РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Г.А.АГАСАНДЯН

ПРИНЦИП МИНИМУМА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДОХОДА НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ОДНОПЕРИОДНОМ РЫНКЕ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2006

УДК 519.685

Ответственный редактор
доктор техн. наук Ф.И. Ерешко

В работе рассматривается построение квазиоптимального портфеля инвестора для произвольного одноперидного рынка. Методика, развитая автором ранее, обобщается на случай, когда инвестор дает лишь частичный прогноз вероятностных свойств рынка. Для нахождения такого портфеля применяется уже апробированный для опционного рынка принцип минимума относительного дохода. Методика основана на параметризации прогнозного распределения вероятностей выделенных сценариев стохастической динамики рынка. Как обычно, при использовании многоступенчатого критерия VaR рисковые предпочтения инвестора задаются возрастающей функцией критических доходов. Строится вычислительный алгоритм и приводятся результаты численных примеров.

Рецензенты: В.Е. Кривцов,
Ю.А. Флеров

Научное издание

Работы автора [1–10] посвящены исследованию моделей оптимального поведения инвестора на финансовых однопериодных рынках. В них предполагается, что инвестор обладает собственным представлением относительно вероятностных свойств будущей цены лежащего в основе опционов (базового) актива. Инвестор также характеризуется своими рисковыми предпочтениями, задаваемыми возрастающей функцией критических доходов. Именно на основании этой функции инвестор формирует и использует свой индивидуальный континуальный (или многоступенчатый) критерий VaR.

В первых работах [1–7] алгоритмы нахождения оптимального (или квазиоптимального в случае дискретной модели) портфеля строились для рынка опционов, при этом в [6] моделировалась и изучалась ситуация, когда инвестор строит лишь частичный прогноз опционного рынка. В работах [8-10] предлагается обобщение основной модели опционного рынка на случай однопериодного рынка достаточно произвольной природы. В настоящей работе делается попытка совмещения идей упомянутых работ [6] и [8-10], т.е. рассматривается проблема построения квазиоптимального портфеля инвестора с частичным прогнозом будущего поведения рынка на однопериодном рынке произвольной природы. Этот портфель мы далее будем называть просто *оптимальным*.

1. Предположения модели управления портфелем

Вкратце напомним предположения модели управления портфелем, рассмотренной в работах [8-10], а затем введем в нее необходимые дополнения. Рассматривается однопериодный рынок, на котором торгуют n элементарными финансовыми инструментами. В это число не включаются инструменты, являющиеся комбинациями (портфелями) этих элементарных инструментов. Как обычно, мы будем пренебрегать трансакционными издержками. Функционирование рынка подчинено действию ряда случайных факторов. Их различные сочетания называются сценариями, которые являются выборочными точками, вообще говоря, многомерного пространства факторов. Реализация любого сценария приводит к получению инвестором определенного дохода по каждой из рассматриваемых ценных бумаг. Множество всех сценариев обозначается Ω.

Истинное распределение вероятностей на этом множестве (если о наличии такового имеет смысл говорить) не известно. Однако понятно, что оно некоторым образом проявляется в доходах по ценным бумагам и их ценах. При этом в ценообразовании инструментов играют немаловажную роль и субъективные факторы, которые привносят искажения в справедливые цены.

Предполагается, что инвестор имеет собственное представление относительно распределения вероятностей в пространстве Ω. Как и в [8-10], инвестор некоторым образом будет строить разбиение пространства сценариев Ω на n подмножеств и в соответствии со своим прогнозом приписывать им вероятности. Предположение о совпадении количеств элементов во множествах I и Ω существенно для реализации алгоритма, так как оно, во-первых, позволяет провести необходимый анализ, а во-вторых, не ограничивает общности, так как выбор множества Ω находится в распоряжении инвестора. В дальнейшем множества I и Ω будем отождествлять.

Как обычно, рисковые предпочтения инвестора задаются в форме непрерывной возрастающей функции критических доходов. Однако применительно к рассматриваемому дискретному случаю будут использоваться лишь ее значения в дискретном множестве точек, хотя заранее и не известно, в каком именно.

На рынке выделяются так называемые элементарные ценные бумаги $\hat{s}_i$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, никакая из которых не представима в виде линейной комбинации остальных. Стоимость произвольного инструмента $\hat{w}$ обозначается $|\hat{w}|$. Стоимости $|\hat{s}_i|$ всех элементарных инструментов $\hat{s}_i$ заданы, при этом $|\hat{s}_i| = m_i$, $i \in I$.

Длинная позиция по инструменту $\hat{s}_i$ в количестве одного экземпляра порождает случайный доход y_i. При реализации сценария j эта позиция дает доход $\hat{s}_i(j) = y_{ij}$. Для матрицы этих доходов, имеющей размерность $n \times n$, используется обозначение

$$\boldsymbol{Y} = \|y_{ij}\|, \quad i \in I, \quad j \in \Omega = I.$$

Почти все формулируемые далее свойства касаются переменных, рассматриваемых, как правило, на множестве I, и в случае, когда у переменной присутствует индекс и не оговорено иное, автоматически принимается, что он пробегает все множество I, и потому включение $i \in I$ опускается. Равным образом опускается это включение, когда речь идет о суммировании. При условии, что выражение содержит более одного индекса, указывается лишь, по какому индексу ведется суммирование.

Инструмент называется *базисным*, если он дает единичный доход при реализации лишь одного сценария и нулевой доход – при остальных. Всего в нашей конструкции могут существовать n базисных инструментов. Базисный инструмент, который дает единичный доход при реализации именно сценария i, обозначается $\hat{u}_i$. Как показано в [10], воспроизведение (репликация) базисных инструментов на основе n элементарных инструментов $\hat{s}_i$ производится по следующему правилу.

Если представить $\hat{u}_i$ в виде портфелей элементарных инструментов

$$\hat{u}_i = \textstyle\sum_{j \in I} z_{ij}\, \hat{s}_j \tag{1}$$

и использовать обозначение векторного инструмента

$$\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_n), \tag{2}$$

то совокупность n представлений (1) можно записать в матричной форме:

$$\hat{\boldsymbol{u}}^T = \boldsymbol{Z}\, \hat{\boldsymbol{s}}^T, \qquad \boldsymbol{Z} = \|z_{ij}\|, \quad \boldsymbol{Z}\, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{E}.$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица.

При условии, что у матрицы $\boldsymbol{Y}$ существует обратная,

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}^{-1} \tag{3}$$

и потому

$$\hat{\boldsymbol{u}}^T = \boldsymbol{Y}^{-1} \hat{\boldsymbol{s}}^T. \tag{4}$$

Из цен m_i элементарных инструментов $\hat{s}_i$ с использованием (3) определяются цены всех базисных инструментов $\hat{u}_i$. Вводя вектор $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2,\dots, c_n)$, находим

$$c_i = |\hat{u}_i| = \textstyle\sum_{j\in I} m_j\, y_{ij}^{(-1)}.$$

Это соотношение в матричной форме принимает вид

$$\boldsymbol{c}^T = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{m}^T. \tag{5}$$

После умножения всех этих цен на один и тот же нормирующий множитель

$$r_{rf} = 1/\textstyle\sum_j c_j, \tag{6}$$

называемый *наведенным безрисковым относительным доходом*, получаются так называемые *наведенные вероятности* сценариев, образующие вектор

$$\boldsymbol{c}^\circ = r_{rf}\,\boldsymbol{c}. \tag{7}$$

Сумма компонент этого вектора уже равна 1. Параметр r_{rf} показывает, какая безрисковая доходность может быть достигнута на рынке за рассматриваемый период времени. Обычно на реальном рынке параметр r_{rf} должен быть слегка выше 1.

В векторе $\boldsymbol{c}$ (а также в его нормированном аналоге $\boldsymbol{c}^\circ$) проявляются совместные интересы и действия всех участников рынка, и именно с его помощью инвестор тестирует свои представления о вероятностных свойствах сценариев, выбирает стратегию своего поведения на рынке и строит на основе этого представления оптимальный для себя портфель элементарных инструментов.

Все изложение до настоящего момента практически полностью повторяло содержание работ [8-10]. Но теперь, когда мы приступаем к описанию прогноза вероятностных свойств рынка, принятого инвестором, нам потребуется ввести некоторые коррективы. Как говорилось во введении к настоящей работе, инвестор в рассматриваемой модели ограничивается лишь частичным вероятностным прогнозом. Имеется в виду, что инвестор, будучи уверенным лишь в части свойств распределения на множестве сценариев, именно относительно этой части и строит свои предсказания. В остальном же он следует за тенденциями рынка, полностью ему доверяясь. Такой подход применительно к опционному рынку был изложен в работе [6]. Там же для решения задачи в этой постановке был предложен подход, связанный с критерием минимума дохода. К его применению мы обратимся далее в п. 2. Наша задача состоит в распространении этого подхода на рассматриваемую модель рынков.

Формализуем представление инвестора о вероятностных свойствах рынка и его рисковые предпочтения. Введем параметр θ, который будет отвечать за всю неопределенность предсказания инвестора. Будем считать, что прогноз инвестора задается однопараметрическим вектором вероятностей на множестве сценариев

$$\boldsymbol{d}(\theta) = (d_1(\theta), d_2(\theta), \ldots, d_n(\theta)), \qquad \theta \in \Theta, \tag{8}$$

где Θ – множество возможных значений параметра θ. В принципе, и сам параметр θ также может быть вектором.

В работе принимается, что множество Θ конечно. Нет смысла в качестве Θ рассматривать континуальное множество в модели, которую мы и так уже сделали достаточно огрубленной в том, что касается сценариев. Тем более что в параметре θ сосредоточены характеристики инвестора, затрагивающие психологическую сторону его поведения, и здесь рассчитывать на получение точных результатов не приходится.

Итак, свой прогноз инвестор формирует с точностью до неизвестного параметра θ. Процедура, рассмотренная в [8-10], требует для нахождения оптимального портфеля инвестора сопоставлять введенный вектор (8) с вектором (7) либо с вектором (5). Поэтому многие из вводимых в следующем разделе привычных агрегатов оказываются зависящими от θ.

Рисковые предпочтения инвестора, как и в работах [1–10], описываются монотонно возрастающей функцией критических доходов

$$B_{cr}(\varepsilon), \qquad \varepsilon \in [0, 1].$$

Требуется, чтобы для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ выполнялись неравенства

$$P_t\{R < B_{cr}(\varepsilon)\} \le \varepsilon\,,$$

где $P_t\{E\}$ – вероятностная мера события E с точки зрения инвестора, R – случайный доход от инвестиции. При этом предпочтение отдается меньшим значениям ε, т.е. удовлетворять эти неравенства нужно, начиная с $\varepsilon = 0$ и продвигаясь в сторону все больших значений по возможности вплоть до $\varepsilon = 1$.

В данной работе, как это часто делалось и ранее, мы будем проводить все формальные построения, не задавая изначально инвестиционной суммы инвестора, полагая для упрощения, не являющегося излишне ограничительным, что рисковые предпочтения инвестора не зависят от масштаба инвестиции. Поэтому результат, получаемый далее в терминах доходности, является универсальным для данного инвестора вне зависимости от его изначальной суммы. В противном случае возможны разные постановки задачи, и о них уже подробно говорилось ранее, например, в работе [10].

2. Оптимальный портфель инвестора и принцип минимума относительного дохода

Рассмотрим процедуру построения оптимального портфеля инвестора и уточним, как на ней сказывается неопределенность прогноза инвестора, и как ее следует учитывать. Как и ранее, она проводится по методу Неймана-Пирсона и начинается с построения отношения правдоподобия (см., например, [11]). Вводится семейство (по θ) векторов

$$\boldsymbol{l}(\theta) = (L_1(\theta), L_2(\theta), \ldots, L_n(\theta)), \qquad L_j(\theta) = c_j/d_j(\theta), \tag{9}$$

и для каждого $\theta\in\Theta$ все сценарии из множества I упорядочиваются по убыванию этого отношения.

Для всех $\theta\in\Theta$ вводится вектор $\boldsymbol{\xi}(\theta) = (\xi(1,\theta), \xi(2,\theta),\ldots, \xi(n,\theta))$, где $\xi(1,\theta)$ означает сценарий с максимальной компонентой вектора $\boldsymbol{l}(\theta)$, $\xi(2,\theta)$ – сценарий со второй по величине компонентой $\boldsymbol{l}(\theta)$ и т.д., наконец, $\xi(n,\theta)$ – сценарий с минимальным значением отношения $\boldsymbol{l}(\theta)$. (Если две компоненты совпадают, то выбор порядка для них произволен.) Фактически, $\boldsymbol{\xi}(\theta)$ определяет взаимнооднозначное отображение (подстановку) множества I на себя, отвечающее устанавливаемому отношением (9) и зависящему от $\theta\in\Theta$ порядку во множестве I.

Отображение $\xi(\theta)$ мы также будем задавать с помощью матрицы $\Xi(\theta)$, определяемой условием

$$\Xi(\theta) = \|\chi_{ij}(\theta)\|,\ \chi_{ij}(\theta) = 1 \text{ при } j = \xi(i,\theta) \text{ и } 0 \text{ в иных случаях}, i,j\in I. \quad (10)$$

Представление отображения $\xi(\theta)$ в виде матрицы Ξ более удобно при проведении матричных преобразований.

Напомним, что для произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ длины n вектор, заданный матричным произведением $\Xi\ \boldsymbol{a}^T$ **(**$\boldsymbol{a}\ \Xi^{\boldsymbol{T}}$**),** означает (каким бы ни было значение θ) такую перестановку компонент вектора $\boldsymbol{a}^T$ ($\boldsymbol{a}$), при которой в новом векторе компоненты приобретают порядок, соответствующий порядку убывания на векторе $\boldsymbol{l}(\theta)$ отношения правдоподобия (если $j = \xi(i,\theta)$, то его j-я компонента перемещается на место i). Так, наряду с векторами (8) для каждого $\theta\in\Theta$ рассматриваются и векторы

$$\bar{\boldsymbol{d}}(\theta) = (d_{\xi(1,\theta)}(\theta),\ d_{\xi(2,\theta)}(\theta),\ldots,\ d_{\xi(n,\theta)}(\theta)) = \boldsymbol{d}(\theta)\ \Xi(\theta)^{\boldsymbol{T}},$$

определяющиеся переупорядочиванием компонент векторов $\boldsymbol{d}(\theta)$, соответствующим порядку убывания отношения правдоподобия.

Теперь переходим непосредственно к построению портфеля инструментов, наилучшим образом отражающим интересы инвестора. Процедура является дискретным аналогом той, которая применялась в [1–7] для континуального случая. В соответствии с (9) и (10) для каждого $\theta\in\Theta$ строится система подмножеств X_k множества I по правилу

$$X_k(\theta) = \{\xi(1,\theta),\ \xi(2,\theta),\ldots,\ \xi(k,\theta)\}, \qquad k\in I.$$

Поскольку каждому сценарию j инвестор приписывает вероятность $d_j(\theta)$, то множествам $X_k(\theta)$ будут отвечать вероятности

$$\varepsilon_k(\theta) = P_t\{X_k(\theta)\} = \textstyle\sum_{j\le k} d_{\xi(j,\theta)} = \sum_{j\le k} \bar{d}_j(\theta), \quad (11)$$

объединяемые в вектор $\boldsymbol{\varepsilon}(\theta)$**.**

Вводится вектор критических доходов инвестора

$$\boldsymbol{b}(\theta) = (B_1(\theta), B_2(\theta),\ldots, B_n(\theta)), \tag{12}$$

где

$$B_k(\theta) = B_{cr}(\varepsilon_k(\theta)), \qquad k\in I. \tag{13}$$

Фактически, компоненты этого вектора являются аппроксимацией функции критических доходов инвестора в точках ε_k, представимых в виде суммы вероятностей k сценариев, отвечающих наибольшим k значениям отношения правдоподобия.

Напомним идею такого построения и произведем необходимые изменения с учетом параметра неопределенности θ. Каждому множеству сценариев X_k ставится в соответствие его "индикатор", являющийся инструментом, представимым в виде суммы базисных инструментов $\sum_{j\le k} \hat{u}_{\xi(j,\theta)}$. Затем "оптимальный" инструмент $\hat{g}(\theta)$ инвестора строится в виде комбинации этих "индикаторов" с коэффициентами, определяемыми критическими доходами (13), и в результате получается его окончательное представление

$$\hat{g}(\theta) = \sum_j B_j(\theta)\, \hat{u}_{\xi(j,\theta)}. \tag{14}$$

Таким образом, предпочтениям инвестора отвечает взвешенная сумма инструментов $\hat{u}_j$ с весовыми коэффициентами, лежащими на графике функции критических доходов инвестора $B_{cr}(\varepsilon)$. Чем круче растет функция $B_{cr}(\varepsilon)$ при приближении к $\varepsilon = 1$ и, стало быть, последовательность $B_k(\theta)$ с ростом k, тем в большей степени инвестор для увеличения своего дохода готов идти на риск, и наоборот.

Используя векторные представления (2) для $\hat{\boldsymbol{u}}(\theta)$ и (12) для $\boldsymbol{b}(\theta)$, а также матричное представление (10) для оператора подстановки $\Xi(\theta)$, инструмент $\hat{g}(\theta)$, задаваемый равенством (14), представим в матричной форме

$$\hat{g}(\theta) = \boldsymbol{b}(\theta)\, \Xi(\theta)\, \hat{\boldsymbol{u}}(\theta)^{\boldsymbol{T}}.$$

С помощью соотношения (4) этот инструмент можно задать в виде комбинации исходных элементарных инструментов $\hat{s}_j$:

$$\hat{g}(\theta) = \boldsymbol{b}(\theta)\, \Xi(\theta)\, \boldsymbol{Y}^{-1}\, \hat{\boldsymbol{s}}^{T}.$$

Итак, оптимальным портфелем инвестора является скалярное произведение

$$\hat{g}(\theta) = \boldsymbol{g}(\theta)\ \hat{\boldsymbol{s}}^T, \tag{15}$$

где

$$\boldsymbol{g}(\theta) = \boldsymbol{b}(\theta)\ \Xi(\theta)\ \boldsymbol{Y}^{-1}, \tag{16}$$

при этом каждая компонента этого вектора означает количество соответствующего элементарного инструмента, которое инвестору необходимо приобрести (продать, если компонента отрицательна).

Теперь вычисляются все основные финансовые характеристики оптимального инструмента: его стоимость, средний доход инвестора (с его собственной точки зрения) и средний относительный доход (1 плюс доходность) от инвестиции.

Стоимость оптимального инструмента получается простой заменой в правой части равенства (15) (с учетом (16)) вектор инструментов $\hat{s}$ на вектор стоимостей $\boldsymbol{m}$. Получаем

$$A(\theta) = |\hat{g}(\theta)| = \boldsymbol{b}(\theta)\ \Xi(\theta)\ \boldsymbol{Y}^{-1}\ \boldsymbol{m}^T = \boldsymbol{g}(\theta)\ \boldsymbol{m}^T. \tag{17}$$

Средний доход инвестора $R(\theta)$ при условии, что он вычисляется в соответствии с его собственным представлением о вероятностных свойствах рынка, т.е. для вероятностного вектора на множестве сценариев $\boldsymbol{d}(\theta)$, и для произвольного параметра $\theta\in\Theta$, согласно процедуре Неймана-Пирсона и с учетом представления оптимального инструмента (14) должен определяться из соотношения

$$R(\theta) = \textstyle\sum_j B_j(\theta)\ d_{\xi(j,\theta)}(\theta) = \sum_j B_j(\theta)\ \bar{d}_j(\theta)$$

или в матричной форме

$$R(\theta) = \boldsymbol{b}(\theta)\ \Xi(\theta)\ \boldsymbol{d}(\theta)^T = \boldsymbol{b}(\theta)\ \bar{\boldsymbol{d}}(\theta)^T. \tag{18}$$

В результате относительный средний доход, как раз и характеризующий доходность вложения, получается делением среднего дохода (18) на инвестиционную сумму, совпадающую со стоимостью оптимального инструмента (17). Окончательно имеем

$$r(\theta) = R(\theta)/|\hat{g}(\theta)| =(\boldsymbol{b}(\theta)\ \bar{\boldsymbol{d}}(\theta)^T)/(\boldsymbol{g}(\theta)\ \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{T}}).$$

Величина $r(\theta)$ не может быть меньше значения r_{rf}, получаемого по формуле (6). Но поскольку обычно $r_{rf} > 1$, то и $r(\theta)$ будет превышать 1, притом для всех $\theta \in \Theta$.

Нам остается устранить неопределенность, отраженную в параметре θ. Как уже было сказано выше, эта проблема подробно обсуждалась в [6] при рассмотрении аналогичной задачи специально для опционного рынка. В той работе для выбора параметра θ инвестору рекомендовалось использовать принцип минимума относительного дохода. Напомним, что инвестор при применении такого принципа страхует себя от неоправданного завышения дохода, проистекающего вследствие неправильного выбора параметра θ, в значении которого инвестор не был изначально уверен.

Учитывая сказанное, мы приходим к выводу, что в отсутствие дополнительной информации оптимальным для инвестора должен быть выбор такого значения параметра $\theta \in \Theta$, при котором $r_{opt}(\theta)$ принимает минимальное значение. Итак

$$\theta_{opt} = \operatorname{argmin}_{\theta} r(\theta),$$

$$r_{opt} = r(\theta_{opt}).$$

Замечание. Следует обратить внимание на различие между использованием принципа минимума относительного дохода в настоящей работе и в работе [6]. В работе [6] основой для исследования служила теоретическая континуальная схема, когда параметр ε пробегал все множество чисел из отрезка [0,1] (хотя в конкретных примерах рассматривались и дискретные распределения вероятности). Поэтому в ней, фактически, средний доход от инвестиции был постоянным и равным

$$R = \int_0^1 B_{cr}\left(\varepsilon\right) d\varepsilon\,, \tag{19}$$

а различие инвестиционных альтернатив проявлялось в инвестиционных суммах. В данной же работе подобного постоянства среднего дохода в силу дискретности схемы может и не быть – при расчете $R(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$ получаются несколько разные значения, как если бы мы подсчитывали разные интегральные суммы для одного и того же интеграла (19). Тем не менее на приводимых ниже примерах легко обнаруживается, что различие в $R(\theta)$ по $\theta\in\Theta$ незначительно в сравнении с различием в стоимости $A(\theta)$ оптимальных инструментов инвестора.

3. Иллюстративный условный пример

Рассмотрим рынок, на котором обращаются всего 5 инструментов. В связи с этим ограничиваем пространство сценариев также только 5 элементами. Допустим, что доходы от пяти инструментов для каждого сценария определяются матрицей

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 4.0 & 4.0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 3.0 & 3.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 2.8 & 2.4 & 0.5 \\ 0.2 & 1.8 & 2.4 & 1.2 & 0.4 \\ 0.2 & 1.2 & 1.5 & 1.5 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Пусть также стоимости этих инструментов образуют вектор

$$\boldsymbol{m} = (2.256,\ 1.892,\ 1.626,\ 1.544,\ 1.213).$$

Построение на основе вектора $\boldsymbol{m}$ вектора цен базисных инструментов согласно (5) дает

$$\boldsymbol{c} = (0.06,\ 0.26,\ 0.31,\ 0.24,\ 0.08). \qquad (20)$$

В случае с реальным рынком все компоненты вектора $\boldsymbol{c}$ должны быть положительны, иначе возможен арбитраж. Поэтому при построении иллюстративного примера удобнее действовать в обратном направлении – сначала задавать вектор $\boldsymbol{c}$, и уже по нему строить вектор $\boldsymbol{m}$ – иначе трудно гарантировать положительность вектора $\boldsymbol{c}$.

Предложим теперь формальное описание предсказанных инвестором вероятностных свойств рынка. Как мы условились, прогнозом будет не единственный вероятностный вектор на множестве сценариев, а семейство вероятностных векторов по параметру $\theta\in\Theta$.

Рассмотрим два вспомогательных вектора

$$\boldsymbol{d'} = (0.06,\ 0.35,\ 0.27,\ 0.24,\ 0.08), \quad \boldsymbol{d''} = (0.0,\ -0.1,\ -0.1,\ 0.2,\ 0.0).$$

Они подобраны так, что сумма компонент первого вектора равна 1, а второго – нулю. Теперь семейство векторов $\boldsymbol{d}(\theta)$ зададим в виде

$$\boldsymbol{d}(\theta) = \boldsymbol{d'} + \theta\boldsymbol{d''},$$

где θ принимает целые значения от 1 до 5 включительно, т.е. мощность множества Θ равна 5. В результате получаем семейство (по θ) вероятностных векторов

$$\boldsymbol{d}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.37 & 0.29 & 0.20 & 0.08 \\ 0.06 & 0.35 & 0.27 & 0.24 & 0.08 \\ 0.06 & 0.33 & 0.25 & 0.28 & 0.08 \\ 0.06 & 0.31 & 0.23 & 0.32 & 0.08 \\ 0.06 & 0.29 & 0.21 & 0.36 & 0.08 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Для описания рисковых предпочтений инвестора в соответствии с развитой ранее теорией надлежит задать растущую функцию критических доходов. В ее качестве рассмотрим, например, функцию

$$B_{cr}(\varepsilon) = \varepsilon^2, \qquad \varepsilon \in [0,1], \tag{22}$$

что будет говорить об определенной склонности инвестора к риску.

В соответствии с разработанной ранее методикой необходимо применить процедуру Неймана-Пирсона, для чего требуется построить покомпонентное отношение векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}(\theta)$, т.е. соотнести (20) и (21). Получается семейство векторов (прямоугольная матрица размером 5×5)

$$\boldsymbol{l}(\theta) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.70 & 1.07 & 1.20 & 1.0 \\ 1.0 & 0.74 & 1.15 & 1.00 & 1.0 \\ 1.0 & 0.79 & 1.24 & 0.86 & 1.0 \\ 1.0 & 0.84 & 1.35 & 0.75 & 1.0 \\ 1.0 & 0.90 & 1.48 & 0.67 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

По нему строится семейство отображений $\xi(\theta)$ (также матрица размером 5×5). Имеем

$$\xi = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

В силу громоздкости семейство матриц подстановки $\Xi(\theta)$, которое однозначно строится по семейству $\xi(\theta)$, мы здесь не приводим, хотя в последующих расчетах удобнее использовать именно матрицы $\Xi(\theta)$.

Далее определяется семейство векторов предпочтений $\boldsymbol{b}(\theta)$. Компоненты этого вектора находятся из (11) и (13). Сначала определяется скорректированный с учетом преобразования Ξ вектор $\overline{\boldsymbol{d}}$. Имеем в матричной форме

$$\overline{\boldsymbol{d}}(\theta) = \boldsymbol{d}\,\Xi^T.$$

Проделывая вычисления, находим

$$\overline{\boldsymbol{d}}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.29 & 0.08 & 0.06 & 0.37 \\ 0.27 & 0.08 & 0.24 & 0.06 & 0.35 \\ 0.25 & 0.08 & 0.06 & 0.28 & 0.33 \\ 0.23 & 0.08 & 0.06 & 0.31 & 0.32 \\ 0.21 & 0.08 & 0.06 & 0.29 & 0.36 \end{bmatrix}.$$

Далее находится семейство векторов $\varepsilon(\theta)$, k-я компонента которых $\varepsilon_k(\theta)$ определяется по формуле (11):

$$\varepsilon(\theta) = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.49 & 0.57 & 0.63 & 1.0 \\ 0.27 & 0.35 & 0.59 & 0.65 & 1.0 \\ 0.25 & 0.33 & 0.39 & 0.67 & 1.0 \\ 0.23 & 0.31 & 0.37 & 0.68 & 1.0 \\ 0.21 & 0.29 & 0.35 & 0.64 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Используя теперь формулу (13) и учитывая (22), находим семейство векторов рисковых предпочтений

$$
\boldsymbol{b}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.040 & 0.240 & 0.325 & 0.397 & 1.0 \\ 0.073 & 0.123 & 0.348 & 0.423 & 1.0 \\ 0.063 & 0.109 & 0.152 & 0.449 & 1.0 \\ 0.053 & 0.096 & 0.137 & 0.462 & 1.0 \\ 0.044 & 0.084 & 0.123 & 0.410 & 1.0 \end{bmatrix}.
$$

На основании полученной информации мы уже можем определить оптимальный портфель инвестора и найти его финансовые характеристики. Семейство векторов, компоненты которых являются весами элементарных инструментов в оптимальном портфеле, определяется матрицей

$$
\boldsymbol{g}(\theta) = \begin{bmatrix} -5.19 & 9.26 & -2.67 & 4.14 & -6.15 \\ -6.96 & 14.00 & -5.47 & 6.26 & -9.20 \\ -2.74 & 6.76 & -4.04 & 3.28 & -3.86 \\ -3.02 & 7.82 & -4.53 & 3.33 & -4.42 \\ -2.83 & 7.46 & -4.40 & 3.16 & -4.19 \end{bmatrix}. \tag{23}
$$

Наконец, для каждого $\theta \in \Theta$ последовательно находятся стоимости инструментов, их доходы и доходности вложения. Все эти финансовые характеристики собраны в матрице

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0.394 & 0.497 & 1.26 \\ 2 & 0.401 & 0.488 & 1.22 \\ 3 & 0.405 & 0.489 & 1.21 \\ 4 & 0.393 & 0.491 & 1.25 \\ 5 & 0.374 & 0.502 & 1.34 \end{bmatrix}.
$$

В 1-м столбце матрицы представлены значения θ, во 2-м – стоимости $A(\theta) = |\hat{g}(\theta)|$, в 3-м – доходы от инвестиции $R(\theta)$, и в 4-м – относительные доходы $r(\theta)$. Следуя принципу минимума относительного дохода, заключаем, что оптимальное вложение для инвестора дается параметром $\theta = 3$, при этом относительный доход равен 1.21, что, как и должно быть, превышает r_{rf}. Стоимость оптимального инструмента $|\hat{g}| = 0.405$, а средний доход (с точки зрения самого инвестора) $R_{opt} = 0.489$, а сам оптимальный портфель определяется 3-й строкой матрицы (23):

$$
\hat{g}(\theta) = -2.74\hat{s}_1 + 6.76\hat{s}_2 - 4.04\hat{s}_3 + 3.28\hat{s}_4 - 3.86\hat{s}_5.
$$

4. Пример: инвестор прогнозирует волатильность рынка

В предлагаемом примере инвестор имеет свое представление относительно будущей волатильности рынка, однако в том, что касается направления его движения, он готов солидаризироваться с превалирующими на рынке тенденциями. Эта проблема часто возникает, например, перед опционными трейдерами (см. [12]).

Пусть на рынке обращаются 8 инструментов, которые можно рассматривать как элементарные. В соответствии с методикой инвестор строит пространство сценариев из 8 элементов. Примем, что доходы от этих инструментов для каждого сценария определяются матрицей

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 1/3 & 1/9 & 1/3 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 1 & 1/3 & 1/9 & 1/3 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 3 & 1 & 1/3 & 1/9 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 3 & 9 & 3 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 1/3 & 1 & 3 & 9 & 3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/9 & 1/3 & 1 & 3 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/3 & 1 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 1/3 & 1/9 & 1/3 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Допустим, что стоимости этих инструментов образуют вектор

$$\boldsymbol{m} = (1.67,\ 1.96,\ 2.31,\ 2.60,\ 2.60,\ 2.31,\ 1.96,\ 1.67).$$

Этому вектору соответствует вектор цен базисных инструментов

$$\boldsymbol{c} = (0.082,\ 0.108,\ 0.132,\ 0.158,\ 0.157,\ 0.133,\ 0.107,\ 0.083).$$

Сумма его компонент равна 0.96, поэтому r_{rf} = 1.042. Вновь для обеспечения положительности всех компонент вектора $\boldsymbol{c}$ мы задавали сначала его, а по нему уже находили вектор $\boldsymbol{m}$.

Допустим теперь, что инвестор предсказывает вероятностные свойства рынка следующим образом. Как мы условились, его прогнозом должен быть не единственный вероятностный вектор на множестве сценариев, а семейство по некоторому параметру $\theta \in \Theta$. Будем считать, что пространство Θ содержит всего 5 элементов. Рассмотрим базовый вспомогательный вектор

$$\boldsymbol{d'} = (0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.14, 0.13, 0.12, 0.11)$$

с суммой компонент, равной 1. Он служит одним из векторов семейства векторов $\boldsymbol{d}(\theta)$. остальные 4 вектора этого семейства получаются вращением базового вектора влево и вправо на 1 и 2 позиции. Именно эта процедура должна отразить индифферентность инвестора в отношении того, куда будет в среднем двигаться рынок. В результате получаем

$$\boldsymbol{d}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.130 & 0.139 & 0.139 & 0.130 & 0.120 & 0.111 & 0.111 & 0.120 \\ 0.120 & 0.130 & 0.139 & 0.139 & 0.130 & 0.120 & 0.111 & 0.111 \\ 0.111 & 0.120 & 0.130 & 0.139 & 0.139 & 0.130 & 0.120 & 0.111 \\ 0.111 & 0.111 & 0.120 & 0.130 & 0.139 & 0.139 & 0.130 & 0.120 \\ 0.120 & 0.111 & 0.111 & 0.120 & 0.130 & 0.139 & 0.139 & 0.130 \end{bmatrix}.$$

В качестве функции, описывающей рисковые предпочтения инвестора, примем ту же функцию, что и в примере из предыдущего раздела, т.е.

$$B_{cr}(\varepsilon) = \varepsilon^2, \qquad \varepsilon \in [0,1], \tag{24}$$

Это представление вновь говорит об определенной склонности инвестора к риску. Теперь применяем процедуру Неймана-Пирсона, для чего требуется построить покомпонентное отношение векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}(\theta)$, т.е. соотнести (20) и (21). Получаем семейство векторов (прямоугольную матрицу размером 5×8)

$$\boldsymbol{l}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.636 & 0.771 & 0.950 & 1.213 & 1.310 & 1.198 & 0.972 & 0.686 \\ 0.686 & 0.828 & 0.950 & 1.130 & 1.213 & 1.102 & 0.972 & 0.746 \\ 0.746 & 0.894 & 1.021 & 1.130 & 1.130 & 1.021 & 0.894 & 0.746 \\ 0.746 & 0.972 & 1.102 & 1.213 & 1.130 & 0.950 & 0.828 & 0.686 \\ 0.686 & 0.972 & 1.198 & 1.310 & 1.213 & 0.950 & 0.771 & 0.636 \end{bmatrix}.$$

Анализируя устанавливаемые в каждой строке этой матрицы порядки элементов, построим семейство отображений $\xi(\theta)$ (также матрицу размером 5×8). Имеем

$$\xi(\theta) = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 6 & 7 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 6 & 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

В последующих вычислениях используется адекватное представление этой матрицы в виде семейства матриц подстановки $\Xi(\theta)$, получаемое по введенному ранее правилу. Однако в силу громоздкости это представление здесь не приводится.

Теперь на основании соотношений (11) и (13) определяется семейство векторов предпочтений $\boldsymbol{b}(\theta)$. Сначала определяется скорректированный с учетом преобразования Ξ вектор $\overline{\boldsymbol{d}}$. Имеем в матричной форме

$$\overline{\boldsymbol{d}}(\theta) = \boldsymbol{d}\, \Xi^T.$$

Проделывая вычисления, находим

$$\overline{\boldsymbol{d}}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.120 & 0.130 & 0.111 & 0.111 & 0.139 & 0.139 & 0.120 & 0.130 \\ 0.130 & 0.139 & 0.120 & 0.111 & 0.139 & 0.130 & 0.111 & 0.120 \\ 0.139 & 0.139 & 0.130 & 0.130 & 0.120 & 0.120 & 0.111 & 0.111 \\ 0.130 & 0.139 & 0.120 & 0.111 & 0.139 & 0.130 & 0.111 & 0.120 \\ 0.120 & 0.130 & 0.111 & 0.111 & 0.139 & 0.139 & 0.120 & 0.130 \end{bmatrix}.$$

Затем находится семейство векторов $\varepsilon(\theta)$, k-я компонента которых $\varepsilon_k(\theta)$ определяется по формуле (11):

$$\varepsilon(\theta) = \begin{bmatrix} 0.120 & 0.250 & 0.361 & 0.471 & 0.611 & 0.750 & 0.870 & 1.0 \\ 0.130 & 0.269 & 0.389 & 0.500 & 0.639 & 0.769 & 0.880 & 1.0 \\ 0.139 & 0.279 & 0.409 & 0.538 & 0.659 & 0.779 & 0.889 & 1.0 \\ 0.130 & 0.269 & 0.389 & 0.500 & 0.639 & 0.769 & 0.880 & 1.0 \\ 0.120 & 0.250 & 0.361 & 0.471 & 0.611 & 0.750 & 0.870 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Используя теперь формулу (13) и учитывая (24), находим семейство векторов рисковых предпочтений

$$\boldsymbol{b}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.014 & 0.062 & 0.130 & 0.222 & 0.373 & 0.562 & 0.757 & 1.0 \\ 0.017 & 0.072 & 0.152 & 0.250 & 0.409 & 0.592 & 0.774 & 1.0 \\ 0.019 & 0.078 & 0.167 & 0.290 & 0.434 & 0.607 & 0.791 & 1.0 \\ 0.017 & 0.072 & 0.152 & 0.250 & 0.409 & 0.592 & 0.774 & 1.0 \\ 0.014 & 0.062 & 0.130 & 0.222 & 0.373 & 0.562 & 0.757 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

На основании полученной информации определяется оптимальный портфель инвестора и находятся его финансовые характеристики. Семейство векторов коэффициентов элементарных инструментов в оптимальном портфеле задается матрицей

$$\boldsymbol{g}(\theta) = 10^{-4} \begin{bmatrix} 838 & 210 & 257 & -68 & -50 & 85 & -58 & 542 \\ 819 & 236 & 291 & -70 & -60 & 102 & -35 & 553 \\ 806 & 306 & 120 & -15 & -65 & 47 & 205 & 501 \\ 553 & -35 & 102 & -60 & -70 & 290 & 236 & 819 \\ 542 & -58 & 85 & -50 & -68 & 257 & 210 & 838 \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

Наконец, для каждого $\theta \in \Theta$ последовательно находятся стоимости инструментов, их доходы и доходности вложения. Все эти финансовые характеристики собраны в матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.308 & 0.400 & 1.298 \\ 2 & 0.325 & 0.398 & 1.223 \\ 3 & 0.335 & 0.396 & 1.180 \\ 4 & 0.325 & 0.398 & 1.223 \\ 5 & 0.308 & 0.400 & 1.298 \end{bmatrix}.$$

В 1-м столбце матрицы представлены значения θ, во 2-м – стоимости $A(\theta) = |\hat{g}(\theta)|$, в 3-м – доходы от инвестиции $R(\theta)$, и в 4-м – относительные доходы $r(\theta)$. Следуя принципу минимума относительного дохода, заключаем, что оптимальное вложение для инвестора дается параметром $\theta = 3$, при этом относительный доход равен 1.21, что, как и должно быть, превышает r_{rf}. Стоимость оптимального инструмента $|\hat{g}| = 0.405$, а средний доход (с точки зрения самого инвестора) $R_{opt} = 0.489$; сам оптимальный портфель определяется 3-й строкой матрицы (25):

$$\hat{g}(\theta) = 10^{-4}\,(806\hat{s}_1 + 306\hat{s}_2 + 120\hat{s}_3 - 15\hat{s}_4 - 65\hat{s}_5 + 47\hat{s}_6 + 205\hat{s}_7 + 501\hat{s}_8).$$

Литература

1. Агасандян Г.А. Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь (VaR). М.: ВЦ РАН, 2001. 34 с.
2. Агасандян Г.А. Многоступенчатый критерий VaR на реальном рынке опционов. М.: ВЦ РАН, 2002. 35 с.
3. Agasandian G.A. Optimal Behavior of an Investor in Option Market // International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). Pp. 1859-1864.
4. Агасандян Г.А. Описание поведения инвестора на многопериодном рынке опционов. М.: ВЦ РАН, 2003. 29 с.
5. Агасандян Г.А. Применение инвесторами методов финансовой инженерии на рынке опционов //Современные сложные системы управления (СССУ/HTCS‘ 2003). Третья международная конференция. Доклады. Воронеж, 26-28 мая 2003 г. 6 с.
6. Агасандян Г.А. Принцип минимума дохода для инвестора рынка опционов. М.: ВЦ РАН, 2004. 51 с.
7. Агасандян Г.А. Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов //Экономика и математические методы, 2005, т. 41, №4, 22 с.
8. Агасандян Г.А. Новый подход к управлению портфелем ценных бумаг. Современные сложные системы управления (СССУ / HTCS‘ 2004). Четвертая международная конференция. Доклады. Тверь, 24-25 мая 2004г., стр.8-10.
9. Agasandian G.A. A portfolio management approach based on continuous VaR-criterion //4-я Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2004) (Москва, Сентябрь, 21-24, 2004) Труды. МАКС Пресс, стр. 4-9.
10. Агасандян Г.А. Многоступенчатый критерий VaR на произвольном однопериодном рынке. М.: ВЦ РАН, 2005. 45 с.
11. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Наука, 1975.
12. Макмиллан Л.Г. Опционы как стратегическое инвестирование. 3-е издание. М.: Издательский дом "ЕВРО", 2003. 1225 с.

Оглавление