РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Г.А.АГАСАНДЯН

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МНОГОСТУПЕНЧАТОГО КРИТЕРИЯ VAR НА ОПЦИОННЫХ РЫНКАХ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2007

УДК 519.685

Ответственный редактор
доктор техн. наук Ф.И. Ерешко

В работе анализируются особенности применения многоступенчатого критерия VaR к реальным опционным рынкам. В ситуации, когда вероятностями хвостов распределения для цены базового актива, включающих крайние страйки, пренебрегать нежелательно, определяется состав базисных инструментов, в который следует включать не только простейшие баттерфляи, но и крайние спрэды. Обосновывается требование неотрицательности функции критических доходов инвестора, определяющей рисковые предпочтения инвестора. Исследуется целесообразность использования небазисных инструментов (баттерфляев и спрэдов) в качестве компонент оптимального портфеля инвестора, в связи с чем предлагается модификация стандартной процедуры Неймана-Пирсона. Анализируется роль спрэдов цен продавца и покупателя для окончательного представления портфеля через исходные инструменты рынка – коллы и путы. Приводятся иллюстративные примеры.

Рецензенты: В.В. Морозов,
Ю.А. Флеров

Научное издание

В работе исследуется ряд проблем, связанных с применением в реальных условиях опционного рынка многоступенчатого критерия VaR, рассмотренного в прежних работах автора и разработанного как для теоретического опционного, так и для произвольного рынка (см. [1–4]). Там же дается определение функции рисковых предпочтений инвестора $B_{cr}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,1]$.

В качестве основных инструментов опционного рынка мы используем привычные баттерфляи и спрэды. При этом в соответствии с введенной в [4] терминологией мы их характеризуем как базисные или элементарные, хотя такое соответствие для реального рынка может быть лишь приближенным. Более подробно об этом говорится в разд. 2.

В целях приложения разработанных в [1–4] методов к реальным опционным рынкам следует модифицировать эти методы в соответствии со следующими особенностями таких рынков.

- Применение инвестором коротких позиций требует адекватного моделирования. Следует корректировать размер инвестиции и ограничения на функции критических доходов инвестора.

- Использование одних лишь баттерфляев для получения рыночного распределения вероятностей цены базового актива часто бывает недостаточным, так как в их ценах не содержится информации о хвостах этого распределения, включающих крайние страйки.

- Состав торгуемых на рынке инструментов (теоретически) избыточен, так как на рынке присутствуют родственные инструменты, такие как коллы и путы. Хотя их цены и должны в теории подчиняться теореме паритета, но на практике они от паритета, вообще говоря, отклоняются, и этим можно воспользоваться.

- Возможность использования на рынке небазисных инструментов, таких как короткие баттерфляи, требует оценивания их эффективности и введения в процедуру Неймана-Пирсона в качестве элементарного инструмента – компоненты портфеля.

- Приведение подобных членов в представлении портфеля инвестора в виде взвешенной суммы базисных инструментов (баттерфляев и спрэдов), приводящее к получению окончательного представления через исходные коллы и путы, снижает размер инвестиционной суммы за счет эффекта спрэда цен продавца и покупателя.

Сначала рассматриваются основные инструменты опционного рынка и исследуются некоторые их свойства. Затем эти свойства используются при применении многоступенчатого критерия VaR в задаче оптимизации портфеля инвестора на однопериодном опционном рынке.

1. Систематизация баттерфляев и спрэдов

В данном разделе проводится систематизация всех возможных простейших баттерфляев – как длинных, так и коротких. Похожая, только более широкая систематизация может быть реализована и для кондора – естественного обобщения баттерфляев. Каждый простейший баттерфляй образован тремя соседними страйками. Страйки будем последовательно нумеровать индексами i, $i = 1, 2, \ldots, n$, n – количество торгуемых страйков. Баттерфляи допустимы для всех "внутренних" страйков $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Расстояние между ближайшими страйками одно и то же и равно h (от этого ограничения, в принципе, можно отказаться).

1.1. Простейшие длинные и короткие баттерфляи и спрэды и их сравнение по размеру инвестиции

Все возможные баттерфляи (как и кондоры) образованы парой спрэдов – одного медвежьего и другого бычьего (см., например, [6]). В них используются 3 (в кондоре 4) страйка. В зависимости от того, с какими страйками, в каких спрэдах и какого типа опционы используются в комбинации, различают 8 основных вариантов баттерфляя (12 – кондора).

Введем необходимые обозначения. Все варианты баттерфляев будем различать, применяя трехсимвольные обозначения, при этом первый символ S означает короткий вариант баттерфляя, а L – длинный, второй символ в обозначении говорит о типе левого спрэда, а третий – правого, при этом символ C указывает, что спрэд образован коллами, а P – путами. Так, например, SCP означает короткий баттерфляй, образованный колл-спрэдом "медведя" с двумя меньшими страйками и пут-спрэдом "быка" с двумя б*о*льшими страйками. Кроме этого, для обозначения коллов, путов, спрэдов, баттерфляев и прочих инструментов и портфелей будем использовать также полужирный шрифт, а для их цен – обычный.

Для упрощения записи приводимые ниже определения разных типов баттерфляев задаются для крайнего левого простейшего баттерфляя, образованного страйками 1, 2 и 3. Разумеется, все обозначения сохраняют силу и для произвольной тройки соседних страйков.

LCC = $+\boldsymbol{C}_1 - 2\boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_3$ – длинный баттерфляй, образованный двумя длинными коллами со страйками 1 и 3 и двумя короткими коллами со страйком 2.*

LPP = $+\boldsymbol{P}_1 - 2\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3$ – длинный баттерфляй, образованный двумя длинными путами со страйками 1 и 3 и двумя короткими путами со страйком 2.

LCP = $+\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3$ – длинный баттерфляй из одного колл-спрэда "быка" с двумя меньшими страйками 1 и 2 и одного пут-спрэда "медведя" с двумя б*о*льшими страйками 2 и 3.

LPC = $+\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{C}_3$ – длинный баттерфляй из одного пут-спрэда "быка" с двумя меньшими страйками 1 и 2 и одного колл-спрэда "медведя" с двумя б*о*льшими страйками 2 и 3.

SCC = $-\boldsymbol{C}_1 + 2\boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_3$ – короткий баттерфляй, образованный двумя короткими коллами со страйками 1 и 3 и двумя длинными коллами со страйком 2.

SPP = $-\boldsymbol{P}_1 + 2\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_3$ – короткий баттерфляй, образованный двумя короткими путами со страйками 1 и 3 и двумя длинными путами со страйком 2.

---

* Конструкцию баттерфляя из коллов (как и всех других) можно распространить на случай неравномерной решетки страйков. Для внутреннего страйка i с расстояниями h' и h'' до ближайших страйков слева и справа соответственно баттерфляй строится из h'' и h' длинных коллов со страйками $i-1$ и $i+1$ соответственно и $h'+h''$ коротких коллов со страйком i. Его представление $2\,(h'\boldsymbol{C}_{i+1} - (h'+h'')\boldsymbol{C}_i + h''\boldsymbol{C}_{i-1})/(h'h''(h'+h''))$.

SCP = $-\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_3$ – короткий баттерфляй из одного колл-спрэда "медведя" с двумя меньшими страйками 1 и 2 и одного пут-спрэда "быка" с двумя бóльшими страйками 2 и 3.

SPC = $-\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_3$ – короткий баттерфляй из одного пут-спрэда "медведя" с двумя меньшими страйками 1 и 2 и одного колл-спрэда "быка" с двумя бóльшими страйками 2 и 3.

Платежные функции всех этих баттерфляев естественным образом разбиваются на две группы – длинных и коротких баттерфляев. Платежные функции баттерфляев одного типа отличаются одна от другой на константу. Сумма платежных функций любого длинного и любого короткого баттерфляя равна константе.

Когда платежная функция какой-либо комбинации принимает при некоторых значениях цены базового актива отрицательные значения, от инвестора требуют внесения маржи в том минимальном размере, который делает гарантированным полное покрытие убытка инвестора в случае появления отрицательного дохода – отрицательных значений платежных функций. Поэтому для любого баттерфляя размер начальной маржи

$$q = -\min(\varphi(1), \varphi(2), 0),$$

где $\varphi(i)$ – значение платежной функции баттерфляя для страйка i. В формулу не включен страйк 3, так как для баттерфляев $\varphi(3) = \varphi(1)$.

Применение этого принципа ко всем перечисленным баттерфляям определяет размер маржи для каждого из них. Все они представлены ниже в таблице. На самом деле в ней представлены значения $q' = -\min(\varphi(1), \varphi(2))$, что при $q' < 0$ (в случае баттерфляя LCP) в силу практической недопустимости отрицательной маржи является просто полезной информацией.

Таблица. Размер маржи для основных типов баттерфляев

LCC	LPP	LPC	LCP	SCC	SPP	SPC	SCP
0	0	h	$-h$	h	h	0	$2h$

Внесение маржи увеличивает на ее размер как инвестиционную сумму, так и доход. И если скорректированные на размер маржи платежные функции оказываются для двух баттерфляев одинаковыми, то предпочтение, вообще говоря, следует отдавать тому, какой из них обходится инвестору дешевле.

В любом случае из сказанного следует, что функция рисковых предпочтений инвестора $B_{cr}(\varepsilon)$ должна быть неотрицательной, иначе у задачи нет решения. Иными словами, инвестор не вправе рассчитывать на повышение средней доходности инвестиции за счет отрицательных доходов при каких-либо исходах цены базового актива – это противоречит принципам взаимодействия брокера с клиентом.

В последующем изложении мы, понимая важность спрэда цен продавца и покупателя для выводов, тем не менее в целях упрощения приводимых ниже соотношений мы под ценами инструментов в них будем понимать полусумму цен продавца и покупателя. Однако каждый раз, когда нам будет необходимо, мы будем корректировать выводы, подчеркивая влияние спрэда цен. Мы также не будем специально рассматривать комиссионные сборы, однако полезно иметь в виду, что их эффект во многом аналогичен действию спрэда цен.

Рассмотрим сначала длинные баттерфляи. К ним (в соответствии с наименованием) относятся баттерфляи LCC, LPP, LPC и LCP. Платежные функции баттерфляев LCC и LPP одинаковы и имеют канонический вид равнобедренного треугольника с отрезком между страйками 1 и 3 в основании и высотой h. Платежная функция баттерфляя LPC получается из любой из них, если ее сдвинуть вниз на h по оси ординат. Такой вид платежной функции предполагает внесение инвестором маржи в размере h. В результате получается новая платежная функция, уже совпадающая с функциями для LCC и LPP.

Наконец, график платежной функции для LCP лежит выше графика этих функций на ту же величину h. Если бы существовала отрицательная маржа, то в результате применения к платежной функции LCP маржи $-h$ можно было бы уравнять ее с канонической платежной функцией длинного баттерфляя. Без этого баттерфляй LCP становится особым случаем.

Дадим представление инвестиционных сумм для каждого из длинных баттерфляев. Для удобства введем обозначения:

$$\Delta C_i = C_i - C_{i+1}, \qquad \Delta P_i = P_i - P_{i+1}, \qquad \Delta' P_i = P_i - P_{i+1} + h. \tag{1}$$

Обозначим через v общую инвестиционную сумму на организацию позиции, т.е. сумму расходов на приобретение и продажу опционов (стоимость комбинации) вместе с маржей. Используя значения начальной маржи из таблицы, получаем следующие формулы общей инвестиционной суммы для всех длинных баттерфляев:

$$v(\mathrm{LCC}) = C_1 - 2C_2 + C_3 = \Delta C_1 - \Delta C_2, \tag{2}$$

$$v(\mathrm{LPP}) = P_1 - 2P_2 + P_3 = \Delta' P_1 - \Delta' P_2, \tag{3}$$

$$v(\mathrm{LPC}) = P_1 - P_2 + h - C_2 + C_3 = \Delta' P_1 - \Delta C_2, \tag{4}$$

$$v^m(\mathrm{LCP}) = C_1 - C_2 - P_2 + P_3 - h = \Delta C_1 - \Delta' P_2. \tag{5}$$

Появление в последнем соотношении v^m вместо v указывает на то, что для уравнивания платежных функций используется отрицательная маржа. Наилучшим из этих баттерфляев по прибыли будет тот, для которого инвестиционная сумма будет наименьшей (тем не менее баттерфляй LCP должен рассматриваться особо).

Отметим, что на теоретическом опционном рынке (со "справедливыми" ценами) для цен путов $\boldsymbol{P'}$ и $\boldsymbol{P''}$ и коллов $\boldsymbol{C'}$ и $\boldsymbol{C''}$ со страйками e' и e'' соответственно справедлив вариант паритета путколл (принимается, что безрисковая процентная ставка равна нулю):

$$P'' - P' = C'' - C' + e'' - e'.$$

На таком идеальном рынке, как нетрудно видеть, все инвестиционные суммы для длинных баттерфляев в формулах (2)–(5) (как и в приводимых ниже формулах (10)–(13) для коротких баттерфляев) совпадают между собой. Однако на реальном рынке допустимо расхождение в инвестиционных суммах для разных баттерфляев – как длинных, так и коротких.

Используя обозначения (1), условия оптимальности по прибыли (разности между доходом и инвестиционным расходом) для длинных баттерфляев можно записать формально:

$$\mathrm{LCC}:\quad \Delta C_1 < \Delta' P_1,\quad \Delta C_2 > \Delta' P_2; \tag{6}$$

$$\text{LPP:}\quad \Delta C_1 > \Delta' P_1,\quad \Delta C_2 < \Delta' P_2; \tag{7}$$

$$\text{LPC:}\quad \Delta C_1 > \Delta' P_1,\quad \Delta C_2 > \Delta' P_2; \tag{8}$$

$$\text{LCP}^{m}\text{:}\quad \Delta C_1 < \Delta' P_1,\quad \Delta C_2 < \Delta' P_2. \tag{9}$$

Для оптимальности в терминах доходности эти условия остаются справедливыми, если бы в случае с баттерфляем LCP разрешалось реализовывать отрицательную маржу. Раз это не так, баттерфляй LCP заведомо проигрывает другим длинным баттерфляям, поскольку при одинаковой прибыли его доходность в силу большей на величину h инвестиции будет существенно ниже. В таком случае наилучший баттерфляй следует выбирать из первых трех длинных баттерфляев, а баттерфляй LCP рассматривать отдельно.

Теперь обратимся к коротким баттерфляям: SCC, SPP, SCP и SPC. Первые три из них имеют платежные функции, которые могут принимать отрицательные значения, а платежная функция последнего неотрицательна. Легко видеть, что применение маржевых требований к баттерфляям SCC, SPP, SCP означает прибавление к их платежным функциям соответственно h, h, $2h$, что уравнивает их между собой и с платежной функцией баттерфляя SPC.

Таким образом, использование на рынке коротких баттерфляев реально приводит к тому, что инвестиция в каждый из них (с учетом начальной маржи) дает на момент истечения срока одинаковый доход, совпадающий с платежной функцией баттерфляя SPC. В силу равенства скорректированных платежных функций наибольшая прибыль будет получена по тому баттерфляю, инвестиция в который наименьшая.

$$v(\text{SCC}) = -C_1 + 2C_2 - C_3 + h = -\Delta C_1 + \Delta C_2 + h, \tag{10}$$

$$v(\text{SPP}) = -P_1 + 2P_2 - P_3 + h = -\Delta P_1 + \Delta' P_2 + h, \tag{11}$$

$$v(\text{SCP}) = -C_1 + C_2 + P_2 - P_3 + 2h = -\Delta C_1 + \Delta' P_2 + h, \tag{12}$$

$$v(\text{SPC}) = -P_1 + P_2 + C_2 - C_3 = -\Delta' P_1 + \Delta C_2 + h. \tag{13}$$

Тот баттерфляй, для которого выражение справа минимально, и является наилучшим для инвестирования. Очевидно, что условия оптимальности при этом противоположны условиям (6)–(9) для длинных баттерфляев, и мы их не выписываем.

Легко видеть, что соотношения (2)–(5) и (10)–(13) связаны общей зависимостью

$$v(\mathrm{LXY}) + v(\mathrm{SXY}) = h,$$

где в качестве XY может быть подставлена любая из пар CC, PP, CP или PC, а в случае с баттерфляем LPC понимается именно инвестиционная сумма в смысле соотношения (5) (с отрицательной маржей).

Для наилучших длинных баттерфляев из первых трех типов со страйками i, $i = 2, 3, \ldots, n{-}1$, после нормировки – деления на h – будем использовать обозначения $\boldsymbol{B}_i$.

При построении оптимального портфеля можно обойтись баттерфляями для внутренних страйков в случае, если вероятность (с точки зрения инвестора) того, что цена базового актива окажется вне диапазона, охватывающего множество всех внутренних страйков, пренебрежимо мала. Если же это не так, то потребуется использовать рыночные инструменты, в которых зашифрована рыночная информация об этой вероятности. Роль таких инструментов могут играть спрэды, образованные двумя парами крайних страйков. Эти простейшие крайние спрэды назовем *урезанными баттерфляями*.

Они анализируются аналогично простейшим баттерфляям для внутренних страйков. Для каждой пары крайних страйков возможны два длинных и два коротких спрэда – как с коллами, так и с путами. Сохраняя стиль обозначений, принятый для баттерфляев, все такие спрэды можно представить в следующем виде (следует обратить внимание на особенности характера суммарной позиции – длинная или короткая – в связи с асимметрией структуры спрэдов):

LC = $+\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2$ – длинный колл-спрэд, образованный длинным коллом со страйком 1 и коротким коллом со страйком 2;

LP = $-\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ – длинный пут-спрэд, образованный коротким путом со страйком 1 и длинным путом со страйком 2;

SC = $-\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2$ – короткий колл-спрэд, образованный коротким коллом со страйком 1 и длинным коллом со страйком 2;

$SP = +\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2$ – короткий пут-спрэд, образованный длинным путом со страйком 1 и коротким путом со страйком 2.

Длинные спрэды не требуют внесения маржи, а для коротких – величина маржи равна h. Для них инвестиционные расходы (с учетом маржи) определяются соответственно равенствами

$$v(\mathrm{LP}) = -P_1 + P_2 = -\Delta P_1, \quad v(\mathrm{SC}) = -C_1 + C_2 + h = -\Delta C_1 + h, \quad (14)$$

$$v(\mathrm{LC}) = +C_1 - C_2 = \Delta C_1, \quad v(\mathrm{SP}) = +P_1 - P_2 + h = \Delta P_1 + h. \quad (15)$$

Очевидны соотношения

$$v(\mathrm{LP}) + v(\mathrm{SP}) = h, \qquad v(\mathrm{LC}) + v(\mathrm{SC}) = h.$$

Характер платежных функций длинных спрэдов и скорректированных с учетом маржи платежных функций коротких спрэдов говорит о том, что на роль базисных инструментов (после нормировки) для наименьшего страйка ($i = 1$) могут претендовать спрэды LP и SC, а для наибольшего ($i = n$) – LC и SP.

Их сравнение проводим для крайних страйков по отдельности. Для страйка $i = 1$ спрэд LP будет лучшим, если $\Delta C_1 < \Delta' P_1$, а спрэд SC – в противном случае. Для страйка $i = n$ спрэд LC будет лучшим, если $\Delta C_1 < \Delta' P_1$, а спрэд SP – в противном случае. Таким образом, при условии $\Delta C_1 < \Delta' P_1$ лучшим всегда оказывается длинный спрэд (как для колла, так и для пута), а в противном случае – короткий.

Нам будет удобно (и это выглядит естественным) наилучшие спрэды для крайних страйков 1 и n после деления на h также обозначать, как и наилучшие баттерфляи для внутренних страйков, через $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_n$ соответственно.

Все прочие возможные спрэды для крайних страйков – их также четыре – не годятся на роль базисных инструментов, так как для них ненулевыми являются доходы сразу для $n - 1$ сценария. Тем не менее их можно рассматривать как элементарные и их следует оценивать особо, как и баттерфляи, не являющиеся базисными. Такими спрэдами служат те же самые рассмотренные выше 4 спрэда, но на этот раз они меняются местами: для страйка $i = 1$ имеются в виду спрэды LC и SP, а для страйка $i = n$ – спрэды LP и SC. Для них инвестиционные расходы определяются теми же формулами (14) и (15).

1.2. Анализ эффективности простейших небазисных баттерфляев и спрэдов

В данном подразделе мы пытаемся показать, что применение коротких баттерфляев и длинного баттерфляя LCP может быть оправдано лишь наличием спрэда цен продавца и покупателя. Мы докажем, что в предположении о равенстве этого спрэда нулю все эти баттерфляи не могут быть эффективнее эквивалентной по платежной функции комбинации наилучших баттерфляев $\boldsymbol{B}_i$.

Сначала рассмотрим внутренние страйки и проверим эффективность использования пяти из восьми баттерфляев – всех коротких баттерфляев и длинного баттерфляя LCP, – которые не могут служить базисными инструментами.

Предположим, что спрэд цен продавца и покупателя, а также комиссионные расходы равны нулю. Проведем прямую проверку того, что все короткие баттерфляи при произвольной картине рыночных цен коллов и путов не могут быть дешевле эквивалентной по скорректированной платежной функции комбинации наилучших длинных баттерфляев (включая наилучшие крайние спрэды).

В приводимых ниже формулах для удобства записи вводятся фиктивные спрэды $\Delta\boldsymbol{C}_0 = h\boldsymbol{M}$, $\Delta\boldsymbol{C}_n = \boldsymbol{0}$, $\Delta\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{0}$, $\Delta\boldsymbol{P}_n = -h\boldsymbol{M}$ с ценами $\Delta C_0 = h$, $\Delta C_n = 0$, $\Delta P_0 = 0$, $\Delta P_n = -h$. При этом условный инструмент $\boldsymbol{M}$ означает внесение единичной маржи, а "инструмент" $\boldsymbol{0}$ ничего не стоит, но и не приносит никакого дохода.

Для баттерфляя SCC со страйком i инвестиционный расход равен $v = h - C_{i-1} + C_i$. Этому баттерфляю "противостоит" комбинация из одних коллов с той же платежной функцией (это фактически также сумма всех баттерфляев из коллов за исключением i-го)

$$\boldsymbol{S} = \textstyle\sum_{j\neq i} (\Delta\boldsymbol{C}_{j-1} - \Delta\boldsymbol{C}_j). \qquad (16)$$

В данном портфеле внесение маржи вызвано присутствием в сумме крайнего короткого колл-спрэда $-\Delta\boldsymbol{C}_0$. Кроме того, последний спрэд введен для удобства записи. В силу предположения о равенстве спрэда цен продавца и покупателя нулю аналогичное соотношение выполняется для цен:

$$S = \textstyle\sum_{j\neq i} (\Delta C_{j-1} - \Delta C_j). \qquad (17)$$

После очевидных сокращений равенство упрощается:

$$S = h - \Delta C_{i-1} + \Delta C_i.$$

Это значит, что $S = v$. С другой стороны, платежная функция каждого j-го, $j \neq i$, слагаемого в (16), являющегося длинным баттерфляем, совпадает с платежной функцией инструмента $\boldsymbol{B}_j$. В силу оптимальности последнего

$$(\Delta C_{j-1} - \Delta C_j) \geq hB_j,$$

и потому

$$v = h - \Delta C_{i-1} + \Delta C_i \geq \textstyle\sum_{j \neq i} hB_j, \tag{18}$$

что и требовалось доказать.

Аналогично проверяется (в тех же предположениях) неэффективность и прочих коротких баттерфляев SPP, SPC и SCP. Следует лишь заметить, что инвестиционные расходы v для них равны соответственно $h - \Delta P_{i-1} + \Delta P_i$, $-\Delta P_{i-1} + \Delta C_i$ и $2h - \Delta C_{i-1} + \Delta P_i$. Кроме того, равенство (16) нужно заменить соответственно равенствами

$$\boldsymbol{S} = \textstyle\sum_{j \neq i} (\Delta \boldsymbol{P}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{P}_j),$$

$$\boldsymbol{S} = \textstyle\sum_{j<i} (\Delta \boldsymbol{P}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{P}_j) + \sum_{j>i} (\Delta \boldsymbol{C}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{C}_j),$$

$$\boldsymbol{S} = \textstyle\sum_{j<i} (\Delta \boldsymbol{C}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{C}_j) + \sum_{j>i} (\Delta \boldsymbol{P}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{P}_j).$$

Последние два соотношения означают представление инструмента $\boldsymbol{S}$ в виде комбинации баттерфляев, каждый из которых образован либо одними коллами, либо одними путами. С помощью этих равенств доказываются являющиеся аналогом (18) неравенства

$$v = h - \Delta P_{i-1} + \Delta P_i \geq \textstyle\sum_{j \neq i} hB_j, \tag{19}$$

$$v = -\Delta P_{i-1} + \Delta C_i \geq \textstyle\sum_{j \neq i} hB_j, \tag{20}$$

$$v = 2h - \Delta C_{i-1} + \Delta P_i \geq \textstyle\sum_{j \neq i} hB_j. \tag{21}$$

Схожим образом можно рассмотреть и небазисный длинный баттерфляй LCP. Инвестиционный расход для него $v = \Delta C_{i-1} - \Delta P_i$

(использование отрицательной маржи не предполагается). Эквивалентная ему по платежной функции комбинация из колл-спрэдов и пут-спрэдов представима в виде

$$\boldsymbol{S} = \textstyle\sum_{j\le i} (\Delta\boldsymbol{P}_{j-1}-\Delta\boldsymbol{P}_j) + \sum_{j\ge i} (\Delta\boldsymbol{C}_{j-1}-\Delta\boldsymbol{C}_j).$$

Эту комбинацию можно интерпретировать также как сумму всех баттерфляев из путов для страйков $j\le i$ и всех баттерфляев из коллов для страйков $j\ge i$. Отметим, что для страйка $j=i$ используются два баттерфляя – один из коллов и другой из путов. В силу предположения о равенстве спрэда цен продавца и покупателя нулю аналогичное соотношение выполняется для цен:

$$S = \textstyle\sum_{j\le i} (\Delta P_{j-1}-\Delta P_j) + \sum_{j\ge i} (\Delta C_{j-1}-\Delta C_j). \tag{22}$$

После очевидных сокращений равенство упрощается:

$$S = \Delta C_{i-1} - \Delta P_i = v.$$

С другой стороны, платежная функция каждого слагаемого в (22) с индексом j, являющегося длинным баттерфляем, совпадает с платежной функцией инструмента $\boldsymbol{B}_j$ в количестве h. В силу оптимальности последнего

$$(\Delta P_{j-1} - \Delta P_j) \ge hB_j, \qquad (\Delta C_{j-1} - \Delta C_j) \ge hB_j,$$

и потому

$$v= \Delta C_{i-1} - \Delta P_i \ge hB_i + \textstyle\sum_j hB_j, \tag{23}$$

что и требовалось доказать.

Нам осталось рассмотреть урезанные баттерфляи для крайних страйков. А именно рассмотрим те спрэды, которые не могут служить базисными инструментами и не участвуют в определении инструментов $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_n$. Как мы отмечали в разд. 1, такими инструментами являются спрэды LC и SP для страйка $i = 1$ и спрэды LP и SC для страйка $i = n$. Их анализ проводится одинаково и аналогично баттерфляям для "внутренних" страйков.

Для спрэда LC со страйком $i = 1$ инвестиционный расход равен $v = \Delta C_1$. Упрощенная платежная функция этого спрэда принимает значение 0 при цене актива, равной страйку $i = 1$, и h – в остальных страйках. Этому спрэду "противостоит" комбинация из одних коллов с той же платежной функцией (это, фактически, полная сумма всех баттерфляев из коллов, включая урезанный для последнего страйка) и потому

$$\boldsymbol{S} = \sum_{j>1} (\Delta \boldsymbol{C}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{C}_j). \tag{24}$$

Аналогичное равенство выполняется для цен

$$S = \sum_{j>1} (\Delta C_{j-1} - \Delta C_j),$$

которое после очевидных сокращений упрощается:

$$S = \Delta C_1 = v.$$

Как и ранее, получаем

$$v = \Delta C_1 \geq \sum_{j>1} hB_j. \tag{25}$$

Так же записываются соотношения (24) и (25) для спрэда SP для страйка $i = 1$ и для спрэдов LP и SC для страйка $i = n$. Имеем соответственно

$$\boldsymbol{S} = \sum_{j>1} (\Delta \boldsymbol{P}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{P}_j), \qquad v = h - \Delta P_1 \geq \sum_{j>1} hB_j,$$

$$\boldsymbol{S} = \sum_{j<n} (\Delta \boldsymbol{P}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{P}_j), \qquad v = -\Delta P_{n-1} \geq \sum_{j<n} hB_j,$$

$$\boldsymbol{S} = \sum_{j<n} (\Delta \boldsymbol{C}_{j-1} - \Delta \boldsymbol{C}_j), \qquad v = h - \Delta C_{n-1} \geq \sum_{j<n} hB_j.$$

Подобное свойство распространяется и на все виды кондоров – как длинных, так и коротких. Любой такой кондор может быть представлен в виде комбинации (1) либо базисных баттерфляев из коллов, (2) либо базисных баттерфляев из путов, (3) либо нескольких баттерфляев из коллов с меньшими страйками и нескольких баттерфляев из путов с б*о*льшими страйками, (4) либо нескольких баттерфляев из путов с меньшими страйками и нескольких баттерфляев из коллов с б*о*льшими страйками. Потому для них и оценки типа (18) – (21) и (23) оказываются справедливыми.

Итак, мы показали, что в предположении равенства нулю спрэда цен продавца и покупателя никакого выигрыша от использования небазисных элементарных инструментов добиться нельзя. Но на практике такой спрэд не равен нулю. К каким последствиям это может привести?

Нетрудно видеть, что при положительности спрэда цен проводить сокращения в равенствах типа (17) и (22) так, как это делали мы, недопустимо. Можно лишь утверждать, что, например в случае баттерфляя LPC, имеют место неравенства

$$S \geq \Delta C_{i-1} - \Delta P_i = v, \qquad S \geq hB_i + \textstyle\sum_j hB_j,$$

откуда вовсе не следует, что

$$v \geq hB_i + \textstyle\sum_j hB_j. \tag{26}$$

В связи с этим проблема сравнения по эффективности элементарных инструментов, таких как короткие баттерфляи и баттерфляй LCP, с эквивалентными по платежной функции комбинациями наилучших длинных баттерфляев сохраняется.

На примере неравенства (26) выскажем соображения, работающие в пользу и против его выполнения. Против его выполнения говорит то, что сумма $hB_i + \sum_j hB_j$ (и тем более S) может превышать v за счет того, что она в отличие от тестируемого элементарного небазисного инструмента образована большим количеством баттерфляев, притом эффекты от расхождения цен продавца и покупателя суммируются.

В пользу выполнения (26) (т.е. неэффективности использования небазисного элементарного инструмента) говорит обстоятельство, связанное с проблемой окончательного представления портфеля. О нем мы подробнее поговорим в следующем разделе. Здесь же достаточно будет сказать, что в представлении оптимального портфеля через наилучшие базисные баттерфляи многие спрэды встречаются совместно со своими "антагонистами" и при окончательном представлении портфеля через исходные коллы и путы они могут быть взаимно уничтожены, что снижает эффект от расхождения цен продавца и покупателя для одного и того же спрэда.

Ниже в разд. 3 приводятся примеры, в которых даются количественные оценки эффекта от наличия спрэда цен продавца и покупателя. В них для простоты предполагается, что каждый спрэд цен продавца и покупателя для всех коллов и путов равен β. В таком случае реальная сумма цен двух колл-спрэдов $+\Delta \boldsymbol{C}_j$ и $-\Delta \boldsymbol{C}_j$, как и двух пут-спрэдов $+\Delta \boldsymbol{P}_j$ и $-\Delta \boldsymbol{P}_j$, равна уже не нулю, а 2β (при этом не учитывается маржа и возможность специального ценообразования спрэдов). Иными словами, в результате "аннигиляции" каждой пары колл-спрэдов (как и пут-спрэдов) с разными знаками, которые могут быть компонентами базисных баттерфляев, образующих портфель инвестора, инвестиционный расход снижается на 2β.

Поэтому, если два портфеля имеют одинаковые платежные функции и одинаковую стоимость, рассчитанную как полусумма цен продавца и покупателя (т.е. без учета спрэда цен), и при этом второй портфель получен из первого сокращением k пар спрэдов, то реальная стоимость второго будет на $2\beta k$ меньше первого.

2. Баттерфляи и спрэды при использовании многоступенчатого критерия VaR

Здесь мы используем результаты предыдущего раздела при построении "оптимального" портфеля инвестора в условиях избыточности множества элементарных и базисных (в терминологии [4]) инструментов. В предыдущем разделе мы провели классификацию всех простейших баттерфляев и спрэдов и выяснили условия, при которых они могут служить либо непосредственно базисными инструментами, либо элементарными инструментами – кандидатами на использование в качестве компонент оптимального портфеля инвестора. Мы также пришли к выводу, что инвестору не следует использовать функции рисковых предпочтений $B_{cr}(\varepsilon)$, принимающие отрицательные значения, иначе задача не будет иметь решения.

После напоминания канонической процедуры Неймана-Пирсона, доставляющей оптимальный портфель инвестора в теоретической схеме как для опционного, так и произвольного рынка, строится дополнительная процедура, позволяющая для выбранного кандидата в элементарные инструменты определить вес, с которым он должен входить в оптимальный портфель. Кроме того, рассматриваются вопросы, связанные с окончательным представлением оптимального портфеля через исходные коллы и путы.

2.1. Основной алгоритм построения оптимального портфеля инвестора

При нахождении оптимального портфеля инвестора используется вариант метода Неймана-Пирсона, рассмотренный в работе [4] (лежащие в его основе идеи одноименного статистического критерия можно найти, например, в [5]). По сути, здесь применяется сценарный подход, при котором такие инструменты, как баттерфляи LCC, LPP и LPC, интерпретируются (после нормировки) как базисные. Это относится и к крайним спрэдам оговоренных ранее типов.

Для определенности в дискретной схеме рассматриваются n сценариев, и они отождествляются со страйками. Фактически сценарий – это некоторый подходяще выбранный интервал возможных цен базового актива. Естественно выбирать в качестве сценариев для внутренних страйков интервалы длиной h с центром в страйках; для крайних страйков интервалы простираются до крайних возможных значений цены базового актива. В этом случае сохраняется интегральная оценка дохода для каждого "внутреннего" сценария.

Используя этот подход, мы будем иметь дело с упрощенными модификациями упоминавшихся ранее инструментов, таких как спрэды и баттерфляи, сохраняя тем не менее их прежние названия. В терминологии работы [4] эти инструменты будут после нормировки исполнять роль базисных или элементарных инструментов. Упрощенность такой интерпретации связана с тем, что, например, базисный инструмент при одном сценарии дает единичный доход, а при остальных – нулевой. Но для реального баттерфляя сценарий – это множество, и доход на нем переменный с кусочно-линейной зависимостью от цены базового актива. То же относится и к элементарным инструментам и их комбинациям.

Если в составе инструментов, выбранном за основу, имеются небазисные элементарные инструменты, то следует задать матрицу доходов $\mathbf{Y}$ (см. [4]). Элемент $\boldsymbol{y}_{ij}$ этой матрицы означает доход, получаемый инвестором по инструменту i при реализации сценария j. (Если элементарные инструменты являются базисными, то матрица $\mathbf{Y}$ единичная.)

Как следует из анализа разд. 1, приближенно в качестве базисного инструмента для "внутренних" страйков могут выступать после нормирования (деления на h) длинные баттерфляи LCC, LPP и LPC, для наименьшего страйка ($i = 1$) – спрэды LP и SC, и для наибольшего ($i = n$) – LC и SP.

Задача решается методом Неймана-Пирсона, который можно записать формально следующей последовательностью обозначений и операций:

$\mathbf{Y}$ – матрица доходов по элементарным инструментам;

$\boldsymbol{m}$ – вектор рыночных цен элементарных инструментов;

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{m}\,\mathbf{Y}^{-1}$ – вектор цен базисных инструментов;

$\boldsymbol{p}$ – вектор вероятностей всех сценариев, составляющий прогноз инвестора;

$\rho = \boldsymbol{p}/\boldsymbol{c}$ – вектор средних относительных доходов инвестора по всем базисным инструментам (берется поэлементное отношение);

$\xi = \mathbf{O}(\rho)$ – вектор, i-я компонента которого определяет позицию в векторе ρ i-й по величине компоненты, начиная с наименьшей; $\mathbf{O}$ – обозначение соответствующего преобразования;

Ξ – матрица, все элементы которой равны нулю, кроме тех случаев, когда $\xi_i = j$, эти элементы матрицы равны 1 (эта матрица используется для переупорядочивания компонент произвольного вектора, располагая их в порядке возрастания компонент вектора ρ);

$\boldsymbol{d} = \Xi\,\boldsymbol{p}$ – подстановка вектора $\boldsymbol{p}$**,** в которой компоненты упорядочены в возрастающем порядке вектора ρ (т.е. в порядке, определяемом вектором ξ);

T – треугольная матрица, элементы которой равны 1 при $i \geq j$ и 0 в остальных случаях;

$\varepsilon = \mathrm{T}\,\boldsymbol{d}$ – вектор кумулятивных вероятностей для вектора $\boldsymbol{d}$;

$\boldsymbol{b} = \mathrm{f}(\varepsilon)$ – функция критических доходов, выбираемая инвестором (пример: $\mathrm{f}(\varepsilon) = \varepsilon^{\lambda}$, $\lambda > 0$);

$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}\,\Xi$ – вектор весов базисных инструментов в оптимальном портфеле;

$A = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{c})$ – инвестиционная сумма портфеля;

$R = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{p})$ – средний доход;

$r = R/A$ – средний относительный доход;

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{g}\,\mathbf{Y}^{-1}$ – вектор весов элементарных инструментов в оптимальном портфеле.

Этот метод Неймана-Пирсона хорошо справляется с нахождением оптимального портфеля инвестора в случаях, когда матрица $\mathbf{Y}$ единичная. Как следует из анализа разд. 1, этого можно добиться, выбирая нужным образом баттерфляи и спрэды. Тогда оптимальный портфель, предоставляемый процедурой Неймана-Пирсона, можно записать в виде

$$\Pi = \sum_j g_j \boldsymbol{B}_j. \qquad (27)$$

Однако если имеются какие-либо основания, например стоимостного характера, использовать в качестве компоненты оптимального портфеля инструменты, не являющиеся базисными, то для реализации метода Неймана-Пирсона потребуется переход от выбранного множества элементарных инструментов к базисным. Так происходит, например, если инвестор останавливает свой выбор на каком-либо коротком баттерфляе или баттерфляе LCP.

Такой переход, осуществляемый с помощью матрицы $\mathbf{Y}^{-1}$, преобразует сначала цены элементарных инструментов в цены базисных инструментов (третья строка процедуры), а затем и вектор весов $\boldsymbol{g}$ в оптимальном портфеле базисных инструментов в вектор весов $\boldsymbol{w}$ элементарных инструментов (последняя строка).

Такой пересчет не вызывает технических затруднений, но возникает проблема интерпретации результата, когда некоторые компоненты вектора $\boldsymbol{w}$ оказываются отрицательными. Такое решение неприемлемо, поскольку отрицательный вес означает применение короткой позиции, а она, в свою очередь, требует учета начальной маржи. Значит, решение не может быть окончательным, а на сходимость итеративного процесса, который можно было бы здесь организовать, рассчитывать не приходится. В этом случае и возникает необходимость в модификации данного алгоритма.

2.2. Модификация основного алгоритма при использовании небазисных инструментов

Мы не ставим целью дать исчерпывающее решение задачи в условиях избыточности множества тестируемых инструментов, поскольку существующие методы оптимизации не могут находить глобальный минимум. А полный перебор вариантов кажется необъятным. Мы лишь предложим подход, по сути, частичного перебора, при котором будет получено некоторое количество решений, из которых надлежит выбрать наилучший.

Используя алгоритм предыдущего подраздела, мы уже в состоянии предложить, например, три варианта решения. Первый основан на использовании одних коллов, второй – одних путов, а третий – и тех, и других. В первом случае базис образуют (нормированные) колл-баттерфляи, во втором – пут-баттерфляи, и в третьем – баттерфляи $\boldsymbol{B}_i$. На идеальном рынке третий портфель (27) будет наилучшим, но на реальном, как уже обсуждалось выше, это не обязательно так, и необходима проверка (см. примеры 2–4 в разд. 3).

Другие варианты потенциально оптимальных портфелей можно получать при включении в портфель небазисных инструментов, для которых неравенства типа (26) не удовлетворяются. Мы предложим общую схему, как это реализуется.

Рассмотрим ситуацию, когда какой-либо из элементарных инструментов – спрэдов или баттерфляев – оказывается кандидатом на использование в составе оптимального портфеля. В таком случае в матрице $\mathbf{Y}$ некоторую строку с единицей на диагонали (соответственно какому-либо базисному инструменту) необходимо заменить строкой с доходами по этому инструменту. При этом может быть заменена, в принципе, любая строка за исключением той, против которой строится короткая позиция, так как иначе матрица $\mathbf{Y}$ оказывается вырожденной.

В результате применения процедуры Неймана-Пирсона с такой матрицей $\mathbf{Y}$ находятся векторы $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{w}$. Решение может считаться окончательным, если все компоненты вектора $\boldsymbol{w}$ оказываются неотрицательными. В противном случае необходима модификация алгоритма.

Пусть инструмент $\boldsymbol{S}$ является кандидатом на включение в число компонент оптимального портфеля из небазисных инструментов, а $\varphi(x)$ – его платежная функция, скорректированная на размер маржи и спроецированная на сценарии. На месте $\boldsymbol{S}$ может оказаться, вообще говоря, любой инструмент, изучаемый в разд. 1.

Сначала для примера рассмотрим частный случай, когда в качестве $\boldsymbol{S}$ выбирается короткий баттерфляй со страйком α, и допустим, что он замещает длинный базисный баттерфляй со страйком ω. Соответствующая этому замещению матрица **Y** строится следующим образом. За основу берется единичная матрица, и в ней ω-я строка замещается строкой из одних единиц за исключением α-го элемента, равного нулю. Обратная матрица $\mathbf{Y}^{-1}$ имеет аналогичный вид, только в ней все элементы ω-й строки равны минус единице за исключением α-го элемента, равного нулю, и ω-го элемента, равного плюс единице.

Как следует из структуры этой матрицы и последней строки процедуры Неймана-Пирсона, вычисляющей вектор $\boldsymbol{w}$, мы сумеем выдержать ограничения критерия VaR, если обеспечим выполнение условия

$$g_i \geq g_\omega, \quad i \neq \alpha.$$

Именно при этом условии все компоненты вектора $\boldsymbol{w}$ будут неотрицательными. Это условие подсказывает правило, как следует выбирать строку матрицы **Y**, подлежащую замещению. Это должна быть строка с номером ω такая, что g_ω минимально среди всех g_i, исключая $i = \alpha$. Формально

$$g_\omega = \min_{j\neq\alpha} g_j.$$

Уточненный оптимальный портфель включает в себя максимально возможное количество экземпляров g^{o} инструмента $\boldsymbol{S}$, а остальная его часть заимствуется из прежнего оптимального портфеля. В результате он представляется в виде

$$g^{\text{o}}\,\boldsymbol{S} + \textstyle\sum_{j\neq\alpha} (g_j - g^{\text{o}})\,\boldsymbol{B}_j + g_\alpha\,\boldsymbol{B}_\alpha, \quad g^{\text{o}} = g_\omega.$$

По примеру короткого баттерфляя можно предложить общую схему построения оптимального портфеля для произвольного кандидата $\boldsymbol{S}$ с платежной функцией φ(·). Определим

$$g^{\text{o}} = \max_j \{g \mid g\,\varphi(j) \leq g_j\,, \quad j = 1,2,\ldots,n\},$$

и пусть этот максимум достигается при $j = \omega$. Это условие фактически означает нахождение величины g^{o} по формуле

$$g^{\text{o}} = \min_j g_j/\varphi(j),$$

при этом мы допускаем и нулевые значения для функции φ, но с учетом положительности g_j такие страйки – сценарии – в минимизации участия не принимают и на результат влияния не оказывают. В качестве строки матрицы $\mathbf{Y}$, подлежащей замещению, следует выбирать строку с номером ω такую, для которой отношение $g_j/\varphi(j)$ минимально (с учетом принятого допущения).

Итак, $g^o = g_\omega/\varphi(\omega)$, и оптимальный портфель принимает вид

$$g^o\, \boldsymbol{S} + \textstyle\sum_{j\neq\omega} (g_j - g^o\, \varphi(\mathrm{j}))\, \boldsymbol{B}_j. \qquad (28)$$

В частности, применение этого правила для длинного баттерфляя LCP со страйком α требует рассмотрения исходной матрицы $\mathbf{Y}$, получающейся из единичной матрицы замещением ее ω-й строки строкой из одних единиц за исключением α-го элемента, равного 2. Здесь возможны два случая: $\alpha \neq \omega$ и $\alpha = \omega$. В первом случае матрица $\mathbf{Y}^{-1}$ также получается из единичной матрицы замещением ω-й строки строкой, все элементы которой равны –1 за исключением α-го элемента, равного –2, и ω-го элемента, равного +1. Во втором случае ω-я строка матрицы $\mathbf{Y}^{-1}$ выглядит иначе: все ее элементы равны –0.5 за исключением ω-го элемента, равного +0.5. В первом случае $g^o = g_\omega$, во втором – $g^o = g_\omega/2$. Представление (28) для баттерфляя LCP можно переписать в виде

$$g^o\, \boldsymbol{S} + \textstyle\sum_{j\neq\omega} (g_j - g^o)\, \boldsymbol{B}_j.$$

Портфель (28) можно попытаться еще улучшить. Следующий шаг повторяет предыдущий, только с новым портфелем, задаваемым вторым слагаемым в (28), т.е. базисным представлением с весами

$$g_j' = g_j - g^o\, \varphi(\mathrm{j}).$$

Поскольку $g_\omega' = 0$, то многие кандидаты отсеиваются, и на этом шаге, скорее всего, могут подойти лишь кондоры (короткие или длинные). В любом случае при желании выделить из нового портфеля часть, которую можно было бы представить каким-либо другим элементарным инструментом, не являющимся базисным, например инструмент $\boldsymbol{S}'$, следует действовать аналогично предыдущему. Иными словами, находится такое количество g' инструмента $\boldsymbol{S}'$, которое не нарушает ограничений критерия VaR, но снижает инвестиционные расходы. Этот процесс можно продолжить, пока множество кандидатов не будет исчерпано.

2.3. Проблемы окончательного представления оптимального портфеля инвестора

Применение баттерфляев при проведении процедуры Неймана-Пирсона на реальном рынке порождает еще проблему окончательного представления оптимального портфеля через исходные инструменты рынка – коллы и путы. На идеальном рынке возврат к ним ничего нового не дает, так как на нем цены продавца и покупателя совпадают между собой. Но на реальном рынке они разнятся, и переход к коллам и путам может принести определенную экономию.

Дело в том, что использовании в оптимальном портфеле базисных баттерфляев приходится фактически многократно продавать и покупать одни и те же коллы либо путы, и при этом многое теряется на спрэде цен. Если же вернуться к коллам и путам, произведя необходимые сокращения, то платежная функция портфеля не изменится, а его стоимость уменьшится. Поэтому переход к представлению портфеля через исходные коллы и путы целесообразен.

Однако при этом следует проявлять определенную осторожность. Использование коротких спрэдов для крайних страйков требует внесения маржи, отмечаемого нами условным инструментом $\boldsymbol{M}$. Если в оптимальном портфеле проводить полное сокращение, то получаемая комбинация из коллов и путов (без члена с $\boldsymbol{M}$) может потребовать внесения маржи в меньшем объеме, чем это означено коэффициентом при $\boldsymbol{M}$. Но размер маржи важно сохранить, если мы намерены выдерживать все ограничения, проистекающие из требований критерия VaR.

Здесь напрашиваются два способа поведения. Первый способ состоит в исключении короткого спрэда из процедуры приведения подобных членов и ее применении лишь к остальным спрэдам. Второй способ заключается в проведении полного сокращения входящих в представление портфеля спрэдов (включая крайние). Затем определяется новый размер маржи соответственно получающейся после сокращений комбинации коллов и путов. Разность между исходным размером маржи и новым (она неотрицательна) подлежит резервированию из суммы инвестора, предназначенной для инвестирования на рынке опционов. Этот способ на реальном рынке предпочтителен, поскольку при нем сокращение более полное и потому стоимость портфеля меньше.

В связи с окончательным представлением оптимального портфеля предлагается также сравнивать между собой три портфеля:

- оптимальный портфель, получаемый из полного набора всех коллов и путов и составленный, вообще говоря, из тех и других;
- оптимальный портфель, получаемый из одних лишь коллов;
- оптимальный портфель, получаемый из одних лишь путов.

Сравнение проводится после получения представления этих портфелей через исходные коллы и путы после всех возможных сокращений.

Портфель с наименьшей стоимостью и будет окончательным оптимальным портфелем инвестора. Суть этого предложения состоит в том, что поскольку в первый портфель входят одновременно коллы и путы, которые взаимно несократимы, то более полным сокращение получается в случае второго и третьего портфелей, что приводит к снижению стоимостей последних двух портфелей. Однако проверка все же необходима, так как заранее неизвестно, что перевесит – эффект от более полного сокращения или эффект от использования наилучших баттерфляев, включая и баттерфляи смешанного типа.

Далее рассмотренные здесь и ранее соображения демонстрируются на примерах.

3. Иллюстративные примеры

В данном разделе рассматриваются некоторые примеры, в которых находят отражение некоторые особенности применения многоступенчатого критерия VaR к опционному рынку, изложенные в предыдущих двух разделах. В первом примере демонстрируется, как наличие спрэда цен продавца и покупателя и возможность проведения сокращений при окончательном представлении портфеля влияют на эффективность использования баттерфляя LCP в качестве элементарного инструмента.

Пример 1. Пусть для простоты на рынке имеются опционы всего с 3 страйками. Проанализируем условия, при которых баттерфляй LCP для среднего страйка можно рассматривать кандидатом на использование в оптимальном портфеле. Разумеется, в соответствии с результатами разд. 1 мы должны отказаться от предположения равенства нулю спрэда цен продавца и покупателя, так как иначе этот баттерфляй заведомо неэффективен. При этом мы сохраняем прежние обозначения для цен C_i, P_i, B_i, понимая под ними в этом случае, как мы договорились ранее, среднюю цену между ценой продавца и ценой покупателя – их полусумму.

Итак, предположим, что для второго страйка выполняются неравенства (9) и потому

$$h + \Delta P_1 - \Delta C_1 = x > 0, \quad h + \Delta P_2 - \Delta C_2 = y > 0. \qquad (29)$$

Для баттерфляя LCP инвестиционный расход $v = \Delta C_1 - \Delta P_2$, а его платежная функция принимает значение $2h$ для сценария 2 и по h для двух других сценариев 1 и 3. Такую же платежную функцию имеет комбинация $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}_1 + 2\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_3$ из наилучших длинных баттерфляев. Заметим, что из выполнения условия (9) или его следствия (29) сразу следует, что

$$\boldsymbol{B}_1 = -\Delta P_1, \quad \boldsymbol{B}_3 = \Delta C_2.^*$$

В отношении $\boldsymbol{B}_2$ такой определенности нет, и возможны все три случая: 1) $\boldsymbol{B}_2 = \Delta C_1 - \Delta C_2$, 2) $\boldsymbol{B}_2 = \Delta P_1 - \Delta P_2$, 3) $\boldsymbol{B}_2 = \Delta' P_1 - \Delta C_2$. В каждом из случаев представим стоимость комбинации $\boldsymbol{S}$ через ΔC_1 и ΔP_2. Используя (29), а также вводя параметр β – характеристику спрэда цен продавца и покупателя, получаем, что в 1-м случае для портфеля $\boldsymbol{S}$ и его цены имеют место соотношения

$$\boldsymbol{S} = -\Delta \boldsymbol{P}_1 + 2(\Delta \boldsymbol{C}_1 - \Delta \boldsymbol{C}_2) + \Delta \boldsymbol{C}_2 = -\Delta \boldsymbol{P}_1 + 2\Delta \boldsymbol{C}_1 - \Delta \boldsymbol{C}_2,$$

$$S = h - \Delta C_1 - x + 2\Delta C_1 - h - \Delta P_2 + y = v + 4\beta - x + y.$$

Аналогично во 2-м случае

---

* Этот факт демонстрирует, что наилучшие базисные инструменты, вообще говоря, взаимосвязаны по страйкам и не могут быть произвольными.

$$\boldsymbol{S} = -\Delta\boldsymbol{P}_1 + 2(\Delta\boldsymbol{P}_1 - \Delta\boldsymbol{P}_2) + \Delta\boldsymbol{C}_2 = \Delta\boldsymbol{P}_1 - 2\Delta\boldsymbol{P}_2 + \Delta\boldsymbol{C}_2,$$

$$S = -h + \Delta C_1 + x - 2\Delta P_2 + h + \Delta P_2 - y = v + 4\beta + x - y.$$

В 3-м случае соотношения принимают вид

$$\boldsymbol{S} = -\Delta\boldsymbol{P}_1 + 2(\Delta\boldsymbol{P}_1 - \Delta\boldsymbol{C}_2 + h) + \Delta\boldsymbol{C}_2 = \Delta\boldsymbol{P}_1 - \Delta\boldsymbol{C}_2 + 2h,$$

$$S = -h + \Delta C_1 + x - 2\Delta P_2 - h - \Delta P_2 + y + 2h = v + 2\beta + x + y.$$

Если учесть спрэд цен продавца и покупателя, то цена исходного баттерфляя LCP $S = v + 2\beta$. Поэтому, как легко видеть, в нашем примере в силу (29) в 3-м случае исходный баттерфляй LCP безусловно лучше эквивалентной комбинации наилучших длинных базисных баттерфляев. В 1-м и 2-м случаях для такого утверждения нужно дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие $x < 2\beta + y$ и $y < 2\beta + x$ соответственно. □

В следующем примере демонстрируется, как в случае использования в качестве базисных инструментов одних лишь коллов при проведении сокращений в окончательном представлении портфеля учитывается размер маржевых требований. Здесь также оценивается эффективность таких сокращений в отношении снижения размера инвестиции, когда спрэд цен продавца и покупателя не предполагается равным нулю.

Пример 2. Допустим, мы строим на опционном рынке всего с 3 страйками оптимальный портфель базисных инструментов, образованный лишь из коллов. В качестве таковых нам следует выбрать (с последующей нормировкой): короткий колл-спрэд $-\Delta\boldsymbol{C}_1$ для 1-го страйка, длинный колл-баттерфляй $\Delta\boldsymbol{C}_1 - \Delta\boldsymbol{C}_2$ для 2-го страйка и длинный колл-спрэд $\Delta\boldsymbol{C}_2$ для 3-го страйка. Пусть в результате применения метода Неймана-Пирсона получен вектор весов оптимального портфеля $\boldsymbol{g} = (1.0, 2.0, 0.5)$, т.е. оптимальный портфель представляется в виде

$$\boldsymbol{S} = (h\boldsymbol{M} - \Delta\boldsymbol{C}_1) + 2(\Delta\boldsymbol{C}_1 - \Delta\boldsymbol{C}_2) + 0.5\Delta\boldsymbol{C}_2. \qquad (30)$$

В предположении равенства нулю спрэда цен продавца и покупателя в результате сокращений это представление упрощается:

$$\boldsymbol{S} = h\boldsymbol{M} + \Delta\boldsymbol{C}_1 - 1.5\Delta\boldsymbol{C}_2. \tag{31}$$

Минимальное значение платежной функции части $\Delta\boldsymbol{C}_1 - 1.5\Delta\boldsymbol{C}_2$ портфеля равно $-0.5h$. Поэтому достаточно внесения маржи $0.5h$. Следовательно, половина "инструмента" $h\boldsymbol{M}$ оказывается невостребованной, но для целей обеспечения неравенств VaR эту половину нужно, тем не менее, зарезервировать. Если допустить, что спрэд цен продавца и покупателя для каждого спрэда равен 2β, то, как легко видеть (достаточно сравнить суммы абсолютных значений коэффициентов при спрэдах в портфелях), цена портфеля (30) превысит цену портфеля (31) на 3β ($= 5.5\beta - 2.5\beta$). □

Следующий пример повторяет анализ из примера 2 с заменой коллов путами. Демонстрируется, что при этом эффект от применения маржевых требований иной.

Пример 3. В условиях предыдущего примера заменим коллы путами. В качестве базисных инструментов нам следует выбрать (с последующей нормировкой): длинный пут-спрэд $-\Delta\boldsymbol{P}_1$ для 1-го страйка, длинный пут-баттерфляй $\Delta\boldsymbol{P}_1 - \Delta\boldsymbol{P}_2$ для 2-го страйка и короткий пут-спрэд $\Delta\boldsymbol{P}_2$ для 3-го страйка. Оптимальный портфель представим в виде

$$\boldsymbol{S} = -\Delta\boldsymbol{P}_1 + 2(\Delta\boldsymbol{P}_1 - \Delta\boldsymbol{P}_2) + 0.5(\Delta\boldsymbol{P}_2 + h\boldsymbol{M}). \tag{32}$$

После сокращений имеем

$$\boldsymbol{S} = \Delta\boldsymbol{P}_1 - 1.5\Delta\boldsymbol{P}_2 + 0.5h\boldsymbol{M}. \tag{33}$$

Минимальное значение платежной функции части $\Delta\boldsymbol{P}_1 - 1.5\Delta\boldsymbol{P}_2$ этого портфеля равно $-0.5h$. Поэтому достаточно внесения маржи $0.5h$. Следовательно, в соответствии с представлением (33) никаких дополнительных действий с маржей предпринимать не следует. Как и в примере 2 (и в его предположениях), разность цен портфелей (32) и (33) также составит 3β. □

В последнем примере рассматривается общая в сравнении с примерами 2 и 3 ситуация, когда в качестве базисных инструментов используются и коллы, и путы. Приводятся условия, при которых в данном примере, когда наилучшим баттерфляем для страйка 2 является пут-баттерфляй, оптимальным будет не портфель, построенный из наилучших баттерфляев $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ и $\boldsymbol{B}_3$, а портфель на основе одних лишь путов.

Пример 4. В условиях примеров 2 и 3 рассмотрим общий случай, когда базисные инструменты могут строиться одновременно из коллов и путов. Предположим, что теперь наилучшим базисным инструментом для 2-го страйка оказывается длинный пут-баттерфляй $\Delta\boldsymbol{P}_1\text{–}\Delta\boldsymbol{P}_2$. В соответствии с неравенствами (7) отсюда следует, что

$$\Delta\boldsymbol{C}_1 - \Delta\boldsymbol{P}_1 - h = x > 0, \qquad \Delta\boldsymbol{C}_2 - \Delta\boldsymbol{P}_2 - h = -y < 0. \tag{34}$$

Это, в свою очередь, означает, что наилучшим урезанным баттерфляем для 1-го страйка будет короткий колл-спрэд $-\Delta\boldsymbol{C}_1$, а для 3-го страйка – длинный колл-спрэд $\Delta\boldsymbol{C}_2$. И оптимальный портфель представляется в виде

$$\boldsymbol{S} = (h\boldsymbol{M}-\Delta\boldsymbol{C}_1) + 2(\Delta\boldsymbol{P}_1-\Delta\boldsymbol{P}_2) + 0.5\Delta\boldsymbol{C}_2. \tag{35}$$

Строго говоря, изменение состава базисных инструментов и потому их стоимостей согласно процедуре Неймана-Пирсона может изменить и вектор весов $\boldsymbol{g}$ оптимального портфеля. Однако условность примера позволяет нам пренебречь этим. Полученный портфель не допускает сокращений. Сравним сначала стоимости S^{o}, S' и S'' портфелей (30), (31) и (35) соответственно.

В примере 2 было установлено, что $S^{o} = S' + 3\beta$, где 2β – спрэд цен продавца и покупателя. Далее, поскольку из (34) следует, что стоимость $\Delta\boldsymbol{C}_1\text{–}\Delta\boldsymbol{C}_2$ превышает стоимость $\Delta\boldsymbol{P}_1\text{–}\Delta\boldsymbol{P}_2$ на $x + y$, то $S^{o} = S'' + 2(x+y)$. Поэтому и $S' = S'' + 2(x+y) - 3\beta$. Следовательно, портфель (35) лучше портфеля (31) тогда и только тогда, когда $2(x+y) > 3\beta$.

Аналогично сравниваются стоимости портфелей (32), (33) и (35). Вновь обозначая их соответственно через S^{o}, S' и S'', согласно примеру 3 имеем равенство $S^{o} = S' + 3\beta$. Кроме того, из (34) следует, что теперь $S^{o} = S'' + x + 0.5y$. Поэтому $S' = S'' + x + 0.5y - 3\beta$. Следовательно, портфель (35) лучше портфеля (33) тогда и только тогда, когда $x + 1.5y > 3\beta$.

Вместе с тем мы показали, что стоимость портфеля (31) превышает стоимость портфеля (33) на $x + 1.5y$, т.е. оптимальный портфель на основе одних коллов в данном примере хуже аналогичного портфеля на основе одних путов.

Таким образом, при данном векторе $\boldsymbol{g}$ и при выполнении неравенства (7) достаточно проверить неравенство $x + 0.5y > 3\beta$. Если оно выполняется, то лучше использовать "смешанный" портфель (35), если выполняется противоположное неравенство – то портфель (33) из одних путов. □

Литература

1. Агасандян Г.А. Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь (VaR). М.: ВЦ РАН, 2001. 34 с.
2. Agasandian G.A. Optimal Behavior of an Investor in Option Market // International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). Pp. 1859-1864.
3. Агасандян Г.А. Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов //Экономика и математические методы, 2005. Т. 41. №4. С. 88-98.
4. Агасандян Г.А. Многоступенчатый критерий VaR на произвольном однопериодном рынке. М.: ВЦ РАН, 2005. 45 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Наука, 1975.
6. Макмиллан Л.Г. Опционы как стратегическое инвестирование. 3-е изд. М.: Издательский дом "ЕВРО", 2003. 1225 с.

Оглавление