим некоторое внимание лишь в конце параграфа, а сейчас обратимся к первому. При использовании первого способа следует учесть, что логика финансового рынка диктует его участникам поведение, исключающее образование портфелей, которые были бы по обоим параметрам одновременно хуже или одновременно лучше для одной из сравниваемых альтернатив. Иными словами, коэффициент переноса портфеля не должен превышать a, притом, что одновременно его коэффициент диффузии меньше b^2, или наоборот. Если еще принять во внимание идентичность участников рынка по рисковым предпочтениям (обычно принимаемое в таких моделях предположение), то следует признать, что лучшее решение проблемы выбора портфеля по первому способу состоит в определении такой стоимости опциона, которая привела бы к построению портфеля, эквивалентного B_t по параметрам a и b. Заметим, что здесь речь идет об эквивалентности, а не тождественности, поскольку портфель и процесс B_t могут иметь одинаковые вероятностные характеристики, но не совпадать между собой, т.е. быть образованными разными стандартными винеровскими процессами.

Итак, рассматривается портфель $S_p = C - xS$, где коэффициент хеджирования x подлежит определению из тех соображений, что должно выполняться равенство для стохастических дифференциалов:

$$\frac{dC - xdS}{C - xS} = adt \pm bdw_t\,. \tag{34}$$

Знак перед коэффициентом b может быть произвольным, поскольку мы считаем равноценными портфели, вероятностные распределения которых одинаковы, притом, что их корреляционные связи с исходным процессом S_t могут различаться. Оказывается, что для каждого знака в (34) возможно свое решение и в зависимости от этого знака будет определяться как коэффициент хеджирования, так и вытекающая из такой конструкции стоимость опциона.

Соотношение (34) совпадает по форме с равенством (12), хотя интерпретация на этот раз иная. В равенстве (12) стоимость колла уже определена из соотношения (11), где δ – безрисковая ставка, в то время как равенство (34) именно предназначено для определения стоимости опциона, так как безрискового вложения на рынке сейчас нет. Кроме того, в равенстве (12) параметры α и β являются предметом выбора инвестора, тогда как в соотношении (34) параметры a и b – императив рынка. Именно поэтому, чтобы продемонстрировать смысловое отличие равенства (34) от (12), мы заменили в (34) обозначения коэффициентов переноса и диффузии, но поскольку мы в то же время хотим подчеркнуть преемственность возникающих здесь и в п.3 конструкций, в качестве обозначений этих коэффициентов вместо греческих букв используются на этот раз их латинские аналоги. Тем не менее, все последующие преобразования равенства (34) могут быть проведены, как и в случае с равенством (12). А именно, сначала разрешаем равенство (5) относительно dw_t и подставляем результат в (34). Так получается аналог равенства (18). Далее, используя представление для дифференциала стоимости опциона (14), приходим последовательно к равенствам (15), (16), и (17). Из них получаем выражение для коэффициента хеджирования (18) и, наконец, дифференциальное уравнение в частных производных (19), которому должна удовлетворять стоимость колла (в уравнении введено обозначение, задаваемое равенством (20)). Учитывая еще привычное конечное условие для колла, окончательно имеем, что стоимость колла является решением уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \varepsilon S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \varepsilon C = 0, \qquad \varepsilon = \frac{a\sigma \mp \mu b}{\sigma \mp b},$$

при конечном условии

$$C(S,T;E) = \max(0, S-E).$$

Здесь и ниже верхние знаки в формуле для ε соответствуют верхнему знаку в формуле (34). Мы уже знаем решение этой задачи – оно дается равенствами (9), (10) и (11) с той лишь разницей, что параметр r заменен на ε. Имеем

$$C(S,\tau) = SN(D_1) - E\exp(-\varepsilon T) N(D_2),$$

где

$$D_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\frac{S}{E} + \left(\varepsilon + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right),$$

$$D_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\frac{S}{E} + \left(\varepsilon - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right).$$

Таким образом, отличие данного решения от прежнего заключается лишь в значении одного параметра. Нетрудно видеть, что в нашем случае оказываются справедливыми и прежние формулы для стоимости пута, если в них заменить параметр r параметром ε. Поэтому верна (с той же оговоркой) и теорема паритета пут/колл. Все свойства опционов на традиционно рассматриваемом рынке сохраняют силу и для данного случая, если не считать возможности того, что параметр ε может принимать отрицательные значения (см. свойство 2 ниже). Интересно отметить и некоторые свойства нового решения, связанные с возможными значениями параметра ε и зависимостью решения от определяющих параметр ε параметров a, b, μ и σ:

1. Поскольку параметр ε принимает два значения в соответствии с двумя знаками при параметре b в формуле (34), то возможны два решения, достигающие поставленной цели, т.е. два варианта стоимости колла.
2. При снижении параметра диффузии (включая его переход в область отрицательных значений) происходит убывание коэффициента хеджирования и возрастание опционной компоненты портфеля. В момент перехода параметра диффузии через нуль дифференциал опционной компоненты портфеля начинает превышать дифференциал компоненты с акциями, за счет чего дифференциал портфеля оказывается противоположным по знаку к дифференциалу винеровского процесса w_t. Этим и объясняется возможность появления второго решения задачи.
3. Точная репликация (с вероятностью 1) длинной позиции по активу B_t портфелем $S_p = C - xS$ (равенство двух позиций в узком смысле) возможна лишь при полной коррелированности процессов w_t' и w_t, когда в соотношении (33) либо $w_t' = w_t$, либо $w_t' = -w_t$ и соответственно этому знак перед b в соотношении (34) выбирается либо «плюс», либо «минус». Вследствие этого решение задачи будет единственным.

4. Параметр ε и решение в целом (стоимость опциона) зависят от значения параметра μ, что явно отличает данное решение от прежнего, делая его ближе к реальности.
5. Имеет место равенство $\varepsilon = a \mp b \dfrac{\mu - a}{\sigma \mp b}$, и потому $\varepsilon < a$ и $\varepsilon > a$ для знаков "–" и "+" соответственно. При $\varepsilon > 0$ это обстоятельство допускает определенную интерпретацию, состоящую в том, что параметр ε можно рассматривать как «фиктивную» безрисковую ставку – «фиктивную» потому, что такой ставки на рынке фактически не существует. Однако при этом на рынке присутствует низкорисковый актив B_t, параметры которого не противоречат основному постулату финансового рынка – с ростом риска (b>0) должна расти и доходность (a>ε).
6. Параметр ε может принимать и отрицательные значения. Такое случается при выполнении неравенства $\mu/a > \sigma/b$, т.е. когда отношение коэффициентов переноса (аналог средней доходности) двух процессов S_t и B_t превышает отношение их коэффициентов диффузии (аналог рисковости).
7. Легко проверяется справедливость двух неравенств $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial a} = \dfrac{\sigma}{\sigma \mp b} > 0$ и $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial b} = -\dfrac{(\mu - a)\sigma}{(\sigma - b)^2} < 0$ (второе из них записано лишь в версии формулы (34) с положительным знаком при b). Из них следует, что при возрастании a стоимость колла возрастает, а при возрастании b (когда знак при b в формуле (34) положителен) – убывает. Для такого вывода достаточно учесть, что при возрастании параметра ε стоимость колла возрастает (см., например, [3], свойство 7 опционов).

Литература

1. Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. 498 с.
3. Агасандян Г.А. Обобщенные опционы. М.: ВЦ РАН, 2000. 20 с.