РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Г.А.АГАСАНДЯН

ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ИНВЕСТОРА НА МНОГОПЕРИОДНОМ РЫНКЕ ОПЦИОНОВ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2001

УДК 519.685

Ответственный редактор
доктор техн. наук Ф.И. Ерешко

Развитые в прежних работах автора для теоретического рынка опционов принципы построения оптимального портфеля инвестора со своим взглядом на свойства рынка используются для многопериодного рынка опционов. Вводятся специальные базисные опционы, платежная функция которых зависит, вообще говоря, от всей траектории движения цены базового актива. Эти опционы являются обобщением традиционных опционов колл и пут на случай многопериодных опционов, зависящих от траектории. С их помощью находятся наведенные безрисковые ставки для отдельных периодов времени и наведенные совместные плотности вероятности цен базового актива для последовательных моментов времени. Они далее используются в процедуре Неймана-Пирсона для нахождения оптимального континуального портфеля опционов инвестора.

Рецензенты: А.И. Самыловский,
Ю.А. Флеров

Научное издание

В работах [1,2] были рассмотрены проблемы оптимального поведения инвестора на однопериодном рынке опционов со своим взглядом на его вероятностные свойства. Предполагалось, что вероятностные свойства будущей цены базового актива известны и описываются функцией распределения $F(x)$ с плотностью вероятности $f(x)$. В работе [3] была дополнительно рассмотрена задача распространения результатов для однопериодного рынка опционов на случай многопериодного рынка. Там же были сформулированы требования к условиям функционирования такого рынка, при которых возможно решение задачи построения "оптимального" портфеля инвестора, а также приведены некоторые результаты, к нему относящиеся.

В предлагаемой работе дается полное решение задачи нахождения "оптимального" портфеля инвестора на многопериодном рынке опционов с использованием критерия Неймана-Пирсона при условии, что на рынке присутствуют многопериодные опционы специального вида. При этом удается отказаться от необоснованного предположения относительно нейтральности к риску рынка. Но для этого приходится взглянуть на проблему однопериодного рынка опционов под иным углом зрения. По этой причине и для подчеркивания преемственности изложения сначала вкратце приводятся результаты для однопериодного рынка и только затем внимание переключается на особенности, возникающие при переходе к многопериодным рынкам.

1. Свойства однопериодного рынка опционов

1.1. Нейтральный к риску рынок опционов

Рассматривается однопериодный рынок опционов, на котором обращаются традиционные инструменты, такие как опционы колл $\boldsymbol{C}(E)$ и пут $\boldsymbol{P}(E)$ со страйком E и ценами $C(E)$ и $P(E)$, сложившимися на рынке на начало периода соответственно: $|\boldsymbol{C}(E)| = C(E)$, $|\boldsymbol{P}(E)| = P(E)$ (для цены произвольного инструмента $\boldsymbol{G}$ используется обозначение $|\boldsymbol{G}|$). Считаем, что страйк E, для которого задаются эти инструменты, в теоретической конструкции пробегает множество всех вещественных чисел. В работах [1,2] было показано, что на нейтральном к риску рынке при условии, что функция распределения $F(x)$ при $x \to \pm\infty$ достаточно быстро стремится к своим предельным значениям (при наличии у функции распределения будущей цены актива абсолютного первого момента), справедливы соотношения

$$C(E) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \max(0, x - E) f(x)dx = \frac{1}{r}\int_{E}^{\infty}(1 - F(x))dx\ ,$$

$$P(E) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \max(E - x, 0)\, f(x)dx = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{E} F(x)dx\ ,$$

где r – безрисковый относительный доход.

Наряду с ними рассматриваются и производные инструменты, такие как "первые производные" и "вторые производные" колла и пута по страйку – $\boldsymbol{C}'(E)$, $\boldsymbol{C}''(E)$, $\boldsymbol{P}'(E)$ и $\boldsymbol{P}''(E)$. Операционные издержки не учитываются. Поэтому, естественно, что стоимость линейной комбинации (также бесконечной) опционов равна соответствующей линейной комбинации стоимостей составляющих комбинацию опционов. Следовательно, имеют место соотношения

$$|\boldsymbol{C}'(E)| = C'(E)|, \quad |\boldsymbol{P}'(E)| = P'(E),$$

$$|\boldsymbol{C}''(E)| = C''(E), \quad |\boldsymbol{P}''(E)| = P''(E).$$

при этом

$$C'(E) = \frac{F(E) - 1}{r}\ ,$$

$$P'(E) = \frac{F(E)}{r}\ ,$$

$$C''(E) = P''(E) = \frac{F'(E)}{r} = \frac{f(E)}{r}. \qquad (1)$$

Последнее соотношение означает, что при $r = 1$ вторая производная стоимости опционов колл и пут по страйку совпадает с плотностью вероятности будущей цены актива. Также используются обозначения $\boldsymbol{D}(E)$ и $\boldsymbol{I}(X)$ для инструментов, платежными функциями которых служат дельта-функция относительно точки E и характеристическая функция (индикатор) множества X соответственно. При этом "единичный" безрисковый инструмент $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}(R)$. Кроме того, очевидно, что $\boldsymbol{D}(E) = \boldsymbol{C}''(E) = \boldsymbol{P}''(E)$.

Эти соотношения в работе [1] используются для построения процедуры нахождения оптимального поведения инвестора на однопериодном рынке опционов.

1.2. Наведенная рынком плотность вероятности будущей цены актива

Далее мы будем считать, что введенные в предыдущем разделе вероятностные характеристики будущей цены базового актива нам неизвестны. Если оставаться в условиях нейтрального к риску рынка, то по формуле (1) можно было бы восстанавливать плотность вероятности $f(x)$ (с одновременным определением и параметра r). Но теперь мы желаем отказаться от предположения нейтральности к риску рынка. Тем самым мы признаем, что формулы предыдущего раздела не выполняются (во всяком случае, они не дают точного значения стоимости опционов) и восстановить по ним точно $f(x)$ невозможно.

Поэтому далее для решения проблем инвестора мы оставляем в стороне вопросы ценообразования опционов. Оказывается, что для целей нахождения оптимального портфеля инвестора нет необходимости знать работу механизма ценообразования. Достаточно просто знать сами цены опционов. Однако подчеркнем еще раз, что для решения задачи в ее теоретической полноте потребуется предположение о наличии на рынке опционов со страйками из множества всех вещественных чисел (эти страйки будут многомерными в случае многопериодных опционов).

Итак, сложившиеся на начало периода цены опционов будем воспринимать как данность. Конечно, они должны удовлетворять определенным свойствам, вытекающим из общего финансового принципа недопустимости арбитража.

Из формулы (1) следует, что

$$|\boldsymbol{C}''(E)| = |\boldsymbol{P}''(E)| = |\boldsymbol{D}(E)| .$$

Хотя инструменты $\boldsymbol{C}''(E)$ и $\boldsymbol{P}''(E)$ получены различными способами, естественно считать, что их стоимости совпадают, так как в противном случае был бы возможен арбитраж. Итак, имеем

$$C''(E) = P''(E) = |\boldsymbol{D}(E)| .$$

Поскольку инструменту $\boldsymbol{D}(E)$ отвечает неотрицательная платежная функция, то его стоимость не может быть отрицательной, т.е.

$$C''(E) = P''(E) \geq 0 .$$

Следовательно, цены колла и пута как функции страйка – выпуклы.

Вводится нормировочный множитель r равенством

$$\int_R C''(x)dx = \int_R P''(x)dx = 1/r .$$

Тогда функция

$$f_m(x) = rC''(x) = rP''(x)$$

неотрицательна, и интеграл от нее по всей вещественной прямой равен 1, т.е. ее можно рассматривать как плотность вероятности. Эту плотность естественно называть *наведенной рынком плотностью вероятности цены базового актива*. Индекс m подчеркивает рыночное происхождение этой плотности вероятности. При этом параметр r можно считать аналогом относительного дохода за период, т.е. r – *наведенный относительный доход* за период, а r–1 – *наведенная доходность*.

Следует подчеркнуть, что хотя мы в данном и предыдущем разделах используем одно и то же обозначение для относительного дохода r, он несет теперь иную смысловую нагрузку. В предыдущем разделе этот параметр задается экзогенно, в то время как в настоящем разделе он получен по ценам рынка.

Стоимость "индикатора" множества X

$$\left|\boldsymbol{I}(X)\right| = \int_X C''(x)dx = \int_X P''(x)dx\,,$$

и потому

$$|\boldsymbol{U}| = \left|\boldsymbol{I}(R)\right| = \int_R C''(x)dx = \int_R P''(x)dx = 1/r\,.$$

Таким образом, стоимость *безрискового* актива равна $1/r$, и параметр r совпадает с безрисковым относительным доходом (а r–1 – с *безрисковой* доходностью).

1.3. Задачи инвестора опционного рынка и способы их решения

Будем предполагать, что инвестор имеет собственное представление относительно распределения вероятностей будущей цены базового актива S. Оно может не совпадать ни с истинным распределением (неизвестным ему), ни с наведенным распределением. Плотность вероятности этого распределения обозначим $f_t(x)$. Что касается рынка в целом, то его представление о распределении вероятностей цены базового актива (если о таковом можно говорить) проявляется исключительно в ценах опционов на начало периода и оно отражается в наведенной плотности вероятности $f_m(x)$.

Сопоставляя свое прогнозное распределение вероятностей цены актива с ценами опционов, инвестор может пытаться обнаруживать какие-либо расхождения в этих описаниях и использовать их к своей выгоде. В зависимости от своих рисковых предпочтений он может формулировать различные задачи и в соответствии с этими задачами находить оптимальные портфели опционов, которые эти задачи решают.

В работах [1,2] рассматривался ряд последовательно усложняющихся задач и были приведены их решения в условиях нейтрального к риску рынка. Те же способы решения годятся и для случая рынка, не нейтрального к риску, если просто заменить "истинную" плотность вероятности наведенной плотностью. Кратко сформулируем результаты для однопериодного случая.

Простейшей задачей инвестора можно считать безусловную максимизацию среднего дохода от инвестиции заданного размера. Более сложной является простейшая задача условной максимизации среднего дохода, когда средний доход максимизируется при выполнении одного вероятностного ограничения на случайный доход инвестора (традиционный критерий *VaR*). Наконец, основным результатом работ [1,2] служит распространение метода условной оптимизации на случай континуального множества вероятностных ограничений на доход инвестора (континуальный критерий *VaR*).

1.3.1. Безусловная максимизация среднего дохода инвестора

Задача безусловной максимизации среднего дохода инвестора состоит в том, чтобы для заданной инвестиционной суммы A подобрать в качестве объекта инвестирования некоторый инструмент $\boldsymbol{G}$ с платежной функцией $g(x)$, удовлетворяющий равенству $|\boldsymbol{G}| = A$ и доставляющий максимум $M_t B$.

Разумеется, такая задача представляет интерес лишь для нейтрального к риску инвестора. Если рассматривать случай, когда инвестор использует лишь инструменты, которые не могут приносить ему отрицательные доходы, т.е. используются лишь инструменты с неотрицательными платежными функциями, то оказывается, что решение задачи доставляют инструменты из класса $\boldsymbol{D}(E)$. При этом условие неотрицательности доходов инвестора означает, что по этим инструментам он фактически может использовать лишь длинные позиции. Для таких инструментов имеет место

$$M_t B = A \frac{f_t(E)}{f_m(E)}.$$

Для обоснования этого вводятся функции правдоподобия

$$L(x) = f_m(x) / f_t(x),$$

$$L^{\circ}(x) = 1/L(x) = f_t(x)/f_m(x),$$

составляющие основу применяемого в статистике критерия Неймана-Пирсона (см., например, [4]).

Процедура Неймана-Пирсона позволяет утверждать, что средний доход инвестора принимает наибольшее значение при страйке $E_{\max}$, доставляющем наибольшее значение функции правдоподобия L°. Любая другая платежная функция приносит меньший средний доход.

Задача безусловной максимизации среднего дохода не учитывает рисковых предпочтений инвестора. К тому же, очевидно, что предоставляемое инструментом $\boldsymbol{D}(E_{\max})$ решение не удовлетворительно: доход инвестора равен нулю с вероятностью 1 и бесконечности – с вероятностью нуль, т.е. случайный доход вырожден. Если же говорить о практической реализации этого решения, то речь идет о том, что максимизация среднего дохода инвестора достигается за счет получения весьма больших случайных доходов с незначительной вероятностью и нулевых доходов со значительной вероятностью.

Использование коротких позиций по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$, где $E_{\min}$ обозначает страйк, доставляющий L° минимум (или же L – максимум), позволяет сколь угодно повысить доходность инвестиции.

1.3.2. Условная максимизация среднего дохода инвестора (стандартный метод VaR)

Качество решения задачи безусловной максимизации можно улучшить с помощью дополнительных ограничений, накладываемых критерием *Value at Risk* (*VaR*). В своей стандартной форме он предполагает максимизацию среднего дохода инвестора при выполнении условия

$$P_t\{B \geq B_{cr}\} \geq 1 - \varepsilon \tag{2}$$

для некоторых значений критического уровня дохода B_{cr} и вероятности ε (обычно небольшой), выбираемых инвестором.

Решение такой задачи также основано на критерии Неймана-Пирсона. Строится однопараметрическое семейство множеств $\{Z(c), c>0\}$ по правилу

$$x \in Z(c) \quad \Leftrightarrow \quad L(x) = \frac{f_m(x)}{f_t(x)} \geq c \ .$$

Для заданного ε находится множество $X(\varepsilon)$ из семейства $\{Z(c)\}$ с вероятностной мерой инвестора, равной ε, т.е.

$$\varepsilon = P_t\{X(\varepsilon)\}. \tag{3}$$

При этом наведенная рыночная вероятность множества $X(\varepsilon)$, равная $\gamma(\varepsilon) = P_m\{X(\varepsilon)\}$, максимальна, и потому рыночная стоимость инструмента $\boldsymbol{I}\left(\overline{X(\varepsilon)}\right)$, равная

$$\left|\boldsymbol{I}\left(\overline{X(\varepsilon)}\right)\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\overline{X(\varepsilon)}}(x) f_m(x)\, dx = P_m\left\{\overline{X(\varepsilon)}\right\} = 1 - \gamma(\varepsilon), \tag{4}$$

минимальна. Решение задачи существует, если

$$B_{cr}(1-\gamma) \leq A \, .$$

В этом случае инструмент $\boldsymbol{I}\left(\overline{X(\varepsilon)}\right)$ в количестве B_{cr} обеспечивает выполнение ограничения (2), а остаток

$$A - B_{cr}(1-\gamma) \tag{5}$$

направляется на максимизацию среднего дохода, т.е. на приобретение инструмента $\boldsymbol{D}(E_{\max})$.

Средний доход от такой инвестиции составляет

$$M_t B = \left(A - B_{cr}(1-\gamma)\right) \frac{f_t\left(E_{\max}\right)}{f_m\left(E_{\max}\right)} + B_{cr}(1-\varepsilon) \, ,$$

а дисперсия –

$$D_t B \sim \frac{1}{2\Delta} \frac{\left(A - B_{cr}(1-\gamma)\right)^2 f_t\left(E_{\max}\right)}{f_m^2\left(E_{\max}\right)}.$$

Использование коротких позиций по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$ и в этом случае позволяет сколь угодно повысить доходность инвестиции.

Недостатки этого метода несколько смягчены, но аналогичны случаю безусловной максимизации: с вероятностью 1 доход инвестора принимает значения, не превышающие B_{cr}, и равен бесконечности с вероятностью нуль, т.е. случайный доход вновь носит вырожденный характер.

1.3.3. Континуальный метод VaR

Недостатков можно избежать, используя континуальную версию критерия *VaR*. Интересы инвестора при этом описываются неубывающей функцией критических доходов $B_{cr}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,1]$. Эта функция может принимать и отрицательные значения. Более того, она может быть неограниченной в обоих концах отрезка [0,1]. Требуется построить стратегию инвестора, в соответствии с которой его доход B от инвестиции в размере A окажется не ниже $B_{cr}(\varepsilon)$ с вероятностью не меньше $1 - \varepsilon$ для каждого $\varepsilon \in [0,1]$, т.е.

$$P_t\left\{B \geq B_{cr}(\varepsilon)\right\} \geq 1 - \varepsilon, \qquad \varepsilon \in \left[0,1\right]. \tag{6}$$

Если такая задача может быть решена полностью, то остающаяся после ее решения сумма направляется на максимизацию среднего дохода, т.е. инвестируется в инструмент $\boldsymbol{D}(E_{\max})$ с возможным использованием короткой позиции по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$.

Каждому уровню вероятности $\varepsilon \in [0,1]$ соответствует критическое множество $X(\varepsilon)$ вероятностной меры инвестора ε и его рыночная вероятность $\gamma(\varepsilon)$. $X(\varepsilon)$ – неубывающее по параметру ε семейство множеств, $\gamma(\varepsilon)$ – непрерывная и неубывающая функция ε, $\gamma(\varepsilon) > \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$. Решение задачи дается следующей процедурой.

Рассматривается непрерывный процесс инвестирования суммы A по мере возрастания параметра ε от 0 до 1. Через $A(\varepsilon)$ обозначим инвестиционную сумму, необходимую для реализации (6) до произвольной фиксированной точки ε включительно (т.е. обеспечения доходов $B_{cr}(\varepsilon')$ на множествах $\overline{X(\varepsilon')}$ соответственно для всех $\varepsilon' \leq \varepsilon$). Тогда справедлива формула (имеющая смысл при $B_{cr}(0) > -\infty$)

$$A(\varepsilon) = B_{cr}(0) + \int_0^{\varepsilon} \bigl(1 - \gamma(u)\bigr) dB_{cr}(u) .$$

После интегрирования по частям получаем соотношение общего вида, не требующее конечности $B_{cr}(0)$,

$$A(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} B_{cr}(u)\, d\gamma(u) + \bigl(1 - \gamma(\varepsilon)\bigr) B_{cr}(\varepsilon) .$$

При $\varepsilon = 1$ эти формулы приобретают вид

$$A(1) = B_{cr}(0) + \int_0^1 \bigl(1 - \gamma(u)\bigr) dB_{cr}(u) = \int_0^1 B_{cr}(u)\, d\gamma(u) ,$$

причем средняя часть этого двойного равенства снова имеет смысл лишь при $B_{cr}(0) > -\infty$. Процесс достигает точки ε, если $A(\varepsilon) \leq A$. Если это неравенство нарушается в некоторой точке отрезка [0,1], процесс прекращается. Если же процесс не обрывается вплоть до точки $\varepsilon = 1$, т.е. оказывается, что

$$A(1) \leq A , \tag{7}$$

то это значит, что ограничения (6) выполняются для всех $\varepsilon \in [0,1]$, и тогда сумма $A - A(1)$ направляется на максимизацию среднего дохода, т.е. вкладывается в инструмент $\boldsymbol{D}(E_{\max})$.

Случайный доход инвестора B может быть представлен как сумма двух случайных величин B° и $\overline{B}$, первая из которых фактически является вырожденной случайной величиной, принимающей бесконечно большое значение с бесконечно малой вероятностью и равной нулю с вероятностью 1, а вторая – случайная величина, отвечающая исключительно за выполнение ограничений метода *VaR*.

При этом из неравенства (6) следует, что функция распределения случайной величины $\overline{B}$ задается равенством

$$F_{\overline{B}}(x) = B_{cr}{}^{(-1)}(x)\,,$$

правую часть которого образует обратная к $B_{cr}(\varepsilon)$ функция.

Средний доход инвестора составляет

$$M_t B = M_t B^{\circ} + M_t \overline{B}\,,$$

где

$$M_t B^{\circ} = \left(A - \int_0^1 B_{cr}(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon) \right) \frac{f_t\left(E_{\max}\right)}{f_m\left(E_{\max}\right)}\,,$$

$$M_t \overline{B} = \int_0^1 B_{cr}(\varepsilon)\, d\varepsilon\,.$$

В этих соотношениях не используются короткие позиции по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$, однако при желании их можно легко учесть.

Инвестор может вообще отказаться от использования вырожденной компоненты дохода. В этом случае ему свои предпочтения удобнее задавать параметрическим семейством функций $B_{cr}(\varepsilon,b)$, а параметр b (вообще говоря, векторный) выбирать из условия выполнения равенства в (7). Тогда весь инвестиционный ресурс направляется на выполнение ограничений (6), а вырожденная компонента дохода отсутствует.

2. Многопериодный рынок опционов и поведение инвестора

Предложенная выше методика допускает обобщение на случай многопериодного рынка опционов. Такой рынок можно рассматривать уже как модель непрерывного по времени рынка. Если учесть, что каждый участник опционного рынка сообразует свои действия не только с общей для всех информацией, но и со своими оценками будущего развития событий, то становится ясно, что определение оптимального для каждого инвестора портфеля опционов – весьма важная задача (см. например, [5]).

Итак, мы полагаем, что временной горизонт рынка опционов охватывает n периодов времени. Дискретное время t пробегает множество значений $T \cup \{0\}$, где $t = 0$ – начальный момент времени, а $T = \{1, 2, \ldots, n\}$. В начальный момент времени инвестор располагает некоторой суммой A, которую он инвестирует в опционы. На многопериодном рынке опционов, вообще говоря, котируются опционы всевозможных сроков действия – от одного до n периодов. Доход от инвестиции в k-периодный опцион, т.е. опцион с истечением срока через k периодов, $k \leq n$, инвестор получает в момент $t = k$. (Оптимальный портфель строится лишь для опционов европейского типа, исполнение которых допускается только при истечении срока).

К сожалению, одни только эти опционы не в состоянии отразить все нюансы вероятностных характеристик движения цены актива на рынке и предпочтений инвестора. Дело в том, что, как и в однопериодном случае, цены обычных k-периодных опционов для всевозможных страйков, назначаемых на момент времени $t = k$, определяют безусловное распределение (точнее, наведенное безусловное распределение) вероятностей цены актива на данный момент. Поэтому без дополнительных предположений относительно движения цены актива в разные периоды (например, независимости приращений цены за разные периоды времени) они не могут определять совместных (а также условных) распределений.

2.1. Описание *A*-опционов

Нам поможет провести необходимое обобщение предположение об обращении на рынке так называемых *зависящих от пути опционов* (по-английски – *path-dependent options*). В финансовой литературе под ними обычно понимают обычные опционы, но с дополнительными свойствами. Например, расчет по такому опциону может проводиться в зависимости от некоторых средних цен базового актива за срок действия опциона или от минимальной или максимальной его цены. По некоторым разновидностям таких опционов предполагаются аналогичные обычным опционам выплаты, но при условии, что в какие-то моменты времени в течение срока жизни опциона цена актива была не менее или не более заданного уровня (*барьерные опционы*).

В работе зависящие от пути опционы мы будем толковать расширительно. Под *n-периодными зависящими от пути опционами* мы здесь будем понимать инструменты, определяемые в общем случае всей траекторией движения цены базового актива. Причем эта зависимость от траектории может носить произвольный характер, что и порождает значительное разнообразие таких инструментов. Отсутствие на сегодняшних финансовых рынках предлагаемых опционов во всем их многообразии делает развиваемую теорию в некоторой степени умозрительной. Тем не менее, она имеет принципиальное значение и представляет теоретический интерес.

Среди всех зависящих от пути опционов будем выделять некоторые базисные инструменты, допускающие сравнительно простое описание и, во многом, заимствующие черты обычных опционов колл или пут. Их мы в работе будем называть А-опционами (альфа-опционами). Они определяются, вообще говоря, $2n$ параметрами, n из которых, обозначаемые $E_1, E_2, \ldots, E_n$, играют роль страйков в последовательные моменты времени $t \in T$, а другие n – $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, принимающие лишь значения –1 и +1, определяют тип опциона (по аналогии с опционами колл и пут). По этим инструментам, как и для обычного опциона с n-периодным сроком действия, выплачивается доход в момент $t = n$, но величина этого дохода определяется последовательностями цен базового актива и назначенных страйков в моменты времени $t \in T$ и типом опциона.

Тип А-опциона будет задаваться следующим образом. Компонента платежной функции, относящаяся к моменту времени $t \in T$, по аналогии с обычными опционами колл или пут будет определяться одной из двух функций – $\max(0, x_t – E_t)$ (т.е. платежной функции колла) или $\max(0, E_t – x_t)$ (т.е. платежной функции пута). Поэтому тип А-опциона будет определяться тем, какая именно последовательность этих функций используется. Эту последовательность будем для удобства задавать в виде некоторого упорядоченного набора "–1" и "+1" и обозначать через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, причем "–1" отвечает платежной функции колла, а "+1" – пута.

Точное определение А-опциона дается следующим образом. Пусть последовательные цены базового актива образуют вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, последовательные страйки – $E = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$, а

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – произвольный упорядоченный набор –1 и +1. Тогда А-опцион $\mathbf{A}(E; \alpha)$ определяется платежной функцией

$$a(x; E; \alpha) = \max(0, \alpha_1(E_1 - x_1)) \cdot \ldots \cdot \max(0, \alpha_n(E_n - x_n)), \qquad (8)$$

т.е.

$$\mathbf{A}(E; \alpha) = \boldsymbol{G}\{a(x; E; \alpha)\}.$$

Таким образом, тип опциона однозначно определяется векторным параметром α. Всего существуют 2^n различных типов А-опционов. В однопериодном случае опцион $\mathbf{A}(E; \alpha)$ превращается в опцион колл при $\alpha = -1$ и в опцион пут при $\alpha = +1$.

Замечание. Мы вводим зависящие от пути опционы платежными функциями, аргументом которых служит вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ последовательных цен базового актива. Однако вместо такого аргумента платежной функции можно рассмотреть вектор не самих цен актива, а относительных доходов за последовательные периоды $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_k = x_k/x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае принципиальных изменений в предлагаемых конструкциях не будет, и все полученные выше формулы сохраняют силу. Нужно только все введенные параметры (страйки) и вероятностные характеристики (плотности вероятности и функции распределения) соотносить с новыми переменными. Аналогично все сказанное далее о производных инструментах для А-опционов и наведенных распределениях вероятностей для цен актива переносится на относительные доходы.

2.2. "Производные" *A*-опционов

На основе введенных А-опционов можно строить многие другие инструменты, определяемые произвольными платежными функциями, зависящими от траектории движения цены базового актива. При этом, вообще говоря, вовсе не обязательно для каждого $E \in R_n$ требовать присутствия на рынке всех 2^n А-опционов. Как и в однопериодном случае, достаточно, чтобы множество страйков, для которых определен хотя бы один тип А-опциона, совпадало с R_n. Это позволяет отказаться от присутствия на рынке А-опционов, являющихся аналогом выигрышных опционов для однопериодного рынка, когда, например, вектора E и α таковы, что функция a, определяемая равенством (8), принимает положительные значения с близкой к 1 вероятностью.

Как и для однопериодных опционов колл и пут, можно рассмотреть "первые и вторые производные" А-опционов $\mathrm{A}(E; \alpha)$ для многопериодного случая. Их мы будем обозначать $\mathrm{A}'(E; \alpha)$ и $\mathrm{A}''(E; \alpha)$ соответственно. Однако следует иметь в виду, что такие обозначения условны. На самом деле здесь речь идет о производных $\mathrm{A}(E; \alpha)$ порядка n и $2n$ по всем страйкам (по каждому страйку – первого и второго порядка) соответственно, т.е. под этими обозначениями понимаются соответственно

$$\mathrm{A}'(E;\alpha)=\frac{\partial^n \mathrm{A}(E;\alpha)}{\partial E_1 \ldots \partial E_n} \quad \text{и} \quad \mathrm{A}''(E;\alpha)=\frac{\partial^{2n} \mathrm{A}(E;\alpha)}{\partial E_1^2 \ldots \partial E_n^2}.$$

Аналогичное соглашение действует и для обозначения стоимости "производных" А-опционов и платежных функций этих "производных".

Нетрудно проверить, что каждой "первой производной" по страйку E от А-опциона с некоторым вектором α в точке E отвечает платежная функция (по x)

$$a'(x;E;\alpha)=\sigma(\alpha)\chi_{R_n(E,\alpha)}(x), \qquad (9)$$

где правую часть образует характеристическая функция квадранта

$$R_n(E, \alpha) = \{x \mid x_i \le E_i, \text{ если } \alpha_i = 1;\ x_i > E_i, \text{ если } \alpha_i = -1;\ i \in T\}$$

евклидова пространства R_n с вершиной в точке $E = (E_1, E_2,\ldots, E_n)$ с коэффициентом

$$\sigma(\alpha)=\prod\nolimits_{i=1}^{n}\alpha_i\ , \qquad (10)$$

который принимает значение –1 при нечетном количестве используемых в платежной функции А-опциона сомножителей, отвечающих опциону колл, и +1 – при четном.

Наиболее удобным в теоретическом отношении среди "первых производных" является "первая производная" от А-опциона с вектором $\alpha°$, все компоненты которого равны +1. Платежная функция такой "производной" является характеристической функцией квадранта $R_n(E) = \{x \mid x_i \le E_i,\ i \in T\}$ пространства R_n, что как раз соответствует множеству случайных исходов цены, вероятность которого определяет совместную функцию распределения вектора цен x.

Аналогично для получения "вторых производных" следует брать смешанные производные по всем страйкам, но уже по каждому – вторую. Нетрудно видеть, что платежные функции "вторых производных" всех типов А-опционов с одинаковым векторным страйком E совпадают между собой и являются n-мерными дельта-функциями относительно E, т.е. для любого вектора α инструмент "дельта-функция" определяется равенством

$$\boldsymbol{D}(E) = \mathrm{A}''(E;\alpha) = \boldsymbol{G}\{\delta(x - E)\} = \boldsymbol{G}\left\{\prod_{i=1}^{n} \delta(x_i - E_i)\right\}. \tag{11}$$

Отметим, что именно совпадение "вторых производных" всех типов А-опционов между собой делает необязательным их одновременное присутствие на теоретическом рынке для любого E.

С помощью "дельта-функции" $\boldsymbol{D}(E_1, E_2,\ldots, E_n)$ формальное представление инструмента $\boldsymbol{G}\{g(x)\}$ с произвольной платежной функцией n переменных $g(x) = g(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ можно задать в виде

$$\boldsymbol{G}\{g\} = \int_{R_n} g(x)\boldsymbol{D}(x)dx\,. \tag{12}$$

Очевидно, что обычный n-периодный опцион может быть рассмотрен как частный случай зависящего от пути n-периодного опциона и потому получен из А-опционов (например, использованием формулы (12)). Менее очевидна связь опционов с разными сроками действия. Имеет смысл сопоставить зависящие от пути n-периодные опционы с зависящими от пути k-периодными опционами, $k < n$, и, в частности, с обычными k-периодными опционами, для которых платежная функция определяется лишь ценой актива в момент времени $t = k$.

Отметим следующее. Для репликации k-периодных опционов с помощью n-периодных зависящих от пути опционов можно, исходя из платежных функций n-периодных зависящих от пути опционов, построить функции n переменных, фактически зависящие лишь от первых k переменных. Это всегда можно сделать, используя введенные "производные" от базисных n-периодных А-опционов. Поэтому может показаться, что эти функции могут служить платежными функциями k-периодных опционов и что, следовательно, задача реализации k-периодных опционов из n-периодных опционов, в принципе, разрешима.

Однако это не совсем так. Различие, и неустранимое, все же остается. Оно состоит в сроках расчета по опционам. По k-периодным опционам расчет производится в момент k, а по n-периодным – в момент n. Можно сказать, что зависящий от пути n-периодный опцион с платежной функцией, определяемой ценами актива в моменты времени $t \le k$, идентичен некоторому зависящему от пути (или обычному) опциону с k-периодным сроком действия, но с задержкой расчетов до окончания процесса инвестирования ($t = n$), и потому требует учета накопленных процентов.

Тем не менее, когда на рынке присутствуют зависящие от пути (или обычные) опционы с разными сроками действия, их стоимости должны быть некоторым образом согласованы – иначе возможен временной арбитраж! Далее эта согласованность будет уточнена.

2.3. Ценообразование А-опционов и их "производных" на нейтральном к риску рынке

Если предполагать рынок нейтральным к риску, то аналогично однопериодному случаю можно предложить формулу ценообразования А-опционов. Так, для варианта А-опциона с вектором $\alpha°$, все компоненты которого равны +1, естественно положить

$$\mathrm{A}(E,\alpha°) = \left|\mathrm{A}(E,\alpha°)\right| = \frac{1}{r}\int_{R_n} \prod_{i=1}^{n}\big(\max(0, E_i - x_i)\big) f(x)dx\,, \qquad (13)$$

где r – относительный доход от инвестиции за весь горизонт инвестирования.

Дифференцируя по всем переменным x_i однократно и двукратно, получим стоимости "первой производной" и "второй производной" этого А-опциона соответственно (еще раз подчеркнем, что фактически речь идет о смешанных производных n-го и $2n$-го порядков соответственно):

$$\mathrm{A}'(E;\alpha^\circ)=\frac{\partial^n \mathrm{A}(E;\alpha^\circ)}{\partial E_1\partial E_2\ldots\partial E_n}=\frac{F(E)}{r}$$

и

$$\mathrm{A}''(E;\alpha^\circ)=\frac{\partial^{2n} \mathrm{A}(E;\alpha^\circ)}{\partial E_1^2\partial E_2^2\ldots\partial E_n^2}=\frac{f(E)}{r}.$$

Из равенства (13) нетрудно получить соотношение, обобщающее формулу (2) из [1], задающую стоимость опциона пут через функцию распределения цены актива. Если обозначить через $R_n(E)$ квадрант $\{x \mid x_i \le E_i,\ i \in T\}$ n-мерного евклидова пространства R_n, то равенство (13) можно записать в виде

$$\mathrm{A}(E;\alpha^\circ)=\frac{1}{r}\int_{R_n(E)}F(x)dx\ .$$

Очевидны также равенства

$$\mathrm{A}'(E;\alpha^\circ)=F(x)/r \tag{14}$$

и

$$\mathrm{A}''(E;\alpha^\circ)=f(x)/r\ .$$

Рассмотрим теперь произвольный вектор α и пусть $I=\{i_1, i_2,\ldots, i_k\}$ – множество всех тех индексов $i\in T$, для которых $\alpha_i = +1$. Введем вектора E_I и x_I размерности $|I| = k$ как совокупности координат векторов E и x, соответствующих множеству индексов I. Отметим очевидное условие согласованности частных функций распределения $F(x_I)$, определенных для всех подмножеств $I\subseteq T$: если $i\notin I$, то $F(x_I, x_i = +\infty) = F(x_I)$.

Используя формулы (9) и (10), можно записать следующее соотношение для стоимости "первой производной" опциона $\mathrm{A}(E, \alpha)$, обобщающее соотношение (14) для произвольного вектора α:

$$r\mathrm{A}'(E,\alpha) = \sigma(\alpha)\Big(F(E_I) - \sum\nolimits_{i \notin I} F(E_I \cup E_i) + \\ + \sum\nolimits_{i,j \notin I, i<j} F(E_I \cup E_i \cup E_j) - \ldots \pm F(E)\Big).$$

Доказательство этого соотношения повторяет доказательство известного соотношения теории вероятностей для вероятности объединения событий и потому опускается. Далее, можно заметить, что знак $\sigma(\alpha)$ (формула (10)) совпадает со знаком перед $F(E)$ в последней формуле. Поэтому, меняя порядок слагаемых в ее правой части на обратный, получаем иное представление:

$$r\mathrm{A}'(E,\alpha) = F(E) - \sum\nolimits_{i \notin I} F(E_{T \setminus i}) + \\ + \sum\nolimits_{i,j \notin I, i<j} F\big(E_{T \setminus (i \cup j)}\big) - \ldots + \sigma(\alpha) F(E_I). \qquad (15)$$

Как мы уже отмечали, "вторые производные" всех А-опционов имеют одну и ту же платежную функцию (11) (независимо от α). И потому их стоимости на нашем рынке должны совпадать между собой и удовлетворять равенству

$$r\mathrm{A}''(E,\alpha) = f(E).$$

Это соотношение следует также из формулы (15) – смешанные производные по всем страйкам от всех слагаемых в правой части равенства, кроме первого, равны нулю!

Можно получить и аналог теоремы паритета опционов. В данном случае она менее наглядна и едва ли имеет практическое значение. Тем не менее, аналог этой теоремы имеет теоретическое значение и, безусловно, является обобщением. Именно, имеет место равенство

$$r \cdot \sum\nolimits_{\alpha} \sigma(\alpha) \mathrm{A}(E,\alpha) = M \prod\nolimits_{i \in T} (E_i - x_i).$$

Для доказательства заметим, что

$$\prod_{i\in T}\left(E_i - x_i\right) = \prod_{i\in T}\left(p_i - c_i\right),$$

где $p_i = \max(0, E_i – x_i)$, $c_i = \max(0, x_i – E_i)$. При перемножении n сомножителей в правой части равенства получаем 2^n слагаемых, каждое из которых соответствует платежной функции некоторого А-опциона, а знак определяется четностью или нечетностью вхождений в слагаемое сомножителей типа c_i, а именно значением $\sigma(\alpha)$. Беря математическое ожидание от произведения, получаем теорему паритета.

2.4. Наведенная совместная плотность вероятности и наведенные безрисковые ставки

В отсутствие непосредственной информации о распределении вероятностей будущих цен базового актива для его оценки можно использовать сами рыночные цены опционов. Как уже отмечалось, из теоретических соображений эти цены должны быть согласованы. Остановимся на этом подробнее и введем необходимые определения по аналогии с однопериодным случаем.

Итак, предположим, что на теоретическом n-периодном рынке для любой пары векторов $(E; \alpha)$ котируются А-опционы $\mathbf{A}(E, \alpha)$ (хотя бы один из них). Введем *наведенную рынком* (точнее, ценами зависящих от пути опционов) *совместную плотность вероятности* $f_m(x)$, $x = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$, для цен базового актива в моменты времени $t = 1, 2 ,\ldots, n$, определяемую равенством

$$f_m(x) = r_0^n \, \frac{\partial^{2n} \mathrm{A}(x;\alpha)}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_n^2},$$

где $\mathrm{A}(E; \alpha) = |\mathbf{A}(E; \alpha)|$ – цена А-опциона с параметрами $(E; \alpha)$, а коэффициент

$$r_0^n = 1 \Big/ \int_{R_n} \frac{\partial^{2n} \mathrm{A}(x;\alpha)}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_n^2}\, dx$$

вновь, как и в однопериодном случае, интерпретируется как *наведенный рынком безрисковый относительный доход* с тем уточнением, что теперь этот относительный доход приходится на весь горизонт инвестирования – n периодов.

Введенные определения корректны. Действительно, поскольку $A''(E, \alpha) = |\boldsymbol{D}(E)|$, а платежная функция инструментов $\boldsymbol{D}(E)$ при всех $E \in R_n$ неотрицательна, то из условия недопущения арбитража $A''(E; \alpha) \geq 0$, $E \in R_n$, и потому $f_m(x) \geq 0$. Нормировочный коэффициент делает интеграл от функции $f_m(x)$ по всему пространству R_n равным 1. Остается вспомнить, что в силу обоснованно предполагаемой согласованности цен А-опционов (в случае, если области существования котировок разных А-опционов перекрываются) и функция $f_m(x)$, и параметр r_0^n не зависят от α. И, наконец, очевидное равенство

$$\left|\boldsymbol{D}(E)\right| = A''(E, \alpha) = f_m(E) / r_0^n \tag{16}$$

в сочетании с формулой (12) дает соотношение

$$|\boldsymbol{U}| = \int_{R_n} |\boldsymbol{D}(x)| dx = \int_{R_n} f_m(x) dx \Big/ r_0^n = 1 / r_0^n ,$$

означающее, что нормировочный коэффициент r_0^n равен безрисковому относительному доходу за весь n-периодный горизонт инвестирования.

Далее, зависящие от пути опционы со сроками действия меньше n, которые также могут присутствовать на рынке (и такую возможность мы будем предполагать), определяют свои *наведенную рынком совместную плотность вероятности* $f_m(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $k<n$, и *наведенный рынком безрисковый относительный доход* r_0^k *за первые k периодов*. При этом важно, что наведенные безрисковые относительные доходы для горизонтов различной длительности определяются лишь из опционов соответствующей фактической длительности, при этом формально никакого согласования между ними не требуется. Иными словами, в ценах k–периодных опционов на момент времени $t = 0$ содержится информация лишь об относительном доходе r_0^k, но они ничего не говорят о распределении наращивания этого дохода по периодам. Поэтому для полноты n-

периодного рынка следовало бы потребовать, чтобы на нем котировались А-опционы всех сроков действия $k \le n$.

По совокупности наведенных рыночных *спотовых* безрисковых относительных доходов r_0^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, могут быть определены и *форвардные* безрисковые относительные доходы для любого форвардного срока. Так, наведенный *форвардный* относительный доход r_i^{i+k} за интервал длительности k периодов через i периодов от начального момента времени $t = 0$ (т.е. отсчитывая интервал от момента $t = i$) составит

$$r_i^{i+k} = r_0^{i+k} \big/ r_0^i \,. \tag{17}$$

Отметим, что наведенные совместные плотности вероятности, соответствующие различным временным горизонтам, должны быть согласованы между собой. Именно из условия невозможности арбитража вытекает, что должно быть выполнено рекуррентное по $k < n$ соотношение

$$f_m(x_1, \ldots, x_k) = \int_{R_1} f_m(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})dx_{k+1} \,. \tag{18}$$

Действительно, как следует из соотношения (16), обе наведенные плотности, входящие в эту формулу, означают стоимость инструмента $\boldsymbol{D}(E_1, E_2, \ldots, E_k)$, помноженную на r_0^k, и инструмента $\boldsymbol{D}(E_1, E_2, \ldots, E_{k+1})$, помноженную на r_0^{k+1}, соответственно. Интегрирование второй стоимости по всем E_{k+1} дает стоимость первого инструмента, но с отсрочкой платежа по нему на один период. Условие недопущения арбитража требует, чтобы эти стоимости различались множителем r_k^{k+1}, который в соответствии с (17) равен $r_0^{k+1} \big/ r_0^k$. Последнее обстоятельство и подтверждает справедливость предположения (18).

Соотношение (18) означает, что система наведенных совместных плотностей вероятности обладает свойством согласованности, присущим системам обычных совместных плотностей. Кроме того, оно же говорит о том, что в n-периодных зависящих от пути опционах содержится почти вся информация относительно распределения вероятностей для последовательности цен базового актива длины n, за исключением лишь информации о последовательности безрисковых относительных доходов за отдельные периоды всего интервала инвестирования. Кстати, очевидно также, что для полноты рынка вовсе не нужно требовать наличия на рынке зависящих от пути опционов сроков действия меньше n – достаточно обычных k-периодных опционов для всех $k<n$, поскольку из них также можно получить все ставки – как спотовые, так и форвардные. Более того, эти опционы (если рассуждать чисто теоретически) нужны лишь как источник информации о процентных ставках по периодам.

2.5. Оптимальное поведение инвестора со своим взглядом на свойства рынка

Теперь нам надлежит обратиться к предпочтениям инвестора. Как и в случае однопериодного рынка, будем предполагать, что инвестор имеет свой взгляд на распределение вероятностей движения цены базового актива. Считаем, что это распределение имеет совместную n-мерную плотность, равную $f_t(x)$. Как и ранее, вводим отношения правдоподобия (теперь уже многомерные)

$$L(x) = f_m(x) / f_t(x),$$

$$L^{\circ}(x) = 1 / L(x) = f_t(x) / f_m(x).$$

Средний доход инвестора принимает наибольшее значение при векторном страйке $E_{\max}$, доставляющем наибольшее значение функции правдоподобия L°. Через $E_{\min}$ обозначается векторный страйк, доставляющий L° минимум (или L – максимум). Инструментом, обеспечивающим решение этой задачи, служит инструмент $\boldsymbol{D}(E_{\max})$. И снова использование короткой позиции по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$ может неограниченно увеличить средний доход инвестора.

Решение задачи нахождения условного максимума ищется применением многомерной процедуры Неймана-Пирсона аналогично одномерному случаю.

2.6. О многопериодных опционах американского типа

До сих пор речь шла исключительно об опционах европейского типа, т.е. таких, исполнение которых могло происходить только при истечении срока – последний момент рассматриваемого горизонта времени (в момент n для n-периодных опционов). Интересно было бы распространить предлагаемую методику на опционы и американского типа, исполнение которых допускается в произвольный момент в течение жизни опциона по желанию его владельца. Однако на этом пути возникают трудности. Поясним это некоторыми рассуждениями.

В случае опционов американского типа инструмент $\boldsymbol{D}$ (*δ-функция*) следует задавать не одной, а n платежными функциями, размерности которых последовательно возрастают – $\{d_k\}_{k=1,\ldots,n}$. При этом возможны разновидности этого инструмента в зависимости от вариантов платежных функций. Рассмотрим сначала разновидность инструмента, когда эти функции фактически зависят лишь от последнего аргумента. Тогда $d_k(x_1, x_2,\ldots, x_k) = \delta(x_k – E_k)$ (одномерная δ-функция), и для любого k имеет место

$$\left|\boldsymbol{D}(E_1, E_2, \ldots, E_n)\right| = \sum_{k=1}^{n} f_k(E_k) \big/ r_1^k \ . \qquad (19)$$

Действительно, при n=2 мы имеем дело с набором (x_0, x_1, x_2), образованным последовательными ценами базового актива. Обозначим через τ момент исполнения опциона. Очевидно, что исполнение опциона произойдет в момент $\tau = 1$, если выполнится условие $\delta(x_1 – E_1) > |\boldsymbol{D}(E_2|x_1)|/r_2 = f(E_2|x_1)/r_2$, т.е. если $x_1 = E_1$, иначе $\tau = 2$. (Здесь под $\boldsymbol{D}(E_2|x_1)$ следует понимать инструмент, который можно назвать "условной δ-функцией"; его платежная функция строится очевидным образом.) Поэтому доход в момент $t = 1$ будет равен $\max\{\delta(x_1 – E_1), f(E_2|x_1)/r_2\}$. И, следовательно, в момент $t = 0$ стоимость рассматриваемого инструмента определяется равенством

$$\left|\boldsymbol{D}(E_1, E_2)\right| = \frac{f(E_1)}{r_1} + \frac{1}{r_1 r_2}\int_{R_1} \left|\boldsymbol{D}(E_2|x_1)\right| f(x_1)dx_1 = \frac{f(E_1)}{r_1} + \frac{f(E_2)}{r_1 r_2}.$$

Для проверки выполнимости (19) для произвольного n применяется индукция.

Теперь рассмотрим другую разновидность инструмента "δ-функция" (за ним сохраним прежнее обозначение), когда k-мерные платежные функции существенно зависят от всех переменных. В этом случае функции $\{d_k\}_{k=1,\dots,n}$ задаются равенствами $d_k(x_1, x_2,\dots, x_k) = \delta(x_1–E_1)\delta(x_2–E_2)\dots\delta(x_k–E_k)$. Аналогично предыдущему случаю можно показать, что

$$\left|\boldsymbol{D}(E_1, E_2, \dots, E_n)\right| = \sum_{k=1}^{n} f_k(E_1, E_2, \dots, E_k)\Big/ r_1^k \ . \qquad (20)$$

Далее, можно рассмотреть и вопросы ценообразования для инструментов типа колл и пут. Однако проблема в том, что цены этих инструментов не удается выразить через стоимости инструментов типа "δ-функций" – в случае опционов американского типа нарушается свойство аддитивности цен. Так, для первой разновидности инструментов $\boldsymbol{D}$, когда справедливы соотношения (19), а не (20), инструмент $\boldsymbol{C}$ (колл) должен будет задаваться системой функций $c_k(x_1, x_2,\dots, x_k) = (x_k–E_k)^+ = \max(x_k–E_k, 0)$ для всех $k = 1, 2,\dots, n$.

Для такого опциона ценообразование при $n = 2$ проводится на основе следующего рассуждения. В момент $t = 1$ доход от опциона равен $\max\{(x_1–E_1)^+, |\boldsymbol{C}(E_2|x_1)|/r_2\}$. Поэтому исполнение опциона произойдет в момент $\tau = 1$, если максимален первый аргумент, и в момент $\tau = 2$, если – второй. Критическое (пограничное) значение x^* находится из условия равенства обоих аргументов, т.е. из соотношения $x^*–E_1 = |\boldsymbol{C}(E_2|x^*)|/r_2$. Окончательно, в момент $t = 0$ стоимость инструмента $\boldsymbol{C}$ равна

$$\left|\boldsymbol{C}(E_1, E_2)\right| = \frac{f(E_1)}{r_1} + \frac{1}{r_1}\int_{x^*}^{+\infty}(x_1 - E_1) f(x_1)dx_1 +$$

$$+\frac{1}{r_1 r_2}\int_{-\infty}^{x^*}\left|\boldsymbol{C}(E_2|x_1)\right| f(x_1)dx_1.$$

Очевидно, эту процедуру можно продолжить для нахождения стоимости колла для произвольного n. Кроме того, аналогичную процедуру можно применить и для определения стоимости пута. Но также очевидно и то, что эти стоимости (в отличие от случая опционов европейского типа) нельзя получить подходящим взвешенным интегрированием стоимостей "δ-функций". Потому для опционов американского типа и не удается построить процедуру нахождения "оптимального" портфеля инвестора методом, аналогичным рассмотренному в данной работе. И в этом смысле вопрос остается открытым.

В заключение отметим, что, используя цены "δ-функций", можно восстанавливать вероятностные распределения для цен базового актива. Однако если на рынке торгуются "δ-функции", удовлетворяющие соотношению (19), то восстанавливаются лишь маргинальные плотности вероятности. При этом

$$f(E_k) = r_1^k \left| \boldsymbol{D}(\pm\infty, \ldots, E_k, \ldots, \pm\infty) \right|, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если же на рынке присутствуют "δ-функции", цены которых определяются равенствами (20), то можно восстановить и совместные плотности вероятности по формуле

$$f_k(E_1, E_2, \ldots, E_k) = r_1^k \left| \boldsymbol{D}(E_1, \ldots, E_k, \pm\infty, \ldots, \pm\infty) \right|, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Литература

1. Агасандян Г.А. Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь (VaR). М.: ВЦ РАН, 2001. 34 с.
2. Агасандян Г.А. Многоступенчатый критерий VaR на реальном рынке опционов. М.: ВЦ РАН, 2002. 35 с.
3. Agasandian G.A. Optimal Behavior of an Investor in Option Market // International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). Pp. 1859-1864.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Наука, 1975.
5. Macmillan L.G. Options as a Strategic Investment. N.Y.: New York Institute of Finance, 1993. 882 p.

Оглавление