Аннотация

В работе исследуется влияние длины инвестиционного горизонта на выбор инвестором оптимального для себя портфеля. При этом сопоставляются два различных подхода к описанию предпочтений инвестора при выборе портфеля из множества эффективных портфелей. Один из подходов, являющийся более традиционным, основывается на понятии кривых безразличия, а другой – на критерии "допустимых потерь". Показывается, что инвесторы ведут себя неодинаково при разных подходах.

Элементы многопериодной портфельной модели

Г.А. Агасандян

Целью настоящей работы является описание и сравнение разных подходов к решению проблемы выбора инвестором оптимального портфеля в многопериодном случае, а также изучение зависимости этого выбора от длины его инвестиционного горизонта.

1. Основные обозначения и эффективное множество портфелей

Рассмотрим основные понятия и обозначения портфельной теории применительно к многопериодному случаю. Временной параметр обозначим через t и предоставим ему возможность пробегать целочисленные значения от 0 до произвольного натурального числа T, которое будем называть длиной инвестиционного горизонта инвестора. Множество всех рассматриваемых ценных бумаг обозначим через I. Для удобства будем оперировать лишь относительными доходами от вложений в ценные бумаги и обозначать их будем через r, а именно

$$r_i(t) = R_i(t)/R_i(t\text{-}1),$$

где $R_i(t)$ - сумма денег в момент t, получающаяся в результате вложения суммы денег $R_i(t\text{-}1)$ в предыдущий момент времени t-1 в ценную бумагу i. Заметим, что привычная доходность на интервале t получается вычитанием из относительного дохода единицы. Обозначим далее

$$m_i = \mathrm{M}\ r_i(t), \quad i=I,$$

$$s_i^2 = \mathrm{D}\ r_i(t) = \mathrm{M}\ [r_i(t)\text{-}m_i]^2, \quad i=I,$$

$$\rho_{ij}\ s_i\ s_j = \mathrm{cov}(r_i,r_j) = \mathrm{M}\ [r_i(t)\text{-}m_i][r_j(t)\text{-}m_j], \quad i,j=I.$$

где M означает знак математического ожидания, D – дисперсии, cov – ковариации двух случайных величин, а ρ называется их коэффициентом корреляции. В этих обозначениях заключено предположение, что m_i, s_i и ρ_{ij} не зависят от t. Будем также считать, что для разных t совокупности (по i) случайных величин $r_i(t)$ независимы между собой (при фиксированном t величины $r_i\ (t)$ для разных i могут быть зависимы).

Из ценных бумаг множества I можно строить портфели, комбинируя ценные бумаги с теми или иными весами. Многие выводы настоящей работы верны для произвольного множества I, но в иллюстративных целях для простоты множество I чаще будем рассматривать состоящим из двух ценных бумаг: I={1,2}. Вес x будем приписывать ценной бумаге i=1, а вес 1–x – ценной бумаге i=2. Если структура портфеля может меняться со временем, то x зависит от t. Для произвольного портфеля p относительный доход $r_p(t)$ за интервал t вводится формулой

$$r_p(t) = x\, r_1(t) + (1–x)\, r_2(t).$$

При этом

$$m_p = x\, m_1 + (1–x)\, m_2, \qquad (1)$$

$$d_p = s_p^2 = x^2 s_1^2 + (1–x)^2 s_2^2 + 2x(1–x)\, \rho\, s_1\, s_2, \qquad (2)$$

где m_p и d_p – математическое ожидание и дисперсия относительного дохода портфеля соответственно. Иногда, если не возникает опасности путаницы, для упрощения обозначений индекс "p" будем опускать.

Напомним используемую в портфельной теории терминологию. Множеством минимальной дисперсии называется множество всех тех портфелей, которые среди всех портфелей с заданным относительным доходом имеют минимально возможную дисперсию. Эффективным портфелем называется портфель p такой, что для любого портфеля p', для которого $m_{p'} > m_p$, одновременно и $s_{p'} > s_p$. Эффективные портфели образуют эффективное множество портфелей.

В случае, когда множество I состоит всего из двух ценных бумаг, каждый портфель принадлежит множеству минимальной дисперсии (если $m_1 \neq m_2$). Мы хотим изучить влияние длины инвестиционного горизонта инвестора на эффективность портфелей. Для определенности положим $m_1 > m_2$ (более доходной является первая бумага). Ограничимся при этом типичным случаем $s_1 > s_2$ (более доходная бумага является и более рисковой). Множество $d(m)$, рассматриваемое как множество точек в координатах d и m (оно получается исключением переменной x из соотношений (1) и (2)), будет множеством минимальной дисперсии. Однако не все его точки обязательно будут эффективными портфелями. С учетом линейности m по x (с положительным коэффициентом наклона), для проверки эффективности портфеля достаточно изучить зависимость d от x. Заметим, что

$$d' = 2x\, s_1^2 – 2(1–x)\, s_2^2 + 2(1–2x)\, \rho\, s_1\, s_2.$$

Несложное исследование показывает, что $d'(0) = 0$ при $\rho = s_2/s_1$ и это значение ρ является критическим в том смысле, что при $\rho > s_2/s_1$ выполняется неравенство $d'(x) > 0$ для всех x, $0 \leq x \leq 1$, и все множество минимальной дисперсии является эффективным множеством. При $\rho < s_2/s_1$ в некоторой окрестности x=0 функция $d(x)$ имеет отрицательную производную и поэтому, в частности, портфель i=2 (x=0) является неэффективным (хотя и принадлежит множеству минимальной дисперсии).

Подобным замечанием мы ограничимся для случая однопериодного портфеля и перейдем к рассмотрению случая двухпериодного портфеля. Следует сразу отметить, что мы не собираемся решать динамическую задачу управления портфелем во всей ее полноте. Поэтому сделаем упрощающие предположения, касающиеся схем формирования портфеля в многопериодном случае. Рассмотрим две схемы.

В первой схеме переформирование портфеля допускается на каждом шаге. Однако веса, приписываемые всем ценным бумагам, остаются при этом неизменными. Иными словами, в такой схеме формирования портфеля его структура со временем не меняется – на каждом шаге доля капитала, вкладываемого в бумагу 1, равна x, а в бумагу 2 – (1–x). Для этого на каждом шаге приходится, вообще говоря, часть средств, полученных от более удачного вложения в какую-либо ценную бумагу, вкладывать в другую ценную бумагу. Хотя при каждом переформировании портфеля обычно взимаются комиссионные, мы этим будем пренебрегать.

Во второй схеме формирования портфеля в начальный момент выбираются доли x и $1–x$ вложений в ценные бумаги 1 и 2 соответственно, и после этого переформирование портфеля не допускается. Это значит, что реальная доля вложений в каждую ценную бумагу на произвольном шаге будет зависеть от стечения обстоятельств – от случайной реализации относительных доходов на каждом шаге процесса. Эта схема по понятным причинам не столь популярна, как первая, и ее мы приводим лишь для полноты изложения.

2. Значение длины инвестиционного горизонта – схема с неизменными весами ценных бумаг в портфеле

Мы пока ограничимся изучением динамической задачи для двухпериодного инвестиционного горизонта и рассмотрим для нее сначала первую схему формирования портфеля, когда веса ценных бумаг 1 и 2 на каждом шаге процесса не зависят от номера шага и равны x и $1–x$ соответственно. Относительный доход $r_p(2)$ для портфеля p за два периода представим через его же относительные доходы за последовательные периоды. Из их независимости следует:

$$r_p^{(2)} = r_p(1)\, r_p(2). \tag{3}$$

Его математическое ожидание и дисперсия выражаются формулами

$$m_p^{(2)} = \mathrm{M}\, r_p^{(2)} = m_p^2,$$

$$\begin{aligned}(s_p^{(2)})^2 &= \mathrm{D}r_p^{(2)} = \mathrm{M}(r_p^{(2)})^2 - (\mathrm{M}r_p^{(2)})^2 = \\ &= \mathrm{M}(r_p(1))^2\, \mathrm{M}(r_p(2))^2 - (\mathrm{M}r_p(1))^2\, (\mathrm{M}r_p(2))^2 = \\ &= (\mathrm{D}r_p(1) + (\mathrm{M}r_p(1))^2)^2 - (\mathrm{M}r_p(1))^4 = \\ &= (\mathrm{D}r_p(1))^2 + 2\mathrm{D}r_p(1)(\mathrm{M}r_p(1))^2 = \\ &= s_p^4 + 2\, s_p^2\, m_p^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Подобные соотношения применительно к портфельной теории были приведены в работах [1,2]. Подстановка в полученные соотношения формул (1) и (2) дает следующее представление:

$$y = d_p^{(2)} = (x^2 s_1^2 + (1-x)^2 s_2^2 + 2x(1-x)\, \rho\, s_1 s_2)^2 +$$

$$+ 2(x^2 s_1^2 + (1-x)^2 s_2^2 + 2x(1-x)\, \rho\, s_1 s_2)(x\, m_1 + (1-x)\, m_2)^2.$$

Для исследования зависимости y от x продифференцируем ее:

$$y' = 2(x^2 s_1^2 + (1-x)^2 s_2^2 + 2x(1-x)\, \rho\, s_1 s_2)\, (2x\, s_1^2 - 2(1-x)\, s_2^2 + 2(1-2x)\, \rho\, s_1 s_2) +$$

$$+ 2(x^2 s_1^2 + (1-x)^2 s_2^2 + 2x(1-x)\, \rho\, s_1 s_2)\, 2(x\, m_1 + (1-x)\, m_2)(m_1 - m_2) +$$

$$+ 2(x\, m_1 + (1-x)\, m_2)^2\, (2x\, s_1^2 - 2(1-x)\, s_2^2 + 2(1-2x)\, \rho\, s_1 s_2).$$

Для сравнения эффективных множеств для однопериодного и двухпериодного случаев рассмотрим значение полученной производной в точке x=0. Имеем

$$y'(0) = 4\, s_2^2\, (-s_2^2 + \rho\, s_1 s_2) + 4\, s_2^2\, m_2\, (m_1 - m_2) + 4\, m_2^2\, (-s_2^2 + \rho\, s_1 s_2).$$

Теперь подставим в последнее соотношение значение $\rho = s_2/s_1$ и получим

$$y'(0) = 4\, s_2^2\, m_2(m_1 - m_2) > 0.$$

Выполнение последнего неравенства для $\rho = s_2/s_1$ в силу свойства непрерывности y' по параметру ρ влечет его выполнимость и для ρ из некоторой окрестности точки s_2/s_1. С учетом того, что для однопериодного случая такая производная при $\rho = s_2/s_1$ равнялась 0, а при меньших значениях ρ она была отрицательной, мы приходим к выводу, что возможна ситуация, при которой, например, портфель p, состоящий лишь из ценной бумаги 2, для однопериодного случая при некоторых значениях ρ, меньших s_2/s_1, будет неэффективным, тогда как этот же портфель, рассматриваемый в двухпериодном случае, будет эффективным.

Тот факт, что неэффективные в однопериодном случае портфели могут стать эффективными в двухпериодном случае, уже говорит о том, что оптимальные портфели (т.е. портфели, фактически выбираемые инвестором в соответствии со своими предпочтениями) могут различаться для одного и того же инвестора в зависимости от длины его инвестиционного горизонта, так как никакой нерасположенный к риску инвестор не станет выбирать неэффективные портфели. Однако для более точного определения конкретного выбора инвестора следовало бы знать его функцию предпочтения и то, как она зависит от длины инвестиционного горизонта.

Аналогичным образом следовало бы поступать при рассмотрении инвестиционных горизонтов произвольной длины. Здесь мы ограничимся тем, что приведем общие формулы, задающие представления основных параметров портфеля (математического ожидания и дисперсии) для произвольного числа периодов, без которых нельзя решать проблему выбора инвестором оптимального для себя сочетания доходности и риска. Из независимости относительных доходов $r_p(t)$ по t для произвольного T имеем

$$\mathrm{M}r_p^{(T)} = \mathrm{M}[r_p(1)]^T = m_p^T. \tag{5}$$

Выражение для дисперсии $r_p^{(T)}$ получается следующим образом. По определению дисперсии

$$\mathrm{D}r_p^{(T)} = \mathrm{M}[(r_p(1)r_p(2)...r_p(T))^2] - \mathrm{M}[r_p(1)r_p(2)...r_p(T)]^2.$$

В силу независимости доходов по T и их одинаковой распределенности получаем, что

$$\mathrm{D}r_p^{(T)} = \mathrm{M}[(r_p(1)^2]^T - \mathrm{M}[r_p(1)]^{2T} = (\mathrm{D}r_p(1) + \mathrm{M}r_p(1)^2)^T - \mathrm{M}[r_p(1)]^{2T},$$

откуда следует формула

$$\mathrm{D}r_p^{(T)} = (s_p^2 + m_p^2)^T - m_p^{2T}. \tag{6}$$

Подходы к заданию предпочтений инвестора для произвольного инвестиционного горизонта будут обсуждаться ниже в разделах 4 и 5.

3. Схема с запретом на переформирование портфеля

Рассмотрим теперь вторую схему формирования портфеля, когда размеры вложений в ценные бумаги 1 и 2 выбираются лишь в начале процесса и равны x и $1-x$ соответственно, а затем переформирование портфеля не допускается. Относительный доход $r_p(2)$ для портфеля p за два периода представим в следующем виде (заметим, что формула (3) для портфеля в целом здесь уже не работает):

$$r_p^{(2)} = x\, r_1^{(2)} + (1-x)\, r_2^{(2)}.$$

Для отдельных ценных бумаг, тем не менее, та же формула (3) применима, а именно, относительные доходы за два периода выражаются через относительные доходы за последовательные периоды:

$$r_i^{(2)} = r_i(1)\, r_i(2), \quad i=1, 2.$$

Их математические ожидания и дисперсии, а также их ковариация выражаются формулами:

$$m_i^{(2)} = \mathrm{M}\, r_i^{(2)} = m_i^2, \quad i=1, 2,$$

$$(s_i^{(2)})^2 = \mathrm{D}\, r_i^{(2)} = s_i^4 + 2\, s_i^2\, m_i^2, \quad i=1, 2,$$

$$\mathrm{cov}(r_1^{(2)}, r_2^{(2)}) = \mathrm{M}\, [r_1^{(2)} - m_1^{(2)}][r_2^{(2)} - m_2^{(2)}] = (\rho\, s_1\, s_2)^2 + 2\rho\, s_1\, s_2\, m_1\, m_2.$$

Вторая из выписанных формул получена по аналогии с формулой (4) для портфеля. Используя совместно эти соотношения и соотношение (2), получаем следующее представление:

$$y = d_p^{(2)} = x^2\, \mathrm{D}r_1^{(2)} + (1-x)^2\, \mathrm{D}r_2^{(2)} + 2x(1-x)\, \mathrm{cov}(r_1^{(2)}, r_2^{(2)}) =$$

$$= x^2\, (s_1^4 + 2s_1^2 m_1^2)^2 + (1-x)^2\, (s_2^4 + 2s_2^2 m_2^2)^2 + 2x(1-x)\, ((\rho\, s_1\, s_2)^2 + 2\rho\, s_1\, s_2\, m_1\, m_2).$$

Дифференцируя y по x, получаем:

$$y' = 2x\, (s_1^4 + 2s_1^2 m_1^2)^2 - 2(1-x)\, (s_2^4 + 2s_2^2 m_2^2)^2 + 2(1-2x)\, ((\rho\, s_1\, s_2)^2 + 2\rho\, s_1\, s_2\, m_1\, m_2).$$

В точке x=0 имеем

$$y'(0) = -\, 2\, (s_2^4 + 2s_2^2 m_2^2)^2 + 2\, ((\rho\, s_1\, s_2)^2 + 2\rho\, s_1\, s_2\, m_1\, m_2).$$

После подстановки в последнее соотношение значения $\rho = s_2/s_1$ получим

$$y'(0) = 4s_2^2\, m_2(m_1 - m2) > 0,$$

что совпадает с аналогичным выражением для случая с возможным переформированием портфеля, а потому и выводы, сделанные для случая возможного переформирования портфеля, остаются справедливыми и для случая, когда переформирование портфеля недопустимо.

Для инвестиционного горизонта произвольной длины в схеме с запретом на переформирование портфеля приведем выражения для математического ожидания и дисперсии портфеля. Здесь ограничимся портфелями, состоящими лишь из двух ценных бумаг. Для произвольного T имеем случайные относительные доходы для обеих ценных бумаг

$$r_i^{(T)} = r_i(1) r_i(2) ... r_i(T), \quad i=1,2.$$

Их математическое ожидание, а также математическое ожидание портфеля выражается формулами:

$$m_i^{(T)} = \mathrm{M}\, r_i^{(T)} = m_i^T, \quad i=1,2,$$

$$m_p^{(T)} = \mathrm{M}\, r_p^{(T)} = x\, m_1^T + (1-x)\, m_2^T. \tag{7}$$

Дисперсия портфеля за T шагов подсчитывается более сложно, чем в схеме с переформированием портфеля. Мы приведем окончательные формулы. Дисперсия относительных доходов от вложений в отдельные ценные бумаги за T шагов определяется, как и в первой схеме:

$$\mathrm{D}r_i^{(T)} = (s_i^2 + m_i^2)^T - m_i^{2T}, \quad i=1,2,$$

а их ковариация по формуле

$$\mathrm{cov}(r_1^{(T)}, r_2^{(T)}) = (\rho\, s_1\, s_2 + m_1\, m_2)^T - (m_1\, m_2)^T.$$

В результате дисперсия портфеля в целом $\mathrm{D}r_p^{(T)}$ подсчитывается так:

$$\mathrm{D}r_p^{(T)} = x^2\,\mathrm{D}r_1^{(T)} + (1-x)^2\,\mathrm{D}r_2^{(T)} + 2x(1-x)\,\mathrm{cov}(r_1^{(T)},r_2^{(T)} =$$

$$= x^2\,((s_1^{\,2} + m_1^{\,2})^T - m_1^{\,2T}) + (1-x)^2\,((s_2^{\,2} + m_2^{\,2})^T - m_2^{\,2T}) + \qquad (8)$$

$$+\,2x(1-x)(\,\rho\, s_1\, s_2 + m_1\, m_2)^T - (m_1\, m_2)^T.$$

Из соотношений (7) и (8) нетрудно усмотреть, что при достаточно больших T будут верными асимптотические представления (представление (9) справедливо при дополнительных, но естественных, условиях $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$).

$$m_p^{(T)} = x\, m_1^{\,T}, \quad x \neq 0,$$

$$m_p^{(T)} = m_2^{\,T}, \quad x = 0,$$

$$\mathrm{D}r_p^{(T)} = x^2\,(s_1^{\,2} + m_1^{\,2})^T, \quad x \neq 0, \qquad (9)$$

$$\mathrm{D}r_p^{(T)} = (s_2^{\,2} + m_2^{\,2})^T, \quad x = 0.$$

Эти асимптотические представления свидетельствуют о том, что при $x \neq 0$ математическое ожидание и дисперсия относительного дохода портфеля асимптотически эквивалентны математическому ожиданию и дисперсии относительного дохода от вложения доли x первоначального капитала в более доходную бумагу и никак не зависят от свойств менее доходной и менее рисковой бумаги.

4. Асимптотические свойства относительных доходов

Сейчас мы займемся изучением некоторых свойств относительных доходов портфеля при произвольных T. Далее мы будем рассматривать только первую схему формирования многопериодного портфеля с фиксированными долями вложений в ценные бумаги на каждом шаге процесса. Нам потребуется наложить более сильные (хотя все еще не слишком обременительные) ограничения на распределение относительных доходов. Будем считать, что относительные доходы $r_p(t)$ портфеля p образуют по t последовательность случайных величин, независимых между собой и одинаково распределенных по логнормальному закону. (Кстати, если предположить лишь независимость этих доходов, то при весьма не ограничивающих условиях для произвольного распределения последовательных относительных доходов предельное распределение относительного дохода за T периодов стремится к логнормальному распределению.) Приведем необходимые формулы, связывающие нормальные и логнормальные случайные величины и их параметры.

Пусть x=N(a,b^2) – нормально распределенная случайная величина, для которой Mx=a, Dx=b^2. Тогда y=exp(x)=LN(m,s^2) – логнормально распределенная случайная величина с параметрами m=My, s^2=Dy, связанными с параметрами нормального распределения a и b^2 соотношениями

$$m = \exp(a + b^2/2), \qquad (10)$$

$$s^2 = \exp(2a + b^2)(\exp(b^2) - 1), \qquad (11)$$

или, в обратную сторону,

$$a = 1/2\,\ln\,(m^4/(s^2+m^2)), \qquad (12)$$

$$b^2 = \ln\,((s^2+m^2)/m^2). \qquad (13)$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных нормальных случайных величин $X_t = \mathrm{N}(a,b^2)$. Образуем случайные величины $Y_t = \exp(X_t)$. Они образуют последовательность независимых одинаково распределенных логнормальных случайных величин $Y_t = \mathrm{LN}(m,s^2)$, для которых параметры m, s^2 связаны с параметрами a, b^2 соотношениями (10), (11) или (12), (13). Составим величину $Y = Y_1\ Y_2 \ldots Y_T$. (В нашем случае – это относительный доход за T периодов.) Величина Y представима в виде

$$Y = \exp(X), \quad X = X_1 + X_2 + \ldots + X_T.$$

Очевидно, что $X = \mathrm{N}(Ta,Tb^2)$. Поэтому из соотношений (10) и (11) получаем, что

$$\mathrm{M}Y = \exp(Ta + Tb^2/2) = m^T, \tag{14}$$

$$\mathrm{D}Y = \exp(2Ta + Tb^2)(\exp(Tb^2) - 1) = m^{2T}\ \{\exp(Tb^2) - 1\}.$$

Используя (13) находим, что

$$\mathrm{D}Y = m^{2T}\ \{\exp(T \ln ((s^2+m^2)/m^2)) - 1\} = m^{2T}\ \{((s^2+m^2)/m^2)^T - 1\} = (s^2+m^2)^T - m^{2T}. \tag{15}$$

Интерес для нас будет представлять и случайная величина

$$\overline{Y} = Y^{1/T} = \exp(\overline{X}), \qquad \overline{X} = X/T = (X_1 + X_2 + \ldots + X_T)/T.$$

(В нашем случае эта величина интерпретируется как среднее по времени относительного дохода за T периодов.) Она также является логнормальной случайной величиной и ее параметры вычисляются (с использованием (10)–(13)) по формулам

$$\mathrm{M}\,\overline{Y} = \exp(a + b^2/2T) = \exp(1/2\ \ln(m^4/(s^2+m^2)) + (1/2T)\ \ln((s^2+m^2)/m^2)) =$$

$$= m^2/(s^2+m^2)^{1/2}\ ((s^2+m^2)/m^2)^{1/2T}, \tag{16}$$

$$\mathrm{D}\,\overline{Y} = \exp(2a + b^2/T)(\exp(b^2/T) - 1) =$$

$$= \exp(\ln(m^4/(s^2+m^2)) + (1/T)\ln((s^2+m^2)/m^2))\ (\exp((1/T)((s^2+m^2)/m^2)) - 1) =$$

$$= (m^4/(s^2+m^2))\ ((s^2+m^2)/m^2)^{1/T})(((s^2+m^2)/m^2)^{1/T} - 1). \tag{17}$$

Из полученных выражений следует, что (1) с ростом T параметры МY~ и DY~ не возрастают, (2) при стремлении T к бесконечности имеют место асимптотические представления

$$\mathrm{M}\,\overline{Y} \approx m^2/(s^2+m^2)^{1/2}, \tag{18}$$

$$\mathrm{D}\,\overline{Y} \approx (1/T)(m^4/(s^2+m^2))\ \ln((s^2+m^2)/m^2), \tag{19}$$

(3) справедливы предельные соотношения

$$\lim \mathrm{M}\,\overline{Y} = m^2/(s^2+m^2)^{1/2} \le m,$$

$$\lim \mathrm{D}\,\overline{Y} = 0.$$

Воспользуемся полученными соотношениями и свойствами логнормальных случайных величин, чтобы проанализировать выбор оптимального портфеля инвестором. Один из подходов к описанию предпочтений инвестора состоит в задании так называемых кривых безразличия. Сейчас мы остановимся именно на нем. Другой подход, связанный с критерием "допустимых потерь", будет рассмотрен ниже в параграфе 5.

Предпочтения инвестора проиллюстрируем на примере простой функции предпочтения. Кривые безразличия обычно рисуются на той же плоскости, на которой изображаются множество достижимых портфелей, множество минимальной дисперсии и эффективное множество портфелей. Часто эти кривые задаются в форме прямых в координатах m_p и d_p:

$$m_p - A\ d_p = \text{const}, \tag{20}$$

где коэффициент A означает наклон этих прямых, при этом для нерасположенного к риску инвестора должно быть $A>0$ – чем больше этот коэффициент, тем меньше расположен инвестор к риску. Для нахождения оптимального портфеля для инвестора, характеризуемого параметром A, на кривой $d(m)$ следует найти точку, в которой производная $d'(m)$ совпадает с $1/A$. Полученную нами зависимость $d(x)$ в силу линейной зависимости $m(x)$ трансформировать в зависимость $d(m)$ не представляет затруднений. Фактически получается, что на кривой $d(x)$ нужно искать точку, в которой производная $d'(x)$ равна $1/A(m_1-m_2)$.

Приведенные линии (20) построены для однопериодного горизонта инвестора. Как быть, если инвестиционный горизонт содержит более одного периода? Очевидно, что неправомерно применять задаваемую кривыми безразличия функцию предпочтения для однопериодного горизонта к многопериодному случаю – кривые безразличия нуждаются в модификации. Решение этой проблемы следует искать скорее в области психологии, чем математики или финансов. Хотя важность этой проблемы нельзя недооценивать – от способа задания функций предпочтения инвесторов при выборе оптимального портфеля зависит очень многое.

Нам представляется естественным следующий прием. Попытаемся обратить проблему – сохраняя в том или ином виде линии (20) в качестве кривых безразличия для инвестора, следует каким-либо разумным способом свести относительный доход (и его параметры) для портфеля за весь интервал T к однопериодному эквиваленту и сравнить уже его с однопериодными кривыми безразличия. (Речь фактически идет о нахождении в некотором смысле среднего по времени относительного дохода за время T.)

Тот факт, что относительный доход для портфеля за несколько периодов задается в виде произведения относительных доходов за последовательные единичные периоды, подводит нас к представлению среднего по времени для относительного дохода портфеля за T периодов в виде среднего геометрического T относительных доходов за последовательные единичные периоды. Иными словами, среднее по времени $r\sim_p^{(T)}$ для относительного дохода $r_p^{(T)}$ портфеля p задается формулой:

$$\bar{r}_p^{(T)} = (r_p^{(T)})^{1/T} = [r_p(1) r_p(2) \ldots r_p(T)]^{1/T}.$$

Математическое ожидание и дисперсия среднего по времени для относительного дохода за общее число T периодов инвестиционного горизонта находятся с использованием формул (16) и (17) (в эти формулы достаточно вместо m и s подставить m_p и s_p соответственно:

$$\mathrm{M}\,\bar{r} = m^2/(s^2+m^2)^{1/2}\ ((s^2+m^2)/m^2)^{1/2T},$$

$$\mathrm{D}\,\bar{r} = (m^4/(s^2+m^2))\ ((s^2+m^2)/m^2)^{1/T})(((s^2+m^2)/m^2)^{1/T} - 1).$$

Затем ищется портфель, представимый точкой на кривой $\mathrm{D}\,\bar{r}$ в координатах $(\mathrm{M}\,\bar{r},\ \mathrm{D}\,\bar{r})$, в которой производная $d'(m)$ равна $1/A$. Простейшие выводы можно получить сразу. Если для всех T параметр A принимает одно и то же значение, то из приведенных формул ясно, что для достаточно больших T

$$\mathrm{M}\,\bar{r} \approx m^2/(s^2+m^2)^{1/2},$$

$$\mathrm{D}\,\bar{r} \approx 0.$$

Это значит, что при $0 < A < \infty$ и при достаточно больших T выбор любого нерасположенного к риску инвестора состоит просто в максимизации $\mathrm{M}\,\bar{r}$, т.е. максимизации выражения $m^2/(s^2+m^2)^{1/2}$:

$$p^\circ = \operatorname{argmax}\, m^2/(s^2+m^2)^{1/2}. \qquad (21)$$

Максимум выражения может достигаться при любом значении x, $0 \le x \le 1$, в зависимости от значений параметров задачи. При ρ, близком к -1, оптимальный портфель p° будет "тяготеть" к значению x, при котором дисперсия однопериодного портфеля s_p^2 минимальна. При ρ, близком к $+1$, оптимальный портфель будет "тяготеть" к наиболее рисковому однопериодному портфелю x=0 (m_p=m_1).

Подобные свойства оптимального портфеля обусловлены тремя причинами. Во-первых, при больших T в среднем по времени относительном доходе фактически исключается риск. Во-вторых, средний по времени относительный доход увеличивается с уменьшением дисперсии однопериодного портфеля. В-третьих, гипотетический инвестор относится к среднему по времени относительному доходу как к обычному относительному доходу за один период времени (неизменность параметра A).

Рассматриваемая гипотеза, определяющая предпочтения инвестора, может показаться нереалистичной. Имеет право на существование, например, точка зрения, в соответствии с которой инвестор, отдавая себе отчет в том, что операция осреднения по времени приводит к снижению риска, будет чувствительнее относиться к возможным (даже небольшим) отклонениям от средних по времени значений. Фактически это должно означать, что параметр A с ростом T должен расти, отражая объективное (не связанное с особенностями конкретного инвестора) снижение с ростом T рисковости среднего по времени относительного дохода сразу для всех портфелей. Подобную идею можно реализовать, например, если параметр A заменить параметром A'=AT.

Такой выбор параметра "предпочтения" A' неслучаен. Если взять в качестве A' функцию от T, растущую быстрее линейной по T функции AT, то мы получаем прежний результат, а именно, инвестор предпочтет портфель p° (формула (21)). Если же A' растет медленнее линейной функции AT, инвестор предпочтет самый малорисковый в однопериодном случае портфель. И лишь в случае A'=AT возможны промежуточные варианты, определяемые конкретным значением A. С учетом асимптотических представлений (18) и (19) для нахождения оптимального портфеля при больших T потребуется решить уравнение

$$[(m^4/(s^2+m^2))\ln((s^2+m^2)/m^2)]'_x \,/\, [m^2/(s^2+m^2)^{1/2}]'_x = 1/A,$$

которое получается из уравнения

$$d'_m = 1/(AT),$$

если исключить переменную x из системы соотношений (18) и (19). Правомерно ли такое представление функции предпочтения инвестора – вопрос, нуждающийся в специальных исследованиях, основанных на тестировании предпочтений инвесторов.

5. Критерий "допустимых потерь"

Другой способ определения оптимального портфеля связан с совершенно иным подходом к заданию функции предпочтения инвестора. Его называют критерием "допустимых потерь". Считается, что, во всяком случае, при $T \neq 1$ он лучше отражает психологию инвестора, пытающегося нащупать баланс между риском и доходностью (см. [3]).

Задается некоторый уровень потерь, которые инвестор готов понести к моменту времени T, составляющему длину его инвестиционного горизонта, с заданной вероятностью, называемой уровнем значимости. Как уровень значимости, так и уровень потерь выбираются самим инвестором и фактически характеризуют его предпочтения. Меньшая нерасположенность инвестора к риску должна сказаться на повышении уровня потерь, которые инвестор готов понести с той же вероятностью.

Уровень значимости обычно задается как небольшая величина g, например, 5%, а уровень потерь задается по-разному, например, в виде доли от первоначально вложенного капитала. Для общности допустимый для инвестора уровень потерь к моменту T будем задавать, определяя для этого момента времени некоторый критический для инвестора уровень, ниже которого снижение своего капитала инвестор рассматривает как весьма нежелательное событие. Критический уровень задается как функция от T. А именно, будем считать, что инвестор не желает, чтобы к концу инвестиционного горизонта в момент T его относительный доход за T периодов $r_p^{(T)}$ опустился ниже уровня $r°(T)$. В виду вероятностного характера дохода $r_p^{(T)}$ этого нельзя гарантировать (почти) наверное, поэтому инвестор задает еще уровень вероятности g, с которой он допускает нарушение этого условия. С учетом того, что при этом он также желает увеличения своего дохода, мы приходим к следующей формальной задаче, стоящей перед инвестором.

Требуется найти портфель p, максимизирующий математическое ожидание дохода $m_p^{(T)}$ при условии, что вероятность неравенства $r_p^{(T)}<r°(T)$ не превышает g. Иными словами, оптимальный портфель $p°$ определяется соотношением:

$$p° = \operatorname{argmax}\ \{m_p^{(T)} \mid P\{r_p^{(T)} \le r°(T)\} \le g\}. \tag{22}$$

Для проведения необходимых расчетов нам следовало бы знать распределение вероятностей для $r_p^{(T)}$. Мы будем считать, что относительный доход $r_p^{(T)}$ распределен логнормально. Это в точности так, если все последовательные относительные доходы $r_p(t)$ распределены логнормально и независимы между собой, и это приближенно верно для произвольно распределенных и независимых между собой последовательных относительных доходов, как это следует из центральной предельной теоремы теории вероятностей. Параметры величины $r_p^{(T)}$ были получены ранее (формулы (5) и (6) или (14) и (15). Именно

$$\mathrm{M}r_p^{(T)} = m_p(T) = m_p^{\,T}, \tag{23}$$

$$\mathrm{D}r_p^{(T)} = s_p^2(T) = (s_p^2+m_p^2)^T - m_p^{2T}. \tag{24}$$

Для нахождения $p°$ из соотношения (22) можно предварительно определить максимальный уровень $Z(T,g)$, удовлетворяющий неравенству

$$P\{r_p^{(T)} \le Z(T,g)\} \le g, \tag{25}$$

а затем уже искать $p°$ как

$$p° = \operatorname{argmax}\ \{m_p \mid r°(T) \le Z(T,g)\}. \tag{26}$$

Вид уровня $r°(T)$ как функции от T определяется исключительно инвестором. Однако хотелось бы высказать некоторые соображения на этот счет. Очень многое зависит от темпов роста функции $r°(T)$, однако задавать эти темпы роста в начале инвестиционного горизонта весьма затруднительно – ведь свои предпочтения инвестор должен формулировать на много периодов времени вперед. Это, пожалуй, составляет самую большую проблему при нахождении оптимального портфеля в задаче с использованием критерия "допустимых потерь". Ряд результатов на эту тему для случая, когда функция вырождается в константу, можно найти в работах [5–8].

Поскольку все параметры относительного дохода за T периодов имеют экспоненциальный рост, то было бы разумно, вообще говоря, этот доход сопоставлять с уровнем, также имеющим экспоненциальный рост. В этом случае можно было бы сравнивать инвесторов по их расположенности к риску – формально инвесторы различались бы соответствующим основанием степени притом, что вероятности того, что эти уровни не будут превышены, были бы для них одинаковыми. В то же время, нетрудно видеть, что любые константы в классе экспоненциальных функций являются асимптотически эквивалентными, так как для них основание степени равно 1.

Итак, рисковые предпочтения инвестора задаются уровнем значимости g и уровнем допустимых потерь $r°(T)$, а именно, его намерения включают выполнение условия

$$P\{r_p^{(T)} \le r°(T)\} \le g.$$

Поскольку мы условились считать случайную величину $r_p^{(T)}$ распределенной логнормально, было бы удобно осуществить переход от логнормальной к стандартной нормальной величине N(0,1). Сначала построим нормальную случайную величину $Q = \mathrm{N}(a,b^2)$:

$$Q = \ln r_p^{(T)}. \qquad (27)$$

Ее параметры a и b^2 выражаются через параметры случайной величины $r_p^{(T)}$ с помощью соотношений (12) и (13), а именно

$$a = 1/2 \cdot \ln (m^4(T)/(s^2(T)+m^2(T))), \qquad (28)$$

$$b^2 = \ln ((s^2(T)+m^2(T))/m^2(T)). \qquad (29)$$

Затем нормальная величина $Q = \mathrm{N}(a,b^2)$ переводится в нормальную величину $q = \mathrm{N}(0,1)$ простым линейным преобразованием $q = (Q–a)/b$. После таких преобразований становится очевидно, что задача (26) (с условием (25)) трансформируется следующим образом. Сначала по уровню значимости g находится критическое значение $–z = –z(g)$ нормальной случайной величины $q = \mathrm{N}(0,1)$ (для этого можно воспользоваться готовыми таблицами) в соответствии с соотношением

$$P\ \{q \le –z\} = g$$

(z берется со знаком "минус" для удобства, чтобы значение самого z при типичных небольших значениях g (<1/2) было положительным). Стоит подчеркнуть, что этот уровень z ни от чего больше, кроме g, не зависит. Затем этот уровень преобразуется в критический уровень $a–zb$ для нормальной случайной величины $Q = \mathrm{N}(a,b^2)$. И, наконец, используя соотношения (27), (28) и (29), получаем критический уровень $Z(T,g)$ для нашей исходной логнормальной случайной величины $r_p^{(T)}$:

$$Z(T,g) = \exp(a–zb) = \exp(1/2 \ln (m^4(T)/(s^2(T)+m^2(T))) –$$

$$– z(\ln ((s^2(T)+m^2(T))/m^2(T)))^{1/2} =$$

$$= m^2(T)/(s^2(T)+m^2(T))^{1/2}\exp(–z(\ln ((s^2(T)+m^2(T))/m^2(T)))^{1/2}),$$

который с использованием соотношений (23) и (24) можно выразить уже через исходные параметры однопериодного портфеля:

$$Z(T,g) = m^{2T}/(s^2+m^2)^{T/2} \exp(–z(\ln((s^2+m^2)/m^2)^T)^{1/2}).$$

Окончательно, задача для инвестора заключается в том, что ищется портфель p, максимизирующий m_p при условии:

$$r^\circ(T) \le m^{2T}/(s^2+m^2)^{T/2} \exp(-z(\ln((s^2+m^2)/m^2)^T)^{1/2}).$$

Последнее условие после извлечения корня T-й степени из обеих частей неравенства преобразуется в условие:

$$\bar{r}^\circ(T) \le f(T,z), \tag{30}$$

где

$$f(T,z) = m^2/(s^2+m^2)^{1/2} \exp(-z/T^{1/2} (\ln((s^2+m^2)/m^2))^{1/2}). \tag{31}$$

Некоторые простые выводы из этого условия, определяющего множество допустимых портфелей, можно получить, не делая всех вычислений.

Прежде всего, отметим очевидное свойство условия (30): с ростом $\bar{r}^\circ(T)$ при фиксированных прочих параметрах задачи, в частности, параметра z (и, значит, g), множество допустимых портфелей может разве что сузиться, и поэтому с усилением нерасположенности инвестора к риску доходность оптимального для инвестора портфеля может разве что понизиться. При некотором (критическом) значении параметра $\bar{r}^\circ(T)$ множество допустимых портфелей вырождается в одноэлементное множество – точку, в которой функция $f(T,z)$ (формула (31)) принимает максимальное значение. Если $\bar{r}^\circ(T) > \max f(T,z)$, то множество допустимых портфелей пусто и решения задачи не существует. Такое может случиться не только, когда уровень $\bar{r}^\circ(T)$, выбираемый нерасположенным к риску инвестором, оказывается чрезмерно завышенным, но также в случае повышенной рисковости всех однопериодных портфелей (когда дисперсия s_2 значительна сразу для всех однопериодных портфелей). Отметим, кстати, что в схеме описания предпочтений инвестора, основанной на кривых безразличия, решение всегда существует.

Далее, выражение в правой части неравенства при $s^2 = 0$ (безрисковый портфель) не зависит от T и z и равно m. Этот случай тривиален и говорит лишь о том, что безрисковый портфель будет всегда допустимым, если только $m > \bar{r}^\circ$.

Здесь же еще отметим, что при уменьшении минимально возможного значения s^2 до нуля (в нашем частном примере это происходит, когда отрицательная корреляция возрастает, т.е. ρ снижается до -1) функция $f(T,z)$ возрастает до значения m при всех фиксированных T и z, что говорит о расширении множества допустимых портфелей, которое охватывает безрисковый портфель.

Если $s^2 \ne 0$, то для каждого фиксированного T при стремлении z (>0) к бесконечности (этому случаю отвечает уровень значимости g, равный 0 и характеризующий полностью нерасположенного к риску инвестора) правая часть неравенства убывает и стремится к 0. Это означает, что при возрастании z до бесконечности множество допустимых портфелей сужается до множества безрисковых портфелей (если таковые существуют и при этом $m>\bar{r}^\circ$).

Теперь зафиксируем z и устремим к бесконечности T. При этом рассмотрим два случая. В первом из них $r^\circ(T)$ представляет просто степенную зависимость $r^\circ(T) = (r^\circ)^T$, и поэтому $\bar{r}^\circ(T) = r^\circ$, а во втором – $r^\circ(T) = \text{const} = r^\circ$, и поэтому $\bar{r}^\circ(T) = (r^\circ)^{1/T}$ и с ростом T стремится к 1, возрастая при $r^\circ<1$ и убывая при $r^\circ>1$. Нетрудно проверить, что функция $f(T,z)$ (формула (31)) в условии (30)) при $s^2 \ne 0$ возрастает и в первом случае в пределе неравенство (30) принимает вид:

$$r^\circ \le m^2/(s^2+m^2)^{1/2}.$$

Это значит, прежде всего, что с ростом T в первом случае множество допустимых портфелей расширяется и поэтому max m_p может только возрасти. Кроме того, при больших T зависимость решения задачи от T фактически исчезает и вид задачи упрощается:

$$m_p \rightarrow \max \quad \text{при условии } r^\circ \le m_p^2/(s_p^2+m_p^2)^{1/2}. \tag{32}$$

Во втором случае неравенство (30) принимает вид (в него вместо r° следует подставить $\bar{r}^\circ(T) = (r^\circ)^{1/T}$:

$$1 \le f(T,z)\,(r^\circ)^{-1/T} = m^2/(s^2+m^2)^{1/2}\,(r^\circ)^{-1/T} \exp((-z/T^{1/2})\,(\ln((s^2+m^2)/m^2))^{1/2}).$$

Нетрудно видеть, что в этом случае правая часть выписанного неравенства при $s^2 \neq 0$ с ростом T возрастает для всех значений $r^\circ>1$. Поэтому и во втором случае с ростом T множество допустимых портфелей расширяется и max m_p может только возрасти. И только при $s^2 = 0$ и $r^\circ>1$ правая часть неравенства убывает, что говорит о возможном сужении множества допустимых портфелей, при том лишь за счет исключения из него безрискового портфеля. Также как и в первом случае, при больших T зависимость решения задачи от T фактически исчезает и вид задачи упрощается:

$$m_p \rightarrow \max \quad \text{при условии } 1 \le m_p^2/(s_p^2+m_p^2)^{1/2}. \tag{33}$$

Задачи (32) и (33) обладают интересной особенностью. Поскольку в условия, определяющие множество допустимых портфелей, не входит параметр z, это означает, что при достаточно больших T множество допустимых портфелей фактически не зависит от z (при $z>0$). Это, в свою очередь, говорит о том, что при достаточно больших T множество допустимых портфелей для каждого инвестора определяется единственным параметром предпочтения, а именно параметром $r^\circ(T)$, и, кроме того, этот параметр перестает нести функцию ограничения на нежелательные значительные случайные отклонения от ожидаемого дохода, а, скорее, становится ограничением на сам ожидаемый доход – чем больше $r^\circ(T)$, тем на меньший ожидаемый доход будет рассчитывать инвестор. Стоит, правда, отметить, что такая особенность задачи не обладает свойством равномерности по z – чем больше z, тем больше должны быть значения T, чтобы эта особенность могла проявиться.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Функция $f(T,z)$ (формула (31)), как и ее упрощенные предельные варианты (в задачах (32) и (33)), может принимать максимальное значение как при максимально возможном значении $m_p=m_1$, так и при $m_p<m_1$. Первая возможность может, например, представиться, если $m1$ значимо превышает m_2, а s_p слабо зависит от портфеля. Вторая возможность реализуется, например, если m_p растет при возрастании x незначительно, а s_p для некоторых портфелей принимает близкие к 0 значения, что может происходить при значительной отрицательной корреляции доходов от бумаг 1 и 2. Эти два типа обсуждаемой функции дают разные варианты решения задачи. В первом случае решением задачи для всех T будет $m_p=m_1$ (самый доходный портфель), если, конечно, множество допустимых портфелей не пусто. Во втором случае оптимальный портфель зависит от T и доходность этого портфеля с ростом T возрастает.

Литература

1. J.Tobin. "The Theory of Portfolio Selection", in The Theory of Interest Rates, F.Hahn and F.Breechling, eds., London: Macmillan, 1965.
2. J.F.Marshall. Futures and Option Contracting, Cincinnati, OH: South-Western, 1989.
3. M.Zelney. Multiple Criteria in Decision Making, New York: McGraw-Hill, 1982.

4. J.Aitchison and J.A.Brown. The Lognormal Distribution, Cambridge, MA: Cambridge Press, 1957.
5. W.P.Lloyd and R.L.Haney. "Time Diversification: Surest Route to Lower Risk", Journal of Portfolio Management, Spring 1980.
6. P.L.Bernstein. "The Time of Your Life", Journal of Portfolio Management, Summer 1976.
7. W.Reichenstein. "On standart Deviation and Risk", Journal of Portfolio Management, Winter 1987.
8. R.W.McEnally. "Time Diversification: Surest Route to Lower Risk?", Journal of Portfolio Management, Summer 1985.