Аннотация

В работе излагаются особенности влияния длины инвестиционного горизонта на выбор инвестором оптимального для себя портфеля. Приводятся условия, при которых неэффективные портфели для однопериодного случая становятся эффективными с увеличением инвестиционного горизонта. Сравниваются два различных подхода к описанию предпочтений инвестора при выборе портфеля. Один из подходов основывается на кривых безразличия, а другой – на критерии "допустимых потерь".

Типы предпочтений многопериодного портфельного инвестора и их асимптотическая форма

Геннадий Агасандян

При выборе оптимального портфеля ценных бумаг невозможно обойтись без учета предпочтений портфельных инвесторов. Это утверждение справедливо для произвольных инвестиционных горизонтов длиной в $T \geq 1$ периодов. При этом надо иметь в виду, что существуют разные способы описания предпочтений портфельных инвесторов. Более традиционные подходы при изучении поведения инвесторов связаны с формализацией понятия риска с помощью стандартного отклонения σ доходности ценных бумаг, составляющих портфель, и доходности портфеля в целом. В последнее время стали больше внимания уделять иному подходу, суть которого состоит в оценке возможных потерь инвестора с заданной небольшой вероятностью, и в описании отношения инвестора к таким потерям. Такой подход называется критерием допустимых потерь (drawdown criteria)[1]. На него ссылаются еще как на метод *VAR* (value at risk). Обычно в портфельной теории предполагается, что с течением времени доли ценных бумаг (в стоимостном выражении), составляющих портфели, не меняются. Вследствие этого на каждом шаге инвестиционного процесса возникает необходимость переформирования портфеля, когда нужно распределять общую суммарную стоимость портфеля по его ценным бумагам в выбранной заранее пропорции. Предполагается, что операционные издержки по переформированию портфеля отсутствуют.

Рассмотри три подхода в задаче выбора оптимального многопериодного портфеля. Первые два из них связаны с оцениванием риска с помощью стандартного отклонения доходности, причем первый использует определение эффективного множества портфелей, а второй – кривые безразличия инвесторов. Третий подход основан на критерии допустимых потерь. Для иллюстрации рассуждения будут проведены на примере портфеля, образованного двумя ценными бумагами 1 и 2. Вместо доходностей бумаг будем оперировать относительными доходами, равными 1 плюс доходность за период. Обозначим среднее относительных доходов через m_i, дисперсии – s_i^2, $i = 1, 2$, а коэффициент корреляции – ρ. Для определенности будем считать, что $m_1 > m_2$, $s_1 > s_2$. Относительные доходы за разные периоды предполагаются независимыми между собой, Часто их считают одинаково логнормально распределенными. Однако, рассматривая задачу об оптимальной структуре портфеля на длинных инве-

[1] Маршалл Дж.Ф., Бансал В.К. Финансовая инженерия. М.: "Инфра-М", 1998. С 162-169.

стиционных горизонтах, этого предположения можно не делать: в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятности произведение независимых случайных величин (как и их среднегеометрическое) в широком классе случаев имеет асимптотически логнормальное распределение.

Отметим характерные свойства всех трех подходов. Напомним используемую в портфельной теории терминологию. Множеством минимальной дисперсии называется множество всех тех портфелей, которые среди всех портфелей с заданным относительным доходом имеют минимально возможную дисперсию. Эффективным портфелем называется портфель *p* такой, что для любого портфеля *p'*, для которого $m_{p'} > m_p$, одновременно и $s_{p'} > s_p$. Эффективные портфели образуют эффективное множество портфелей. Никакой нерасположенный к риску инвестор не станет использовать неэффективные портфели. В нашем случае, когда множество *I* состоит всего из двух ценных бумаг, каждый портфель принадлежит множеству минимальной дисперсии (конечно, если $m_1 \neq m_2$).

1. *Изменение эффективного множества во времени*. Легко показывается, что если $r_x(T)$ – относительный доход за *T* периодов, а $m_x(T)$ и $s_x^2(T)$ – соответственно среднее и дисперсия относительного дохода портфеля за *T* периодов, где x – доля ценной бумаги 1 в портфеле, то $m_x(T) = m_x^T$, а $s_x^2(T) = \left(s_x^2 + m_x^2\right)^T - m_x^{2T}$ [2]. Далее, производная дисперсии относительного дохода портфеля за один период (т.е. при $T = 1$) по *x* при $x = 0$ равна

$$\left(s_x^2\right)' = -2s_2^2 + 2\rho s_1 s_2 .$$

Поэтому при $\rho \geq s_2/s_1$ все одпопериодные портфели оказываются эффективными, но при $\rho < s_2/s_1$ существуют в окрестности $x = 0$ неэффективные портфели. Для произвольного количества периодов *T* производную дисперсии относительного дохода портфеля по *x* можно записать как

$$T \cdot \left[\left(s_x^2 + m_x^2\right)^{T-1}\left(s_x^2\right)' + \left(\left(s_x^2 + m_x^2\right)^{T-1} - m_2^{2T-2}\right)\left(m_x^2\right)'\right].$$

При больших значениях *T* знак этого выражения совпадает со знаком

$$\left(s_x^2\right)' + \left(m_x^2\right)' = -2s_2^2 + 2\rho s_1 s_2 + 2m_2\left(m_1 - m_2\right).$$

Из этого следует, что при $\rho > \frac{s_2}{s_1} - \frac{m_2\left(m_1 - m_2\right)}{s_1 s_2}$ и при достаточно больших *T* все портфели становятся эффективными. Вспоминая теперь, что при

$$\frac{s_2}{s_1} - \frac{m_2\left(m_1 - m_2\right)}{s_1 s_2} < \rho < \frac{s_2}{s_1}, \tag{1}$$

для одпопериодного случая, портфели в некоторой окрестности $x = 0$ были неэффективными, мы делаем окончательный вывод: при условии (1) существуют неэффективные однопериодные портфели и все они становятся эффективными при достаточно большом *T*. Это значит, что существуют портфели, которые

[2] Обоснование большей части предлагаемых здесь формул можно найти в работе: Агасандян Г.А.: Элементы многопериодной портфельной модели. М.: ВЦ РАН, 1997. 29с.

не представляют интереса для всех нерасположенных к риску инвесторов, если интервал инвестирования состоит из единственного периода (как не являющиеся эффективными), но они начинают представлять для них интерес, если инвестиционный горизонт простирается на большее число периодов.

2. *Кривые безразличия многопериодного инвестора*. Традиционный способ введения кривых безразличия для случая $T=1$ связан с рассмотрением прямых вида $m_p - As_p^2 = const$, где A – коэффициент нерасположенности инвестора к риску; чем он больше, тем более инвестор нерасположен к риску. Очевидно, что в таком виде использовать подобные кривые при $T>1$ и, тем более при $T\to\infty$, неправомерно, поскольку константу A нельзя полагать не зависящей от T. Поэтому константы A следует должным образом трансформировать. Предлагается это сделать следующим образом.

Наиболее информативной характеристикой портфеля на длинных инвестиционных горизонтах нам представляется среднее геометрическое по времени относительного дохода портфеля, обозначаемое через $\bar{r}_p(T)$. Если его считать логнормально распределенным, то можно рассчитать математическое ожидание и дисперсию этого среднего геометрического для портфеля и изучить их поведение при $T\to\infty$. Оказывается, что при $T\to\infty$ имеют место асимптотические представления:

$$\overline{m}_p = \frac{m_p^2}{\sqrt{s_p^2+m_p^2}}, \qquad \bar{s}_p^2 = \frac{1}{T}\frac{m_p^4}{s_p^2+m_p^2}\ln\frac{s_p^2+m_p^2}{m_p^2},$$

где $\overline{m}_p$ и $\bar{s}_p^2$ – математическое ожидание и дисперсия $\bar{r}_p(T)$ соответственно. Эти представления наталкивают нас на следующий вывод: для получения содержательных результатов в качестве многопериодного аналога кривых безразличия для больших T следует рассматривать кривые $\overline{m}_p - AT\bar{s}_p^2 = \mathrm{const}$. Это значит, что вместо коэффициента A используется AT. При таком подходе коэффициент A уже становится универсальным для любой длины инвестиционного горизонта, и он полностью характеризует склонность инвестора к риску.

3. *Критерий допустимых потерь в многопериодном инвестировании*. Задача инвестора в соответствии с критерием допустимых потерь состоит в определении портфеля p, максимизирующего математическое ожидание $\overline{m}_p$ среднего по времени его относительного дохода за T периодов при условии $\Pr\{r_p(T)<r^\circ(T)\}\le\gamma$, где γ – фиксированный уровень значимости, $r^\circ(T)$ – минимально допустимый для инвестора уровень относительного дохода, а $r_p(T)$ – относительный доход за T периодов. Сочетание параметра γ и величины $r^\circ(T)$ характеризует степень нерасположенности инвестора к риску.

В отличие от предыдущего случая, имевшего дело с кривыми безразличия инвесторов, здесь инвестор характеризуется уже двумя параметрами. Поэтому, чтобы сравнивать инвесторов между собой, желательно зафиксировать один из параметров, например, параметр γ, означающий некоторую (вообще говоря, малую) вероятность превышения потерями заданного уровня (или, эквивалентно, вероятность того, что капитал инвестора станет меньше заданного уровня, зависящего от Т). При фиксированном γ, чем больше $r^\circ(T)$, тем меньше расположен инвестор к риску, и наоборот. В рассматриваемом случае ограничение на вероятность сводится к условию

$$a + \frac{zb}{\sqrt{T}} \geq \frac{\ln r^{\circ}(T)}{T}, \tag{2}$$

где

$$a = \frac{1}{2}\ln\frac{m_p^4}{s_p^2 + m_p^2}, \qquad b = \ln\frac{s_p^2 + m_p^2}{m_p^2},$$

а $z = z(\gamma)$ – γ-квантиль функции распределения стандартной нормальной случайной величины.

Снова, как и в случае с кривыми безразличия, нам желательно иметь для достаточно больших инвестиционных горизонтов такой вариант критерия допустимых потерь, чтобы он был бы индифферентным к длине горизонта. Анализируя условие (2) на вероятность, можно прийти к следующему выводу. Для получения такой асимптотической формы критерия допустимых потерь необходимо инвестора характеризовать параметром Z и показателем уровня допустимых потерь R, задаваемых соотношениями $Z = \frac{z}{\sqrt{T}}$ и $R = \frac{\ln r^{\circ}(T)}{T}$, т.е. $z = Z\sqrt{T}$ и $r^{\circ}(T) = \exp(RT)$. Величины Z и R являются универсальными для любой длины инвестиционного горизонта. Они полностью характеризуют склонность инвестора к риску, – чем больше Z при заданном R или чем меньше R при заданном Z, тем менее расположен (или более склонен) инвестор к риску.