ФИНАНСОВАЯ ИНЖЕНЕРИЯ И КОНТИНУАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ VaR НА РЫНКЕ ОПЦИОНОВ

© 2003 г. Г.А. Агасандян

(Москва)

В работе на примере рынка опционов ставится и решается задача оптимального поведения инвестора со своим взглядом на вероятностные свойства рынка. Показывается, что если на рынке представлены опционы с большим разнообразием цен исполнения, а инвестор руководствуется популярным в настоящее время критерием допустимых потерь в его стандартном виде, результаты инвестирования могут оказаться абсурдными. Предлагается обобщение этого критерия (континуальную версию критерия VaR), способное отразить весьма широкий класс предпочтений инвесторов и лишенное этого недостатка. Особенности получаемых конструкций демонстрируются на примерах.

Введение

Настоящая работа затрагивает круг проблем финансового анализа, связанных с управлением рисками. Измеряют риски разными способами; наиболее распространенными можно считать два из них. Первый основан на дисперсии или стандартном отклонении (волатильности) доходности инвестиции, а другой – на оценке вероятности получения участником рынка недопустимо малых для него доходов. В последнее время наибольшее распространение приобретает именно второй метод ([1-8]). Следуя устоявшейся среди финансистов практике, мы будем называть его критерием *VaR (value at risk)*, оставляя это сокращение без перевода. (В англоязычной финансовой литературе для него используют два термина – *drawdown criteria* (см. [8]), что можно перевести как *критерий допустимых потерь*, и собственно *value at risk*.)

Одни исследователи предпочитают первую меру риска, другие – вторую. У каждой из них есть свои достоинства и недостатки. Тем не менее, к обеим этим мерам риска следует относиться с осторожностью. Понятно желание исследователей свести весь рисковый аспект инвестиции к единственной характеристике, каковой служит в первом случае дисперсия, а во втором – VaR. Но столь же очевидно и то, что никакое одно число не в состоянии отразить как рисковый исход инвестиции, так и отношение инвестора к получаемому случайному результату инвестиции. Положение, похоже, часто спасает то, что обычно выбор среди альтернативных инвестиций у инвестора невелик. Тогда любая подобная ограниченная характеристика вполне может найти свою сферу применимости.

В работе мы пытаемся отойти от такого ограниченного взгляда на описание рисковых предпочтений инвестора. Мы показываем, что расширенное представление о рисковых предпочтениях инвестора в сочетании со значительными его возможностями по выбору объекта инвестирования вынуждает отказываться от традиционного описания его интересов в сфере риска с помощью критерия VaR (равно как и с помощью дисперсии), так как иначе результаты его инвестиции оказываются неудовлетворительными.

В качестве объекта исследования в работе выбран рынок опционов. За последнее время во всем мире наблюдался сильный рост объемов опционной торговли. Несмотря на неразвитость этого сегмента финансового рынка в нашей стране (в качестве робкого движения в становлении такого рынка можно привести пример опционов на индекс РТС), за ним, безусловно, большое будущее.

В настоящей работе исследуется поведение инвестора на рынке опционов. Предполагается, что у каждого инвестора свои взгляды на вероятностные свойства рынка. Такая задача представляет безусловный практический интерес для участников рынка. Известно, что многие инструменты опционного рынка (такие как стрэнглы и стрэддлы) специально создавались для стремящихся "обыграть" рынок трейдеров в случае, когда их представление о рынке расходилось с общим мнением участников, которое было "зашифровано" в рыночных ценах (см., например, [9]).

Однако, как показано в настоящей работе, применение инвестором для решения этой задачи существующего формального аппарата, нашедшего воплощение в стандартном варианте критерия *VaR* на высокоразвитом рынке (где в полной мере могут проявиться возможности финансовой инженерии по синтезу производных продуктов) чревато нежелательными для него эффектами. Предлагаются многоступенчатая и континуальная версии критерия *VaR*, которые позволяют избавиться от недостатков стандартного его варианта и наиболее полно отразить предпочтения инвестора.

В работе трансакционными издержками пренебрегаем.

1. Свойства теоретического однопериодного рынка опционов

Рассмотрим для простоты однопериодный рынок, на котором обращаются рисковый актив (акции), опционы колл и пут на этот актив, а также безрисковый актив. Здесь под однопериодным рынком понимается простейшая временная конструкция, охватывающая всего лишь два момента времени – начало и конец периода. В начале периода инвестируется некоторая сумма, а в его конце инвестор получает доход.

Для простоты также принимается, что рынок (как единое целое) нейтрален к риску, что позволяет получить простые формулы ценообразования опционов и проследить его свойства. Кроме того, рассматриваемый рынок можно назвать теоретическим, так как на нем котируемое множество страйков (цен исполнения) опционов предполагается континуальным и составляющим всю вещественную прямую.

1.1. Инструменты рынка опционов: опционы колл, пут и их производные

Условимся обозначения инструментов, рассматриваемых в работе, отмечать полужирным курсивом, а их цены – простым курсивом. Так, символом ***G*** будем обозначать некоторый инструмент, а *G* – его цену (для нее иногда используется также обозначение |***G***|). Считаем, что на рынке обращается некоторый рисковый актив (акция), являющийся базовым для опционов, опционы колл и пут на этот актив, а также безрисковый актив. Единичный рисковый актив обозначается $\boldsymbol{S}$, а единичный безрисковый актив – $\boldsymbol{U}$. Опционом колл на актив $\boldsymbol{S}$ со страйком E называют инструмент $\boldsymbol{C}(E)$ с платежной функцией $c(x; E) = \max(0, x\text{-}E)$, где x – будущая цена базового актива, а опционом пут – инструмент $\boldsymbol{P}(E)$ с платежной функцией $p(x; E) = \max(0, E\text{-}x)$. Предполагается, что на (теоретическом) рынке котируются опционы колл и пут для всех страйков из множества всех вещественных чисел R.

Следует отметить, что опционы – это контракты, оговаривающие права и обязанности сторон. Однако формально опционы полностью определяются именно платежной функцией. Под платежной функцией понимается случайный доход, получаемый инвестором в результате своей инвестиции в конце периода и зависящий от соотношения будущей цены актива и параметра (страйка) опциона.

Используя различные (включая континуальные) взвешенные комбинации этих инструментов с использованием различных страйков, можно получить множество других (производных) инструментов. В качестве таковых будем рассматривать, в частности, инструменты, построенные по аналогии с производными от функций в смысле, принятом в дифференциальном исчислении. Такое использование термина "производный инструмент" в дополнение к общему, принятому в финансовой литературе, мы будем выделять кавычками. Подобное замечание касается и других инструментов. Будем строить, например, инструменты "дельта-функция" и "индикатор (характеристическая функция) множества", вводимых по аналогии с дельта-функциями и индикаторами множеств соответственно в обычном для математического анализа смысле.

Итак, "первой производной" (по страйку) опциона колл назовем инструмент $\boldsymbol{C}'(E)$, платежная функция которого $\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{E}) = -\chi_{[\boldsymbol{E},\infty)}(\boldsymbol{x})$, где χ_A – индикатор множества A. Этот инструмент можно рассматривать как предел последовательности инструментов ($\boldsymbol{C}(E+\Delta E)$ –

$\boldsymbol{C}(E)) / \Delta E$ при $\Delta E \to 0$. Отметим, что в числителе стоит инструмент, называющийся в финансовой литературе *коротким вертикальным спредом "быка"*. (Для нас переход от "длинного инструмента" к "короткому", что в биржевой среде соответствует замене покупки продажей, означает просто изменение знака платежной функции.)

Аналогично назовем "первой производной" опциона пут инструмент $\boldsymbol{P}'(E)$, платежная функция которого $p'(x,E) = \chi_{(-\infty,E)}(x)$. И этот инструмент можно рассматривать как предел последовательности инструментов $(\boldsymbol{P}(E+\Delta E) - \boldsymbol{P}(E)) / \Delta E$ при $\Delta E \to 0$. Здесь в числителе используется *длинный вертикальный спред "медведя"*.

Кстати, введенный актив $\boldsymbol{U}$ не является независимым: при использовании предельных инструментов он может быть реплицирован из опционов колл (или пут). Очевидно, в соответствии с платежными функциями для любого $E \in R$

$$\boldsymbol{P}'(E) - \boldsymbol{C}'(E) = \boldsymbol{U},$$

т.е. инструмент $\boldsymbol{U}$ может быть реплицирован комбинацией одного длинного инструмента $\boldsymbol{P}'(E)$ и одного короткого инструментов $\boldsymbol{C}'(E)$.

Введем еще в качестве "вторых производных" опционов колл и пут инструменты, платежные функции которых совпадают между собой и равны $\delta(x-E)$ ($\delta(x)$ – обобщенная дельта-функция). Эти инструменты можно рассматривать как пределы инструментов $(\boldsymbol{C}'(E+\Delta E) - \boldsymbol{C}'(E)) / \Delta E$ и $(\boldsymbol{P}'(E+\Delta E) - \boldsymbol{P}'(E)) / \Delta E$ при $\Delta E \to 0$ и обозначать $\boldsymbol{C}''(E)$ и $\boldsymbol{P}''(E)$ соответственно. Из смысла "первых производных" получаем, что они являются также и пределами инструментов $(\boldsymbol{C}(E+2\Delta E) - 2\boldsymbol{C}(E+\Delta E) + \boldsymbol{C}(E)) / (\Delta E)^2$ и $(\boldsymbol{P}(E+2\Delta E) - 2\boldsymbol{P}(E+\Delta E) + \boldsymbol{P}(E)) / (\Delta E)^2$ соответственно при $\Delta E \to 0$. Инструмент с платежной функцией $\delta(x-E)$ будем обозначать $\boldsymbol{D}(E)$. Поэтому $\boldsymbol{C}''(E) = \boldsymbol{P}''(E) = \boldsymbol{D}(E)$.

Строго говоря, введение таких инструментов, как "первые и вторые производные" опционов, оправдано лишь с теоретической точки зрения – на реальном рынке их точное воспроизведение невозможно. Понятно, что наилучшим рыночным приближением, например, к "первой производной" могут служить подходящего объема ("элементарные") вертикальные спреды, образованные соседними страйками.

Далее для произвольного инструмента с платежной функцией $g(x)$ мы используем общее обозначение $\boldsymbol{G}\{g\}$. Поэтому, в частности, $\boldsymbol{C}(E)=\boldsymbol{G}\{c(x;E)\}$, $\boldsymbol{P}(E)=\boldsymbol{G}\{p(x;E)\}$, $\boldsymbol{C}'(E) = -\boldsymbol{I}([E,\infty))$, $\boldsymbol{P}'(E) = \boldsymbol{I}((-\infty,E))$, $\boldsymbol{D}(E) = \boldsymbol{G}\{\delta(x-E)\}$. Здесь $\boldsymbol{I}(X)$ – инструмент "индикатор множества X", определяемый для любого измеримого множества $X \subset R$, с платежной функцией, равной характеристической функции (индикатору) множества X, т.е.

$$\boldsymbol{I}(X) = \boldsymbol{G}\{\chi_X(x)\}. \tag{1}$$

На континуальном по страйкам рынке такие инструменты также могут быть реплицированы комбинациями (вообще говоря, бесконечными) опционов колл или пут. Очевидно также, что

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}(R).$$

В качестве аппроксимации инструмента $\boldsymbol{D}(E)$ при малых значениях h можно использовать инструмент

$$\boldsymbol{D}(E,h) = (1/h)\, \boldsymbol{G}\{\, \chi_{[E-h/2,E+h/2]}(x)\, \} = (1/h)\, \boldsymbol{I}([E-h/2,\, E+h/2]), \tag{2}$$

т.е. инструмент с платежной функцией, принимающей нулевое значение всюду вне отрезка $[E-h/2, E+h/2]$, на котором она равна $1/h$.

Иной, более удобной применительно к реальному рынку аппроксимацией инструмента $\boldsymbol{D}(E)$ при малых значениях h можно считать инструмент "баттерфляй", которому соответствует "вторая разность" опционов:

$$\boldsymbol{B}(E,h) = (\boldsymbol{C}(E-h) - 2\,\boldsymbol{C}(E) + \boldsymbol{C}(E+h))/h^2.$$

Это представление остается справедливым при замене коллов путами. Верно также и представление, использующее смешанную комбинацию коллов и путов:

$$\boldsymbol{B}(E,h) = (\boldsymbol{P}(E{-}h) - \boldsymbol{P}(E) + h\boldsymbol{U} - \boldsymbol{C}(E) + \boldsymbol{C}(E{+}h))/h^2.$$

Для произвольного инструмента $\boldsymbol{G}$ с произвольной платежной функцией $g(x)$ можно задавать разные представления. Одно из них основывается на соотношении

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\delta(y-x)dy\,.$$

Из него с очевидностью следует, что имеют место представления

$$\boldsymbol{G} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\boldsymbol{C}''(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\boldsymbol{P}''(x)dx\,. \tag{3}$$

1 Ценообразование на нейтральном к риску однопериодном рынке опционов

В настоящем разделе в некоторых упрощающих предположениях мы рассмотрим теоретические аспекты ценообразования опционов, которые в дальнейшем помогут нам ориентироваться в вопросах приближенного восстановления свойств рынка.

Принимается, что в начале периода цена базового для опционов актива $\boldsymbol{S}$ равна μ_0, т.е. $|\boldsymbol{S}| = \mu_0$. Цена актива в конце периода является случайной величиной S с известной нам плотностью вероятности $f(x)$, функцией распределения $F(x)$ и средним μ. В теоретической конструкции нам будет удобно допускать и отрицательные значения этой случайной величины (при сопоставлении с реальностью – с малой вероятностью).

Рынок считается нейтральным к риску. Это значит, что на нем все инструменты дают одинаковый средний относительный доход r (т.е. доходность равна $r - 1$), и потому, в частности, должно быть $\mu = r\mu_0$. На таком рынке стоимости опционов колл и пут со страйком E в начале периода определяются соответственно равенствами

$$C(E) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \max(0, x-E)f(x)dx = \frac{1}{r}\int_{E}^{\infty}(x-E)f(x)dx = \frac{1}{r}\int_{E}^{\infty}(1-F(x))dx\,, \tag{4}$$

$$P(E) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \max(E-x,0)\,f(x)dx = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{E}(E-x)\,f(x)dx = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{E} F(x)dx\,. \tag{5}$$

Последние равенства в приведенных формулах справедливы, если функция распределения $F(x)$ при $x \to \pm\infty$ быстро стремится к своим предельным значениям (достаточно потребовать существования у такого распределения абсолютного первого момента.), что мы и будем впредь предполагать.

Из (1) и (1) следует равенство

$$C(E) - P(E) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E)f(x)dx = \frac{\mu}{r} - \frac{E}{r} = \mu_0 - \frac{E}{r}, \tag{6}$$

которое можно интерпретировать как теорему паритета опционов пут/колл.

Имеют место также легко проверяемые соотношения

$$C'(E) = \frac{F(E)-1}{r}, \qquad P'(E) = \frac{F(E)}{r}, \qquad P'(E) - C'(E) = \frac{1}{r}$$

и, как следствие,

$$C''(E) = P''(E) = \frac{F'(E)}{r} = \frac{f(E)}{r}. \tag{7}$$

Последнее соотношение означает, что при $r = 1$ вторая производная стоимости опционов колл и пут по страйку на нейтральном к риску одноопериодном рынке опционов совпадает с плотностью вероятности будущей цены актива.

2. Задачиинвестораопционногорынкаиспособыихрешения

Будем предполагать, что инвестор имеет собственное представление относительно распределения вероятностей будущей цены базового актива S. Плотность вероятности этого распределения обозначим $f_t(x)$. При этом рыночную плотность вероятности для нейтрального к риску однопериодного рынка опционов, удовлетворяющую соотношению (3), будем записывать как $f_m(x)$.

Сопоставляя свое прогнозное распределение вероятностей цены актива с ценами опционов, инвестор может пытаться обнаруживать какие-либо расхождения в этих описаниях и использовать их к своей выгоде. В зависимости от своих рисковых предпочтений он может формулировать различные задачи и в соответствии с этими задачами находить оптимальные портфели опционов, которые эти задачи решают. Ниже мы рассматриваем ряд последовательно усложняющихся задач, решаем их и обсуждаем разумность их постановок.

2.1. Безусловная максимизация среднего дохода инвестора

Простейшей задачей инвестора можно считать безусловную максимизацию среднего дохода от инвестиции заданного размера. Считается, и не безосновательно, что такая задача представляет интерес лишь для нейтрального к риску инвестора. Пусть инвестор владеет суммой A, которую он собирается инвестировать на рынке опционов. Допустим, он выбирает в качестве объекта инвестирования некоторый инструмент $\boldsymbol{G}$ с платежной функцией $g(x)$. В соответствии с представлением (1) рыночная стоимость этого инструмента составляет

$$\left|\boldsymbol{G}\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)C''(x)dx = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_m(x)dx\,.$$

Таким образом, должно быть $|\boldsymbol{G}| = A$. В результате инвестиции инвестор получает случайный доход $B = g(S)$, где плотность вероятности цены S равна $f_t(x)$. Средний доход инвестора при этом составит

$$M_t B = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_t(x)dx\,.$$

Поэтому задача безусловной максимизации среднего дохода инвестора состоит в том, чтобы для заданной инвестиционной суммы A подобрать платежную функцию $g(x)$, удовлетворяющую равенству $|\boldsymbol{G}| = A$ и доставляющую максимум $M_t B$. Для удобства записи формул в дальнейшем всюду будем полагать $r = 1$. В противном случае в формулах, определяющих стоимости инструментов, следует ввести корректирующий множитель – все стоимости необходимо поделить на r.

Запрет коротких позиций по инструменту $\boldsymbol{D}(E,h)$. Сначала рассмотрим случай, когда инвестор использует лишь инструменты, которые не могут приносить ему отрицательных доходов. Иными словами, используются лишь инструменты с неотрицательными платежными функциями. Оказывается, что решение задачи доставляют инструменты из класса $\boldsymbol{D}(E)$. При этом условие неотрицательности доходов инвестора означает, что по этим инструментам он фактически может использовать лишь длинные позиции.

Рассмотрим инструмент $\boldsymbol{D}(E,h)$, задаваемый (1) и имеющий своим пределом при $h \to 0$ инструмент $\boldsymbol{D}(E)$. При малых h его рыночная стоимость

$$\left|\boldsymbol{D}(E,h)\right| = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[E-h/2,E+h/2]}(x) f_m(x)\,dx \approx f_m(E).$$

Доход, обеспечиваемый таким инструментом,

$$B = \begin{cases} \dfrac{A}{h f_m(E)}, & S \in [-h/2, h/2], \\ 0, & S \notin [-h/2, h/2]. \end{cases} \tag{8}$$

при этом вероятность ненулевого дохода

$$P_t\{S \in [-h/2, h/2]\} \approx h f_t(E). \tag{9}$$

Поэтому средний доход инвестора в соответствии с его собственным распределением вероятностей будет иным. Используя (4) и (5), получаем

$$M_t B = \frac{A}{f_m(E)} P_t\{S \in [-h/2, h/2]\} \approx \frac{A}{f_m(E)} \frac{1}{h} h f_t(E) = A \frac{f_t(E)}{f_m(E)}.$$

Введем функции правдоподобия

$$L(x) = f_m(x) / f_t(x),$$

$$L^{\circ}(x) = 1/L(x) = f_t(x)/f_m(x),$$

составляющие основу применяемого в статистике критерия Неймана-Пирсона (см., например, [10]) .

Очевидно, средний доход инвестора принимает наибольшее значение при страйке $E_{\max}$, доставляющем наибольшее значение функции правдоподобия L°. Как нетрудно видеть, любая другая платежная функция принесет меньший средний доход. Через $E_{\min}$ обозначим страйк, доставляющий L° минимум (или же L – максимум).

В случае совпадения плотности инвестора $f_t(x)$ с рыночной плотностью $f_m(x)$ средний доход инвестора должен совпадать с безрисковым доходом. Однако подобная задача не представляет для нас интереса. Потому будем считать, что плотность $f_t(x)$ не тождественна $f_m(x)$.

Использованиекороткихпозицийпоинструменту *D*(*E*). Если разрешить использовать и короткие позиции по инструментам $\boldsymbol{D}(E)$, то теоретически инвестор в состоянии сколь угодно увеличить свой средний доход. Для этого ему в дополнение к длинной позиции по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\max})$ необходимо использовать короткую позицию по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$. Стоимость второго инструмента равна $f_m(E_{\min})$. Поэтому если инвестор продаст инструментов $\boldsymbol{D}(E_{\min})$ на сумму A' (т.е. в количестве $A'/f_m(E_{\min})$ и направит вырученные от такой продажи средства вместе с имевшейся у него до того суммой A на покупку инструмента $\boldsymbol{D}(E_{\max})$, то его общий средний доход от такой операции составит

$$M_t B = (A + A') \frac{f_t(E_{\max})}{f_m(E_{\max})} - A' \frac{f_t(E_{\min})}{f_m(E_{\min})} = A \frac{f_t(E_{\max})}{f_m(E_{\max})} + A' \max_{x,x'} \left(L^{\circ}(x) - L^{\circ}(x') \right).$$

Из полученного равенства следует, что за счет увеличения объема короткой позиции можно неограниченно увеличивать средний доход инвестора (эффект финансового рычага!).

2.2. Условная максимизация среднего дохода инвестора (метод VaR)

Задача безусловной максимизации среднего дохода не учитывает рисковых предпочтений инвестора. К тому же, очевидно, что предоставляемое формулой (4) решение неудовлетворительно: в предельной случае ($h \to 0$) доход инвестора равен нулю с вероятностью 1 и бесконечности с вероятностью нуль, т.е. случайный доход носит вырожденный характер. Практически, это означает, что максимизация среднего дохода инвестора достигается за счет получения весьма больших случайных доходов с незначительной вероятностью и нулевых доходов со значительной вероятностью.

Попытаемся подправить полученное решение с помощью дополнительных ограничений, накладываемых критерием *VaR*. В своей стандартной форме он предполагает максимизацию среднего дохода инвестора при выполнении условия

$$P_t\left\{B \geq B_{cr}\right\} \geq 1 - \varepsilon \tag{10}$$

для некоторых значений критического уровня его дохода B_{cr} и вероятности ε (обычно небольшой), выбираемых инвестором.

Решение такой задачи также основано на критерии Неймана-Пирсона. Строится однопараметрическое семейство множеств $\{Z(c),\ c>0\}$, по правилу

$$x \in Z(c) \quad \Leftrightarrow \quad L(x) = \frac{f_m(x)}{f_t(x)} \geq c\ .$$

Для заданного ε находится множество $X(\varepsilon)$ из семейства $\{Z(c)\}$ с вероятностной мерой инвестора, равной ε, т.е.

$$\varepsilon = P_t\left\{X(\varepsilon)\right\}. \tag{11}$$

Согласно методике Неймана-Пирсона рыночная вероятность множества $X(\varepsilon)$, равная $\gamma(\varepsilon) = P_m\{X(\varepsilon)\}$, максимальна, и потому рыночная стоимость инструмента $\boldsymbol{I}\left(\overline{X(\varepsilon)}\right)$, равная

$$\left|\boldsymbol{I}\left(\overline{X(\varepsilon)}\right)\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\overline{X(\varepsilon)}}(x) f_m(x)\, dx = P_m\left\{\overline{X(\varepsilon)}\right\} = 1 - \gamma(\varepsilon), \tag{12}$$

минимальна. Решение задачи существует, если $B_{cr}(1-\gamma) \le A$. В этом случае инструмент $\boldsymbol{I}\left(\overline{X(\varepsilon)}\right)$ в количестве B_{cr} обеспечивает выполнение ограничения (6), а остаток

$$A - B_{cr}(1-\gamma) \tag{13}$$

направляется на максимизацию среднего дохода, т.е. на приобретение инструмента $\boldsymbol{D}(E_{\max})$.

Доход от такой инвестиции составит

$$B = \begin{cases} \dfrac{1}{h f_m(E_{\max})}\left(A - B_{cr}(1-\gamma)\right), & S \in [E - h/2, E + h/2], \\ B_{cr}, & S \in \overline{X(\varepsilon)} \setminus [E - h/2, E + h/2], \\ 0, & S \in X(\varepsilon), \end{cases} \tag{14}$$

его среднее значение

$$M_t B = \left(A - B_{cr}(1-\gamma)\right)\frac{f_t(E_{\max})}{f_m(E_{\max})} + B_{cr}(1-\varepsilon).$$

Как и в задаче безусловной максимизации, при применении критерия *VaR* инвестор может использовать к своей выгоде и короткие позиции. Реализация таких планов проводится по двум характеристикам метода. Во-первых, инвестор на множестве исходов вероятностной меры ε может согласиться на получение отрицательных доходов, а не нулевых; при этом, чем меньше этот доход, тем больший средний доход он получит, и выбор этого дохода зависит от его рисковых предпочтений. Во-вторых, как и при безусловной максимизации, инвестор может использовать короткую позицию (потенциально неограниченного объема) еще и по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$, что также повысит его средний доход. Выписывание получающихся при этом формул мы оставляем читателю.

2.3. Многоступенчатая модификация метода VaR

Как следует из (10), применение стандартного критерия *VaR* не приносит инвестору значительного улучшения вероятностной структуры его доходов: в предельном случае ($h \to 0$) с вероятностью 1 его случайный доход не превышает B_{cr}, и повышение среднего дохода вновь обеспечивается вырожденной составляющей общего случайного дохода. Если учесть, что критический доход обычно выбирается по сравнению с инвестиционной суммой небольшим, то такой результат инвестиции едва ли устроит инвестора.

Представляется, что проблема инвестора в том, что он строго следует требованиям метода *VaR*. По-видимому, он неплохо работает, когда нужно выбирать из нескольких вариантов. Но когда речь идет о выборе из весьма широкого (теоретически, континуального) множества альтернатив, он приводит к абсурдным результатам. Возможный в таком случае выход видится в модификации критерия *VaR*. Инвестору не следует весь остаток (9) направлять на максимизацию среднего дохода. Нужно, чтобы инвестиционный доход удовлетворял не одному неравенству, а целой системе неравенств, – переход к задаче максимизации должен происходить плавно (если вообще такую задачу следует решать, но об этом позже). Для этого следует задать возрастающие последовательности критических уровней вероятности ε_i и критических доходов B_i и потребовать, чтобы

$$P_t\left\{B \geq B_i\right\} \geq 1 - \varepsilon_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{15}$$

при этом $\varepsilon_0 = 0$, т.е. неравенство $B \geq B_0$ выполняется с вероятностью 1.

Решение задачи дается следующей процедурой. Сначала производится шаг с $i = 0$. Выполнение неравенства (11) для $i = 0$ обеспечивается использованием инструмента $\boldsymbol{U}$ в количестве B_0. При этом если $B_0 > 0$, то речь идет о длинной позиции по инструменту, если же $B_0 < 0$, то – о короткой. Размер соответствующей инвестиции составляет

$$A_0 = B_0 .$$

Еще раз подчеркнем, что величина A_0 может быть и отрицательной, что означает *продажу* инструмента ***U***.

Далее последовательно реализуются шаги с i = 1, 2,…, n. В соответствии с конструкцией Неймана-Пирсона вероятности инвестора ε_i отвечает множество $X(\varepsilon_i)$ максимальной рыночной вероятности $\gamma_i > \varepsilon_i$ (формулы (7) и (8)). Для каждого i = 1, 2,…, n будем использовать инструмент $\boldsymbol{I}\left(\overline{X(\varepsilon_i)}\right)$ в количестве $B_i - B_{i-1} > 0$. Поскольку рыночная стоимость этого инструмента равна $1-\gamma_i$, такая инвестиция потребует суммы

$$A_i = \left(B_i - B_{i-1}\right)\left(1-\gamma_i\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Величина A_i означает размер инвестиции, необходимый для обеспечения дополнительного дохода $B_i - B_{i-1}$ на множестве $\overline{X(\varepsilon_i)}$. Она в отличие от A_0 может быть только положительной. Введем обозначение

$$A^{(k)} = A_0 + A_1 + \ldots + A_k .$$

Имеет место

$$A^{(k)} = B_0 + \sum\nolimits_{i=1}^{k} \left(B_i - B_{i-1}\right)\left(1-\gamma_i\right)$$

или же, по-иному группируя слагаемые,

$$A^{(k)} = \sum\nolimits_{i=0}^{k-1} B_i\left(\gamma_{i+1} - \gamma_i\right) + B_k\left(1-\gamma_k\right).$$

При $k = n$ оба эти соотношения принимают вид

$$A^{(n)} = B_0 + \sum_{i=1}^{n} (B_i - B_{i-1})(1-\gamma_i) = \sum_{i=0}^{n} B_i (\gamma_{i+1} - \gamma_i) .$$

Произвольный k–й шаг схемы полностью реализуется, если выполняется неравенство

$$A^{(k)} \le A .$$

В противном случае этот шаг оказывается последним в схеме. При этом реализуются все требования до уровня $k-1$ полностью и лишь частично – для множества $\overline{X(\varepsilon_k)}$. Если в результате описанной процедуры оказывается, что

$$A^{(n)} \le A ,$$

то задача решается полностью, при этом остаток $A - A^{(n)}$ инвестируется в инструмент $\boldsymbol{D}(E_{\max})$**.** В этом случае реализованный доход от инвестиции приближенно определяется формулой

$$B = \begin{cases} \dfrac{A - A^{(n)}}{h f_m(E_{\max})}, & S \in [E - h/2, E + h/2], \\ B_i, \quad S \in X(\varepsilon_{i+1}) \setminus X(\varepsilon_i), & i = 0,1,2,\dots,n \end{cases}$$

(на отрезке [E–h/2, E+h/2] пренебрегаются малые по сравнению с 1/h величины).

Поэтому оптимальный средний доход инвестора при выполнении всех ограничений (11) составит (без использования короткой позиции по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$)

$$M_t B = \left(A - A^{(n)}\right) \frac{f_t(E_{\max})}{f_m(E_{\max})} + \sum_{i=0}^{n} B_i (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) =$$

$$= \left(A - \sum_{i=0}^{n} B_i (\gamma_{i+1} - \gamma_i) \right) \frac{f_t(E_{\max})}{f_m(E_{\max})} + \sum_{i=0}^{n} B_i (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) .$$

Использование короткой позиции по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$, теоретически, может и в этом случае как угодно повысить средний доход инвестора. Соответствующей формулы мы здесь не приводим.

2.4. Континуальный метод VaR

Безусловно, теоретический интерес представляет континуальная версия метода. Она проще для анализа и в простейших случаях позволяет получать готовые формулы. Переход от дискретной модификации критерия *VaR* к континуальной проводится очевидным образом. В континуальной версии критерия интересы инвестора описываются неубывающей функцией критических доходов $B_{cr}(\varepsilon)$, $\varepsilon\in[0,1]$. Эта функция может принимать и отрицательные значения. Более того, она может быть неограниченной в обоих концах отрезка [0,1]. Требуется построить стратегию инвестора, в соответствии с которой его доход B от инвестиции в размере A окажется не ниже $B_{cr}(\varepsilon)$ с вероятностью не меньше $1-\varepsilon$ для каждого $\varepsilon\in[0,1]$, т.е.

$$P_t\{B \ge B_{cr}(\varepsilon)\} \ge 1-\varepsilon, \qquad \varepsilon\in[0,1]. \tag{16}$$

Если такая задача может быть решена полностью, то остающаяся после ее решения сумма направляется на максимизацию среднего дохода, т.е. инвестируется в инструмент $\boldsymbol{D}(E_{\max})$, с возможным использованием короткой позиции по инструменту $\boldsymbol{D}(E_{\min})$.

Каждому уровню вероятности $\varepsilon\in[0,1]$ соответствует критическое множество $X(\varepsilon)$ вероятностной меры инвестора ε и его рыночная вероятность $\gamma(\varepsilon)$. $X(\varepsilon)$ –неубывающее по параметру ε семейство множеств, $\gamma(\varepsilon)$ – непрерывная и неубывающая функция ε, $\gamma(\varepsilon) > \varepsilon$ для всех $\varepsilon\in(0,1)$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$. Используя формулы предыдущего раздела и заменяя, где нужно, разности дифференциалами по ε, а суммы – интегралами, получим следующее решение задачи.

Рассмотрим непрерывный процесс инвестирования суммы A по мере возрастания параметра ε от 0 до 1. Через $A(\varepsilon)$ обозначим инвестиционную сумму, необходимую для достижения (12) до произвольной фиксированной точки ε включительно (т.е. обеспечения доходов

$B_{cr}(\varepsilon')$ на множествах $\overline{X(\varepsilon')}$ соответственно для всех $\varepsilon' \le \varepsilon$). Тогда справедлива формула (имеющая смысл при $B_{cr}(0) > -\infty$)

$$A(\varepsilon) = B_{cr}(0) + \int_0^{\varepsilon} (1 - \gamma(u))\, dB_{cr}(u) .$$

После интегрирования по частям получаем соотношение общего вида, не требующее конечности $B_{cr}(0)$:

$$A(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} B_{cr}(u)\, d\gamma(u) + (1 - \gamma(\varepsilon)) B_{cr}(\varepsilon) .$$

При $\varepsilon = 1$ эти формулы приобретают вид

$$A(1) = B_{cr}(0) + \int_0^1 (1 - \gamma(u))\, dB_{cr}(u) = \int_0^1 B_{cr}(u)\, d\gamma(u) , \tag{17}$$

причем средняя часть этого двойного равенства снова имеет смысл лишь при $B_{cr}(0) > -\infty$. Процесс достигает точки ε, если $A(\varepsilon) \le A$. Если это неравенство нарушается в некоторой точке отрезка [0,1], процесс прекращается. Если же процесс не обрывается вплоть до точки $\varepsilon = 1$, т.е. оказывается, что

$$A(1) \le A , \tag{18}$$

то это значит, что ограничения (12) выполняются для всех $\varepsilon \in [0,1]$, и тогда сумма $A - A(1)$ направляется на максимизацию среднего дохода, т.е. вкладывается в инструмент $\boldsymbol{D}(E_{\max})$. В этом случае задача решается полностью, и реализованный доход от инвестиции определяется формулой (с точностью до малых величин порядка h на множестве $[E-h/2, E+h/2]$)

$$B = \begin{cases} \dfrac{1}{h f_m(E_{\max})} \left(A - \int_0^1 B_{cr}(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon) \right), & S \in [E - h/2, E + h/2], \\ B_{cr}(\varepsilon), & S \in \Gamma[X(\varepsilon)], \end{cases}$$

где $\Gamma[X]$ – граничные точки множества X.

Случайный доход инвестора B может быть представлен как сумма двух случайных величин B° и $\overline{B}$, первая из которых (соответствующая верхней строке формулы) фактически является вырожденной случайной величиной (при $h \to 0$), принимающей бесконечно большое значение с бесконечно малой вероятностью и равной нулю с вероятностью 1, а вторая (нижняя строка) – случайная величина, отвечающая исключительно за обеспечение ограничений метода *VaR*. При этом из неравенства (12) следует, что функция распределения случайной величины $\overline{B}$ задается равенством

$$F_{\overline{B}}(x) = B_{cr}{}^{(-1)}(x)$$

где $B_{cr}{}^{(-1)}(x)$ – обратная к $B_{cr}(\varepsilon)$ функция.

Средний доход инвестора составит

$$M_t B = M_t B^\circ + M_t \overline{B}\ ,$$

где

$$M_t B^\circ = \left(A - \int_0^1 B_{cr}(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon) \right) \frac{f_t\left(E_{\max}\right)}{f_m\left(E_{\max}\right)},$$

$$M_t \overline{B} = \int_0^1 B_{cr}(\varepsilon)\, d\varepsilon\ .$$

В этих соотношениях снова не учитывается возможность использования короткой позиции по инструменту $\boldsymbol{D}\left(E_{\min}\right)$, однако при желании можно внести в них очевидные изменения.

Отметим, что инвестор может вообще отказаться от использования вырожденной компоненты дохода. В этом случае ему свои предпочтения удобнее задавать параметрическим семейством функций $B_{cr}(\varepsilon, b)$, а параметр b (вообще говоря, векторный) выбирать из условия выполнения равенства в (14). Тогда весь инвестиционный ресурс направляется на выполнение ограничений (12), а вырожденная компонента дохода отсутствует.

3. Иллюстративныепримеры

Приведем некоторые примеры (более подробно эти примеры обсуждаются в [11]).

Пример 1. Рассмотрим два распределения вероятностей для цены актива и обозначим соответствующие случайные величины через ξ_1 и ξ_2. Первое– дискретное, сосредоточенное в точках $a=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $b=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ с вероятностями для каждой по ½, а второе – равномерное распределение на отрезке [0,1]. Параметры *a* и *b* первого распределения подобраны таким образом, что $M\xi_2 = M\xi_1 = 1/2$, $D\xi_2 = D\xi_1 = 1/12$. Очевидно, $f_1(x) = (\delta(x-a)+\delta(x-b))/2$ ($\delta(x)$ – обобщенная дельта-функция), $f_2(x)=1$, $x\in[0,1]$.

Оптимальная стратегия инвестора, нацеленная на безусловную максимизацию среднего дохода, строится очевидным образом. Если распределение вероятностей инвестора задается величиной ξ_1, а рынка – ξ_2, то следует ставить либо на цену *a*, либо на цену *b*. Если же распределение вероятностей инвестора определяется величиной ξ_2, а рынка – ξ_1, то ставить нужно на любую цену из множества $[0,1]\backslash\{a\cup b\}$, т.е. на любую цену из отрезка [0,1] кроме *a* или *b*. В обоих случаях $MB = +\infty$.

Пример 2. Рассмотрим для инвестора и рынка распределения вероятностей цены актива, относящиеся к одному и тому же типу, а именно к часто используемому на финансовых рынках двухпараметрическому двустороннему экспоненциальному распределению $Exp(a,\beta)$, $a \in R$, $\beta > 0$ (см., например, [12]):

$$f(x) = \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|x-a|}{\beta}\right).$$

Ограничимся случаем, когда рынок и инвестор подчиняются распределениям вероятностей $Exp(0,1)$ и $Exp(0,\beta)$ соответственно, причем $\beta < 1$. Равенство параметра *a* нулю принимается для упрощения записи формул и не должно вызывать недоразумений, поскольку важно лишь относительное расположение распределений на оси. Реализация процедуры Неймана-Пирсона дает систему критических множеств $X(\varepsilon) = \{x \,|\, |x| \geq -\beta \ln \varepsilon\}$, где ε пробегает весь отрезок [0,1], при этом $\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^{\beta}$.

Рисковые предпочтения инвестора задаются функцией критических доходов $B_{cr}(\varepsilon) = b\varepsilon^{\lambda}$, $\lambda \geq 0$, а параметр b определяется из условия $A(1) = A$, т.е. инвестор направляет всю свою инвестиционную сумму на выполнение ограничений (12). Использование этого условия совместно с вычислением $A(1)$ по формуле (13) дает значение $b = A(\beta+\lambda)/\beta$. Поэтому с учетом структуры критических множеств получаем, что $g(x) = A(\beta+\lambda)\exp(-\lambda|x|/\beta)/\beta$. Инструмент с такой платежной функцией порождает доход, математическое ожидание и дисперсия которого (с точки зрения инвестора) равны

$$M_t B = \frac{\beta+\lambda}{\beta(\lambda+1)} A \quad \text{и} \quad D_t B = \frac{A^2 \lambda^2 (\beta+\lambda)^2}{\beta^2 (2\lambda+1)(\lambda+1)^2}$$

соответственно.

С ростом λ математическое ожидание и дисперсия дохода возрастают. При $\lambda = 0$ имеем $M_t B = A$, $D_t B = 0$, что отвечает случаю крайне нерасположенного к риску инвестора, а при $\lambda = \infty$ – $M_t B = A/\beta > A$, $D_t B = \infty$, что характерно для инвестора, готового ради бесконечно малого увеличения среднего дохода идти на неограниченный риск.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Holton, Glyn A*. Value-at-Risk: Theory and Practice. Academic Press, 2003. 405 p.

2. *Choudhry, Moorad*. Bond and Money Market: Strategy, Trading, Analysis. Butterworth-Heinemann, 2001. 1168 p.

3. *Penza, Pietro* and *Bansal, Vipul K*. Measuring Market Risk with Value at Risk. John Wiley & Sons, 2000. 320 p.

4. *Allen, Steve L*. Practitioner's Guide to Managing Market and Credit Risk. John Wiley & Sons, 2003. 288 p.

5. *Hull, John*. Fundamentals of Futures and Options Markets (5th edition). Prentice Hall, 2003. 744 p.

6. *Longin, Francois M*. Beyond the VaR. *The Journal of Derivatives*, The University of Michigan. V 8, N 4, Summer 2001. pp. .36-48.

7. *Artzner, P., Delbean, J.-M. Eber, and D. Heath.* Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance,* 9, 1999. pp. 203-228.

8. *Маршалл Дж.Ф., Бансал В.К.* Финансовая инженерия. М.: ИНФРА-М, 1998 г. 784 с.

9. *Macmillan L.G*. Options as a Strategic Investment. N.Y.: New York Institute of Finance, 1993. 882 p.

10. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Наука, 1975.

11. *Агасандян Г.А.* Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь (VaR). М.: ВЦ РАН, 2001. 34 с.

12. *Рей К.И.* Рынок облигаций. Торговля и управление рисками. М.: Дело, 1999. 600 с.