Оценивание опционов в отсутствие на рынке безрискового актива

Геннадий Агасандян (Вычислительный центр РАН)

В работе предлагается модель оценивания опционов в отсутствие на рынке безрискового актива. Возникновение такой модели понятно: на реальном рынке безрисковых активов не существует. Речь в лучшем случае может идти о наличии на рынке низкорисковых активов. Это верно даже для стран с высокоразвитыми финансовыми рынками, таких как США, где самые надежные правительственные облигации если и считаются свободными от кредитного риска, то прочие риски исключить никак нельзя. Тем более это верно для находящегося в стадии развития финансового рынка России, где государственных краткосрочных облигаций после дефолта 1998 г. практически не существует. В качестве некоторой альтернативы им можно было бы сослаться на индекс РТС как относительно низкорисковый инструмент.

В предлагаемой теоретической конструкции речь идет о попытке замены безрискового актива из классической модели ценообразования опционов Блэка-Шоулза на находящийся под риском (пусть и небольшим) актив[1].

1. Модель Блэка-Шоулза

Напомним основные предположения и результаты модели Блэка-Шоулза. Движение цены S_t базовой акции удовлетворяет стохастическому уравнению Ито:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dw_t, \qquad (1)$$

где w_t – винеровский процесс, определяющий случайную составляющую движения цены, μ - коэффициент переноса, а σ^2 - коэффициент диффузии стохастического процесса в правой части равенства. Для определенности считаем $\sigma > 0$. Параметры μ и σ^2 в финансовой математике имеют смысл средней доходности и дисперсии доходности базового актива в единицу времени соответственно (а сам параметр σ означает волатильность).

Как известно, стоимость колл-опциона по модели Блэка-Шоулза определяется из следующего принципа. Строится портфель $C - xS$ из опционов и акций, где x – коэффициент хеджирования, выбираемый так, чтобы доходность целевого портфеля была равна безрисковой ставке r, т.е.

$$\frac{dC - xdS}{C - xS} = rdt. \qquad (2)$$

Оказывается, что стоимость колл-опциона $C(S,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$L(C) = \frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0 \qquad (3)$$

при конечном условии

$$C(S,0) = \max(0, S - E).$$

Решение этой задачи дается известными формулами:

$$C(S,\tau) = SN(D_1) - E\exp(-r\tau)N(D_2), \qquad (4)$$

[1] Более подробное изложение предлагаемых конструкций можно найти в работе: Агасандян Г.А. Ценообразование опционов в отсутствие безрисковых активов. М.: ВЦ РАН, 2000. 34 с.

где

$$D_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right), \quad D_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S}{E} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right), \qquad (5)$$

τ – время до истечения срока опциона, E – страйк опциона (цена исполнения), N – функция нормального распределения вероятностей.

Предположения модели Блэка-Шоулза являются во многом искусственными и значительно обедняющими картину реального ценообразования опционов. Потому и формулы (4), (5) не всегда удовлетворяют специалистов. В частности, вследствие условия (2) и требования невозможности арбитража стоимость опциона оказывается не зависящей от μ. Условие (2) действительно является чрезмерно жестким и, сохраняя основу модели, от него мы попытаемся в дальнейшем освободиться.

Но прежде мы рассмотрим в рамках модели Блэка-Шоулза задачу частичного хеджирования опционов акциями, поскольку она формально связана с темой сообщения. В соответствии с формулой (2) безрисковый актив получается как результат полного хеджирования опционов акциями. Однако если отказаться от полного хеджирования, можно оставить место для риска, надеясь компенсировать это повышением доходности.

2. Частичное хеджирование

Будем выбирать коэффициент x так, чтобы доходность портфеля $C - xS$ удовлетворяла соотношению (по аналогии с (2))

$$\frac{dC - xdS}{C - xS} = \alpha dt + \beta dw_t, \qquad (6)$$

где α и β - некоторые константы, определяемые инвестором и имеющие смысл средней доходности и волатильности доходности портфеля соответственно, а w_t - винеровский процесс, тождественный процессу в (1). Как оказывается, параметры α и β нельзя выбирать независимо друг от друга.

Естественно считать, что параметры β и σ подчинены условию $0 \le |\beta| \le \sigma$, а r и μ – условию $r \le \alpha \le \mu$. Хотя свойства процесса в правой части (6) (так же, как и процесса в правой части (1)) не зависят от знака β, в задаче хеджирования знак β уже имеет значение.

Решая совместно уравнения (1) и (6) , получаем коэффициент хеджирования

$$x = \frac{\sigma\dfrac{\partial C}{\partial S} - \beta\dfrac{C}{S}}{\sigma - \beta} \qquad (7)$$

при этом оказывается, что если в уравнении (3) заменить r параметром

$$\varepsilon = \frac{\alpha\sigma - \mu\beta}{\sigma - \beta},$$

стоимость колл-опциона снова будет удовлетворять ему. Но это возможно, лишь если

$$\varepsilon = r.$$

Поэтому

$$\alpha = r\left(1 - \frac{\beta}{\sigma}\right) + \mu\frac{\beta}{\sigma}.$$

Это соотношение связывает среднюю доходность целевого портфеля, отраженную в параметре α, с его риском, характеризуемым параметром стандартного отклонения β.

В качестве свойств частичного хеджирования отметим следующие:

1. С ростом риска увеличивается и доходность портфеля.
2. Использование положительных значений β означает, что инвестор получает портфель, движение цены которого прямо коррелированно с движением цены актива, а отрицательных - обратно коррелированно.
3. Параметр α принимает большие значения при положительных β, чем при отрицательных и равных им по абсолютной величине. Более того, при отрицательных β параметр α принимает значения меньше r, что делает использование отрицательных β неоправданным (при $\beta = -\sigma r/(\mu - r)$ параметр α и вовсе обращается в нуль).
4. Коэффициент хеджирования (7) при $\beta = 0$ совпадает с дельтой опциона, а при $\beta > 0$ строго превышает ее. При $\beta \to \sigma$ коэффициент частичного хеджирования стремится к бесконечности, что означает стремление доли опционов в портфеле к 0. Иными словами, при $\beta = 0$ мы имеем дело с полным (безрисковым) хеджированием, при этом $\alpha = r$, а при $\beta = \sigma$ хеджирование фактически не применяется.

3. Ценообразование опционов в отсутствие безрисковых активов

В формальном отношении к проблеме частичного хеджирования колл-опционов на рынке, подчиненном традиционной модели Блэка-Шоулза, примыкает проблема ценообразования опционов в отсутствие безрисковых активов. Используются аналогичные конструкции, но в других исходных предположениях.

Теперь проблема ценообразования опционов рассматривается на рынке, свойства которого отличны от традиционных свойств модели Блэка-Шоулза. Как обычно, на рынке обращаются акции (базовый актив), движение цены S_t которых удовлетворяет уравнению (1). Однако теперь предполагается, что безрискового актива на рынке нет, но вместо него наряду с акциями присутствует еще один рисковый актив B (в реальности, под относительно низким риском), движение цены которого также удовлетворяет уравнению типа (1), но с иными параметрами, а именно

$$\frac{dB_t}{B_t} = a dt + b dw'_t, \qquad (8)$$

где a – параметр доходности, а b –волатильности. При этом w'_t - стандартный винеровский процесс, который, вообще говоря, может не совпадать с процессом w_t из формулы (1). Снова для определенности считаем, что $b \geq 0$. На параметры процессов накладываются условия

$$0 \leq a \leq \mu, \quad 0 \leq b \leq \sigma.$$

Эти условия естественны. Параметры a и μ ответственны за движение цены в среднем, и чем больше среднее движение, тем больше доходность инструмента. Параметры b и σ в свою очередь характеризуют рисковость инструмента. Поэтому у инструмента B и средняя доходность, и дисперсия доходности должны быть меньше, чем у базового актива.

Для определения стоимости опциона в новых условиях применим идеи метода Блэка-Шоулза с необходимыми изменениями. На основе базового актива и опциона будем строить портфель, и, как и ранее, стоимость опциона будет получаться из свойств целевого портфеля. Проблема в том, как выбирать (с чем сравнивать) целевой портфель. Очевидно, ввиду отсутствия иных ориентиров портфель из акций и опционов нужно сравнивать с активом B (ранее целевой портфель выбирался безрисковым).

Сравнение двух портфелей (стохастических процессов) проводится в широком смысле - по коэффициентам переноса и диффузии. Этот способ сравнения практически оправдан. Логика финансового рынка диктует его участникам поведение, исключающее образование портфелей, которые были бы по обоим параметрам одновременно хуже или одновременно лучше для одной из сравниваемых альтернатив. Иными словами, параметр доходности портфеля не должен превышать a, притом, что одновременно его параметр риска меньше b по абсолютной величине, или наоборот.

Мы будем определять стоимость опциона из тех соображений, чтобы портфель из акций и опционов мог дать портфель, эквивалентный B по параметрам a и b. Говоря об эквивалентности, мы не имеем в виду полного совпадения, так как портфель и актив B могут быть образованы разными винеровскими процессами.

Итак, рассматривается портфель $S_p = C - xS$, где коэффициент хеджирования x подлежит определению из тех соображений, что должно выполняться равенство для стохастических дифференциалов:

$$\frac{dC - xdS}{C - xS} = adt \pm bdw_t \,. \qquad (9)$$

Отметим, что в правой части формулы присутствует, вообще говоря, иной, чем в (8), процесс. Теоретически, знак перед коэффициентом b может быть произвольным, поскольку мы считаем равноценными портфели, вероятностные распределения которых одинаковы, притом, что их корреляционные связи с исходным процессом S_t могут различаться. Для каждого знака в (9) возможно свое решение, и в зависимости от этого знака определяется как коэффициент хеджирования, так и вытекающая из такой конструкции стоимость опциона. Однако лишь одно из них имеет практическое значение.

Соотношения (6) и (9) совпадают по форме, но различны по интерпретации. В равенстве (6) стоимость колл-опциона уже определена из соотношения (2) с безрисковой ставкой r, а равенство (9) как раз предназначено для определения стоимости опциона в отсутствие безрискового вложения на рынке. Кроме того, параметры α и β в (6) являются предметом выбора инвестора, тогда как параметры a и b в (9) – императив рынка.

Разрешая равенство (1) относительно dw_t и подставляя результат в (9), получаем аналог равенства (7) для коэффициента хеджирования и далее приходим к уравнению, которому должна удовлетворять стоимость колл-опциона в новых условиях. Оказывается, что она удовлетворяет тому же уравнению (3) снова с заменой параметра r параметром

$$\varepsilon = \frac{a\sigma \mp \mu b}{\sigma \mp b}$$

при прежнем конечном условии. Верхние знаки в формуле для ε соответствуют верхнему знаку в формуле (9). Мы уже знаем решение этой задачи – оно дается стандартными формулами Блэка-Шоулза с той лишь разницей, что безрисковая ставка r заменена параметром ε.

Таким образом, отличие данного решения от прежнего заключается лишь в значении одного параметра. В данном случае оказываются справедливыми и прежние формулы для стоимости пута, если в них заменить параметр r параметром ε. Поэтому верна (с той же оговоркой) и теорема паритета пут/колл. Все свойства опционов на традиционно рассматриваемом рынке сохраняют силу и для данного случая.

Отметим некоторые свойства нового решения, связанные с возможными значениями параметра ε и зависимостью решения от определяющих параметр ε параметров a, b, μ, и σ:

1. Параметр ε играет на рассматриваемом рынке роль синтетической безрисковой ставки. Участники рынка, комбинируя актив с опционами, в принципе, могут синтезировать безрисковый актив, но при этом в отличие от модели Блэка-Шоулза в образовании стоимости опциона участие принимает совсем другой актив.
2. Параметр ε и решение в целом (стоимость опциона) зависят от значения параметра μ, что явно отличает данное решение от прежнего, делая его ближе к реальности.
3. Поскольку параметр ε принимает два значения в соответствии с двумя знаками при параметре b в формуле (9), то теоретически возможны два решения, достигающие поставленной цели, т.е. два варианта стоимости колл-опциона. Однако, поскольку знаку "минус" отвечает большее значение ε и большая стоимость опциона, рынок такое решение не сможет принять.
4. Если $\mu / a > \sigma / b$, то $\varepsilon < 0$.
5. Параметр ε возрастает при увеличении a и уменьшении b. Противоположное поведение ε отмечается при изменении параметров базового актива: параметр ε убывает при увеличении μ и уменьшении σ. Так же ведет себя и стоимость колл-опциона.
6. Параметры задачи допускают наглядную геометрическую интерпретацию: в координатах "риск-доходность" ε означает ординату точки пересечения прямой, проходящей через точки (b,a) (или $(-b,a)$ для второго решения) и (σ,μ), с осью доходности.
7. Точная репликация актива B портфелем $S_p = C - xS$ (равенство двух позиций в узком смысле - с вероятностью 1) возможна лишь при полной коррелированности процессов w'_t и w_t, когда либо $w'_t = w_t$ (положительная корреляция), либо $w'_t = -w_t$ (отрицательная корреляция). Решение задачи в этих двух случаях единственно. Однако точная репликация при отрицательной корреляции по указанным выше причинам не имеет практического смысла. При положительной же корреляции приведенное выше решение в широком смысле дает точную репликацию, т.е. решения в широком и узком смыслах совпадают.